**Семинар ОЭФ ИЯИ РАН** **Январь 2011**

**Г.Н. Вялов:**

# Некоторые общие соотношения теории бета - спектров и схема их применения к оценке спектральных параметров по результатам измерений

**Проводится аналитическое исследование экспериментальных данных, которые можно получить в измерениях формы спектра на примере измерений бета - распада молекулярного трития.**

**Оценка параметров спектра производится методом, близким к методу моментов, с использованием разложения по ортогональным полиномам Чебышева. Для этого сначала путём тождественных преобразований конструируется квазилинейная функция распределения. Строится и анализируется схема итерационного процесса, выражающего параметры спектра в виде аналитических зависимостей от трёх измеренных параметров, в том числе для массы электронного антинейтрино.**

**Способ анализа экспериментальных результатов наглядно иллюстрирует возможность появления в расчётах отрицательного параметра квадрата массы нейтрино, поскольку параметр квадрата массы нейтрино определяется разностью двух больших величин. Формулируется физическое условие, при выполнении которого можно отобрать циклы измерения, приводящие только к положительным значениям параметра квадрата массы.**

**Предлагается схема расчёта приближённых характеристик распределения, в т.ч., средних величин функций от случайного аргумента и параметров спектра, а также разброса определяемых величин относительно средних значений.**

**В работе [1] рассмотрены некоторые проблемы в обработке данных установки «Троицк ню-масс» по прямому поиску массы нейтрино. Признавая значимость метода наименьших квадратов (м.н.к.) как одного из важнейших методов фитирования параметров статистических распределений, авторы отмечают, что эффективная применимость м.н.к. ограничена областью распределений с линейной зависимостью от фитируемых параметров [4]. Авторы считают, что новый метод квазиоптимальных весов, предложенный в работах [3. 6], даёт алгоритмически и статистически эффективное решение проблем м.н.к.**

**Алгоритмический рецепт метода квазиоптимальных весов в основной форме сводится к выполнению нескольких шагов итерационного цикла, причём на каждом шаге решается некоторая система уравнений, откуда и получаются оценки параметров, а итерации нужны для уменьшения ошибок («поправка» весов в сторону оптимальности с учётом информации о параметрах, извлечённой на предыдущем шаге).**
**Была показана также возможность итерационного уточнения оценки. Для каждой из оценок параметров, корректных самих по себе, нет проблемы сходимости в обычном смысле.**

1. **Введение.**

**Достаточно общее представление спектра бета-распада молекулы трития с учётом дискретных конечных состояний дочерней молекулы "$i$"с энергией $W_i$, используемое при обработке результатов экспериментальных измерений формы спектра в поиске массы электронного антинейтрино, даётся (с точностью до некоторых обозначений), например, в форме [7]:**

$$\Phi(E,Q,m,N) = \sum_i \Omega_i \Phi_i = NF(Z,E)M(E)\sum_i \Omega_i P_i(E,Q,m,W_i)\times\Theta(Q-E-mc^2-W_i), \quad \mathbf{(1.5)}$$

$N$ **- нормировочный множитель,** $F(Z,E)$**- функция Ферми,** $M(E)= E^{1/2}(E+2m_e c^2)^{3/2}$**, (форма записи спектра распада (1.5) проявляет особенности спектра в конечных точках ветвей распада трития в индивидуальные возбуждённые состояния дочерней молекулы с энергией** $W_i$ **и следствия закона сохранения энергии в этих точках),**

$$\Phi_i(E,Q,m,N) = NF(Z,E)M(E)P_i(E,Q,m,W_i)\times\Theta(Q-E-mc^2-W_i) \quad \mathbf{(1.6)}$$

$$\sum \Omega_i = 1, \quad \mathbf{(1.7)}$$

$$P_i(E,Q,m,W_i) = (Q-E-W_i)[(Q-E-W_i)^2 - m^2c^4]^{1/2}, \quad \mathbf{(1.8)}$$

$Q-$**полная энергия распада,** $\Omega_i -$**вероятность заселённости конечного состояния "$i$",** $\Theta -$ **ступенчатая функция.**

**Теоретический сигнал в интегральном спектрометре определяется выражением**

$$S(T,Q,m,N,N_b) = \int_0^\infty \Phi(E,Q,m,N)R'(E,T)dE + N_b = \sum_i S_i + N_b, \quad \mathbf{(1.9)}$$

$N_b$ **- экспериментальный фон,**

$$S_i = N\Omega_i \int_0^\infty F(Z,E)M(E)R'(E,T)P_i(E,Q,m,W_i)\Theta(Q-E-mc^2-W_i)dE, \quad \mathbf{(1.10)}$$

$$R'(E,T) = \int_0^{E-T} R(E-q,T)[p_0\,\boldsymbol{\delta}\mathbf{(q)+p}_1\mathbf{f(q)+p}_2\,\mathbf{(f\otimes f)(q)+\ldots+]dq}, \quad \mathbf{(1.11)}$$

$R(E,T)-$**теоретическая функция переноса электронов в спектрометре,** $f(q)$**- энергетическое дифференциальное поперечное сечение,** $\mathbf{p}_i$**- вероятности рассеяния электрона** $i$ **раз, [9].**

**Используя свойства функций** $R(E,T)$**,** $\Theta$ **и** $R'(E,T)$**, парциальный сигнал** $S_i$ **можно представить в форме**

$$S_i = N\Omega_i \int_T^{Q-mc^2-W_i} FMP_i R'(E,T)dE, \quad \mathbf{(1.12)}$$

$T < Q - mc^2 - W_i$**. Специфика парциального сигнала в форме (1.12) определяется верхним пределом интеграла по случайной величине E и является следствием закона сохранения энергии при распаде трития в конечное состояние дочерней молекулы с энергией** $W_i$**.**

**Разность теоретического и экспериментального сигналов от бета лучей распада**

$$\Delta S(T) = S(T) - S_{\exp}(T) \quad \mathbf{(1.13)}$$

**В идеальной системе, в которой отсутствуют ошибки измерения и расчётов, измеренный и теоретический сигналы должны совпадать. В реальных условиях соотношение (1.13) выражает ошибку единичного измерения в точке T.**

**Оценку массы нейтрино** $m$ **и других параметров** $\Pi$ **спектра бета-распада согласно [10] можно сделать методом моментов, хотя этот метод признаётся недостаточно**

**эффективным. Если теоретический спектр зависит от n параметров, то согласно [10] метод моментов определяет совместные оценки этих n параметров посредством n уравнений, получаемых путём приравнивания первых n моментов для распределений, соответствующих теоретическому и измеренному спектрам. Для повышения эффективности метода моментов будет использоваться его модификация.**

## 2. Вспомогательные преобразования

**2.1. Теоретический спектр. Выразим вероятность $\Omega_0$ наиболее заселённого $\Omega_i$ из равенства (1.7)** $\Omega_0 = 1 - \sum_{i \ge 1} \Omega_i$ **(2.1)**

**и подставим выражение (2.1) в теоретический спектр (1.5). Получим**

$$\Phi(E,Q,m,N) = NF(Z,E)M(E)\{P_0\Theta(Q - E - mc^2 - W_0) + \\ + \sum_{i \ge 1} \Omega_i [P_i\Theta(Q - E - mc^2 - W_i) - P_0\Theta(Q - E - mc^2 - W_0)]\} = \Phi_0 + \Psi \text{,} \qquad \textbf{(2.2)}$$

$$\Phi_0 = NP_0 F(Z,E)M(E)\Theta(Q - E - mc^2 - W_0) \text{,} \qquad \textbf{(2.3)}$$

$$\Psi = NF(Z,E)M(E)\sum_{i \ge 1} \Omega_i [P_i\Theta(Q - E - mc^2 - W_i) - P_0\Theta(Q - E - mc^2 - W_0)] \qquad \textbf{(2.4)}$$

**2.2. Теоретический сигнал. Подставив теоретический спектр в форме (2.2) в выражение (1.9), получим соотношение** $S = S_0 + S_\Psi + N_b$, **(2.5)**

$$S_0 = \int_0^\infty \Phi_0 R'(E,T)dE \text{,} \qquad \textbf{(2.6)}$$

$$S_\Psi = \int_0^\infty \Psi R'(E,T)dE \qquad \textbf{(2.7)}$$

**Выполняя интегрирование с использованием свойств функции $R'(E,T)$ и теоремы о среднем [11], получим следующие выражения для сигнала $S_0$**

$$S_0 = N\int_0^\infty P_0(E)F(Z,E)M(E)R'(E,T)\Theta(Q - E - mc^2 - W_0)\, dE =$$

$$= N\Theta(Q - T - mc^2 - W_0)\int_T^{Q - mc^2 - W_0} P_0(E)F(Z,E)M(E)R'(E,T)dE = S_0(T)$$

$$S_0 = N\int_T^{Q - mc^2 - W_0} P_0(E)F(Z,E)M(E)dE =$$

$$= (N/3)\Theta[Q - mc^2 - W_0 - T][(Q - T - W_0)^2 - m^2c^4]^{3/2} F(Z,C)M(C)R'(C,T) \text{,}$$

$$S_0 = [NF(Z,C)M(C)R'(C,T)/3][(Q - T - W_0)^2 - m^2c^4]^{3/2} =$$

$$= NK[(Q - T - W_0)^2 - m^2c^4]^{3/2} + \Delta s_0 \text{,}$$

$$C = T + k(Q - T - mc - W_0) \text{,} \qquad 0 < k < 1$$

$$\Delta s_0 = (N/3)[(Q - T - W_0)^2 - m^2c^4]^{3/2}[F(Z,C)M(C)R'(C,T) - 3K]$$

$$\approx NK[(Q - T - W_0)^2 - m^2c^4]^{3/2} \quad \text{,} K \approx const \ \ \textbf{при условии} \ \left|Q - T - mc^2 - W_0\right| << T \ \ \textbf{(2.8),}$$

$$S_\Psi = N\sum_{i \ge 1} \Omega_i \{F(Z,C_i)M(C_i)\ [R'(C_i,T)/3][(Q - T - W_i)^2 - m^2c^4]^{3/2} -$$

$$- F(Z,C_0)M(C_0)[R'(C_0,T)/3][(Q - T - W_0)^2 - m^2c^4]^{3/2}\} \approx$$

$$\approx NK\sum_{i \ge 1} \Omega_i \{[(Q - T - W_i)^2 - m^2c^4]^{3/2} - [(Q - T - W_0)^2 - m^2c^4]^{3/2}\} \text{,} \qquad \textbf{(2.9)}$$

**поскольку при относительно малых изменениях T при условии** $\left|Q - T - mc^2 - W_i\right| << T$

$K_i \approx const \approx K$, **при** $T < Q - mc^2 - W_i$.

**Добавочный разностный сигнал $S_\Psi$ можно рассматривать как малую добавку к основному сигналу $S_0$ и учитывать его влияние методом итерации**

**2.3. Ошибка измерения:**

$$\Delta S = S - S_{\exp} \equiv S_0 + S_\Psi + N_b - S_{\exp} \equiv S_0 - (S_{\exp} - S_\Psi - N_b) \equiv S_0 - S_{\exp,\mathrm{mod}}, \qquad (2.10)$$

$$S_{\exp,\mathrm{mod}} = S_{\exp} - S_\Psi - N_b \qquad \mathbf{(2.11)}$$

**2.4. Замена спектральных функций. В процессе дальнейших преобразований будем использовать спектральные функции $Y_0$ и $\Upsilon_{\exp,\mathrm{mod}}$, определяемые равенствами**

$$\Upsilon_0 = S_0^{2/3} = (NK)^{2/3}[(Q - T - W_0)^2 - m^2c^4], \qquad \mathbf{(2.12)}$$

$$\Upsilon_{\exp,\mathrm{mod}} = S_{\exp,\mathrm{mod}}^{2/3} = (S_{\exp} - N_b - S_\Psi)^{2/3}, \qquad \Upsilon_{\exp,\mathrm{mod}}^{1/2} = (S_{\exp} - S_\Psi - N_b)^{1/3}, \qquad \mathbf{(2.13)}$$

$$S_0 = \Upsilon_0^{3/2}, \quad S_{\exp,\mathrm{mod}} = \Upsilon_{\exp,\mathrm{mod}}^{3/2}, \qquad S_0^{1/3} = \Upsilon_0^{1/2}, \quad S_{\exp,\mathrm{mod}}^{1/3} = \Upsilon_{\exp,\mathrm{mod}}^{1/2}, \qquad \mathbf{(2.14)}$$

$$\Delta S = \Upsilon_0^{3/2} - \Upsilon_{\exp,\mathrm{mod}}^{3/2} = (\Upsilon_0^{1/2} - \Upsilon_{\exp,\mathrm{mod}}^{1/2})[\Upsilon_0 + (\Upsilon_0\Upsilon_{\exp,\mathrm{mod}})^{1/2} + \Upsilon_{\exp,\mathrm{mod}}], \qquad \mathbf{(2.15)}$$

$$\Delta\Upsilon = \Upsilon_0 - \Upsilon_{\exp,\mathrm{mod}} = (\Upsilon_0^{1/2} - \Upsilon_{\exp,\mathrm{mod}}^{1/2})(\Upsilon_0^{1/2} + \Upsilon_{\exp,\mathrm{mod}}^{1/2}), \qquad \mathbf{(2.16)}$$

$$\Delta\Upsilon = [(S_0^{1/3} + S_{\exp,\mathrm{mod}}^{1/3})/(S_0^{2/3} + S_0^{1/3}S_{\exp,\mathrm{mod}}^{1/3} + S_{\exp,\mathrm{mod}}^{2/3})]\Delta S, \qquad \mathbf{(2.17)}$$

$$\Upsilon_0 = \Upsilon_{\exp,\mathrm{mod}} + [(S_0^{1/3} + S_{\exp,\mathrm{mod}}^{1/3})/(S_0^{2/3} + S_0^{1/3}S_{\exp,\mathrm{mod}}^{1/3} + S_{\exp,\mathrm{mod}}^{2/3})]\Delta S =$$

$$= \Upsilon_{\exp,\mathrm{mod}} + \Delta\Upsilon = (NK)^{2/3}[(Q - T - W_0)^2 - m^2c^4] \qquad \mathbf{(2.18)}$$

**2.5. Схематический учёт влияния конечных состояний продуктов бета распада Формально реализовать метод можно, приняв для достаточно больших $n \to \infty$ ($n$ - номер приближения, $n = 0, \quad 1, \quad 2, \ldots,$) следующую схему итераций (аналог фита):**

$$\Upsilon_{0,n} \approx \Upsilon_{0,n-1} \to \Upsilon_{0,n} = \Upsilon_{\exp,\mathrm{mod},n} + \Delta\Upsilon_n \approx \Upsilon_{\exp,\mathrm{mod},n-1} + \Delta\Upsilon_{n-1} \qquad \mathbf{(2.19)}$$

$$\Delta\Upsilon_{n-1} = [(S_0^{1/3} + S_{\exp,\mathrm{mod}}^{1/3})_{n-1}/(S_0^{2/3} + S_0^{1/3}S_{\exp,\mathrm{mod}}^{1/3} + S_{\exp,\mathrm{mod}}^{2/3})_{n-1}]\Delta S_{n-1} \qquad \mathbf{(2.20)}$$

**Малым параметром служит величина ошибки $\Delta S$. При $n = 0$ можно положить**

$$S_\Psi = 0, \ \Delta S_{-1} = 0, \ \Delta\Upsilon_{-1} = 0, \qquad \mathbf{(2.21)}$$

$$\Upsilon_{\exp,\mathrm{mod},-1} = (S_{\exp} - N_b)^{2/3}. \qquad \mathbf{(2.22)}$$

$$\Upsilon_{0,0} = (S_{\exp} - N_b)^{2/3} \qquad \mathbf{(2.23)}$$

**Выражения (2.18-2.23) определяют форму спектра и его параметры с точностью до величины фона $N_b$.**

**3. Граница бета –спектра.**

**3.1. Теоретическая граница спектра. Для прояснения сущности выражений (2.18 – 2.23) необходимо использовать дополнительнуюинформацию о свойствах бета – спектра. В этих выражениях отсутствует такое понятие, как граница бета –спектра. Введём это понятие в явном виде, определяя теоретическую граничную энергию бета – спектра**

$$E_0 = Q - mc^2 - W_0 \equiv Q_0 - mc^2, \qquad Q = E_0 + mc^2 + W_0, \qquad \mathbf{(3.1)}$$

**3.2.Экспериментальная граница спектра. Понятию теоретической границы спектра соответствует понятие экспериментальной границы спектра. определяемой в процессе измерения. Теоретическая граница спектра Т =$T_0 = Q - mc^2 - W_0$, (3.2)**

**в которой** $\Upsilon_0(T_0) = 0$ **(3.3)**

**По аналогии определяется экспериментальная граница спектра Т =$T_{\exp}$, в которой**

$$\Upsilon_{\exp,\mathrm{mod}}(T_{\exp}) = 0, \qquad \mathbf{(3.4)}$$

$$S_{\exp,\mathrm{mod}}(T_{\exp,\mathrm{mod}}) = S_{\exp}(T_{\exp}) - S_\Psi(T_{\exp}) - N_b = 0 \qquad \mathbf{(3.5)}$$

**Из условия (3.5) определяется фон на экспериментальной границе спектра**

$$N_b = S_{\exp}(T_{\exp}) - S_\Psi(T_{\exp}) = N_b(T_{\exp}) \qquad \textbf{(3.6)}$$

**Естественно потребовать, чтобы выполнялось условие**

$$T_{\exp} = T_0 = Q - mc^2 - W_0 \qquad \textbf{(3.7)}$$

$$N_b = const = N_b(T_{\exp}) \qquad \textbf{(3.8)}$$

**4. Аналитическая оценка параметров спектра.**

**Дополнительное масштабное преобразование выражения (2.12) путём замены величины Т на безразмерную величину «х», переводящей отрезок $T_1 \le T \le T_2$ в отрезок $-1 \le x \le 1$, а точку $T_1$ в точку 1 [8]:** $T(x) = (1 - r_0 x)/t_0$, $t_0 = 2/(T_1 + T_2)$, $r_0 = (1-z)/(1+z)$, $z = T_1/T_2$ **(4.1)**

**Вместо (2.12) получим выражение**

$$\Upsilon[T(x)] = (NK)^{2/3} r_0^2 t_0^{-2}\{x^2 + 2xr_0^{-1}[t_0(Q - W_0) - 1] + [t_0(Q - W_0) - 1]^2 r_0^{-2} - (mc^2 t_0 / r_0)^2\} \textbf{(4.2)}$$

**Степени «х» выражаются через полиномы Чебышева $T_n(x)$ [10]**

**1=**$T_0$ $x = T_1(x)$ **,** $x^2 = [T_0 + T_2(x)]/2$ **, ортогональные с весом** $(1 - x^2)^{-1/2}$ **, и нормировкой**

$$\int_{-1}^{1} T_0^2 (1 - x^2)^{-1/2} dx = \boldsymbol{\pi}, \qquad \int_{-1}^{1} T_{1,2}^2(x) \times (1 - x^2)^{-1/2} dx = \boldsymbol{\pi/2}$$

**Получим** $\Upsilon_0[T(x)] = 2^{-1}(NK)^{2/3} r_0^2 t_0^{-2}\{T_2(x) + 4r_0^{-1} T_1(x)[t_0(Q - W_0) - 1] +$

$$+ T_0[1 + 2r_0^{-2}([t_0(Q - W_0) - 1]^2 - m^2 c^4 t_0^2)]\} \qquad \textbf{(4.4)}$$

**Если использовать в качестве весов полиномы Чебышева, то для определения трёх параметров в итерационном цикле (2.19) получим три типовых уравнения**

$$\boldsymbol{\pi}(\ NK\ )^{2/3} r_0^2 t_0^{-2} / 4 = M_{2,\exp}, \qquad \textbf{(4.5)}$$

$$\boldsymbol{\pi}(NK)^{2/3} r_0 t_0^{-2}[t_0(Q - W_0) - 1] = M_{1,\exp}, \qquad \textbf{(4.6)}$$

$$\boldsymbol{\pi}(NK)^{2/3} r^2 t_0^{-2} 2^{-1}\{1 + 2r_0^{-2}([t_0(Q - W_0) - 1]^2 - m^2 c^4 t_0^2)\} = M_{0,\exp}, \qquad \textbf{(4.7)}$$

**где** $M_{k,\exp}$ **первые коэффициенты разложения экспериментального сигнала** $Y_{\exp,\mathrm{mod}}$**.**

**Уравнение (4.5) определяет нормировочный множитель. Уравнения (4.5) и (4.6) дают оценку величины** $Q$

$$t_0(Q - W_0) = 1 + M_{1,\exp} r_0 / (4M_{2,\exp}), \quad Q - W_0 = t_0^{-1}[1 + M_{1,\exp} r_0 / (4M_{2,\exp})] \qquad \textbf{(4.8)}$$

**И, наконец, из уравнения (4.7) получается оценка параметра квадрата массы нейтрино**

$$m^2 c^4 t_0^2 = 1 + (M_{1,\exp} / M_{2,\exp})^2 (r_0 / 8) - M_{0,\exp} / 2M_{2,\exp},$$

$$m^2 c^4 = t_0^{-2}\{1 + (M_{1,\exp} / M_{2,\exp})^2 (r_0 / 8) - M_{0,\exp} / 2M_{2,\exp}\} \qquad \textbf{(4.9)}$$

**5. Область физических параметров.**

**Условием существования действительного параметра массы нейтрино (4.9) является неравенство**

$$m^2 c^4 t_0^2 = 1 + (M_{1,\exp} / M_{2,\exp})^2 (r_0 / 8) - M_{0,\exp} / 2M_{2,\exp} \ge 0, \qquad \textbf{(5.0)}$$

**или** $$1 + (M_{1,\exp} / M_{2,\exp})^2 (r_0 / 8) \ge M_{0,\exp} / 2M_{2,\exp} \qquad \textbf{(5.1)}$$

**Левая сторона неравенства (5.0) должна быть положительной. Множитель** $M_{0,\exp}$ **- среднее значение положительной функции - положителен. Неравенство (5.1) является ограничением на величину** $M_{0,\exp}$ **для положительных значений** $M_{2,\exp}$

$$M_{0,\exp} \le 2M_{2,\exp}[1 + (M_{1,\exp} / M_{2,\exp})^2 (r_0 / 8)] \qquad \textbf{(5.2)}$$

**Тогда имеем** $$m^2c^4t_0^2M_{2,\exp} = M_{2,\exp} + (M_{1,\exp}^2 / M_{2,\exp})(r_0/8) - M_{0,\exp}/2 \ge 0 \qquad (5.3)$$

**Если рассматривать правую часть равенства (5.3) как функцию величины** $M_{2,\exp}$

$$y(M_{2,\exp}) = M_{2,\exp} + (M_{1,\exp}^2 / M_{2,\exp})(r_0/8) - M_{0,\exp}/2 \qquad (5.4)$$

**при заданной величине** $M_{1,\exp}$**, то эта функция имеет минимум в точке** $M_{2,\exp}^{\min}$**, определяемой равенством**

$$[M_{2,\min}^{\min}]^2 = M_{1,\exp}^2(r_0/8), \qquad M_{2,\exp}^{\min} = \left|M_{1,\exp}\right| r_0^{1/2} 2^{-3/2}, \qquad (5.5)$$

$$y_{\min} = 2M_{2,\exp}^{\min} - M_{0,\exp}/2 = \left|M_{1,\exp}\right|(r_0/2)^{1/2} - M_{0,\exp}/2 \qquad (5.6)$$

**Если выполняется условие** $y_{\min} \ge 0$**, или** $$M_{0,\exp} \le \left|M_{1,\exp}\right|(2r_0)^{1/2}, \qquad (5.7)$$

**то для оценки параметра квадрата массы нейтрино получается выражение**

$$m^2c^4 = t_0^{-2}M_{2,\exp}^{-1}[M_{2,\exp} + (M_{1,\exp}^2 / M_{2,\exp})(r_0/8) - \left|M_{1,\exp}\right|(r_0/2)^{1/2}] \ge 0 \qquad (5.8)$$

**При условии (5.8) существует оценка параметра действительной массы нейтрино, определяемая положительным значением корня квадратного из оценки параметра квадрата массы**

$$mc^2 = \{t_0^{-2}M_{2,\exp}^{-1}[M_{2,\exp} + (M_{1,\exp}^2 / M_{2,\exp})(r_0/8) - \left|M_{1,\exp}\right|(r_0/2)^{1/2}]\}^{1/2} \ge 0 \qquad (5.9)$$

**Заметим, что правая сторона неравенства (5.0) представляет собой разность двух больших величин порядка 1.**

## 6. Статистические характеристики распределения.

**Среди всех циклов измерения можно найти циклы трёх различных классов: Циклы с общим числом** $N_+$**, для которых параметр квадрата массы нейтрино (4.9) оказывается положительной величиной, циклы измерения с общим числом** $N_0$**, для которых величина (4.9) оказывается почти нулевой (с некоторой эмпирически подбираемой точностью, например, 0,1 от максимальной абсолютной** величины **критерия) и циклы с отрицательной величиной (4.9) и общим числом** $N_-$ **оказываются в третьем классе. При этом** $N = N_+ + N_0 + N_-$

**Можно предположить, что относительные частоты** $N_{+,0,-}/N$ **характеризуют качество условий измерения. Для выводов о величине массы и других измеримых функций параметров следует учитывать только данные циклов с неотрицательным параметром квадрата.**

## 7. Обсуждение результатов и выводы

**В заключение автор выражает искреннюю признательность доктору физико-математических наук Э.Я. Парьеву, прочитавшему работу в рукописи, за плодотворное обсуждение, ценные замечания и дополнительную информацию по отдельным аспектам проблемы.**

## ЛИТЕРАТУРА


**1. А.А. Нозик, А.К. Скасырская. Моделирование спектра и обработка результатов эксперимента «Троицк ню-масс». Препринт ИЯИ РАН 1224/2009.**
**2. E. Fermi. Versuch einer Theorie der β-Strahlen. Zs. F. Phys. 88 (1934) 161 – 171. См.также русский перевод: Энрико Ферми. Научные труды. Наука, М., 1971, с. 525 – 541.**
**3.** *Fyodor V. Tkachov. – arXiv* : *physics* / 0001019.
**4. А.А. Нозик, Ф.В. Ткачёв. Препринт ИЯИ РАН 1241/2009.**
**5. Gary J. Feldman, Robert D. Cousins. A Unified Approach to the Classical Statistical Analysis of Small Signals. – arXiv: physics/9711021.**
**6. Tkachov. ArXiv: physics/0604127.**
**7. J. Kaspar et al. NIM A 527 (2004) 423 – 431.**
**8.А.А. Самарский, Е.С. Николаев. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.**
**9. V.N. Aseev et al. Eur. Phys. J. D. 10 (2000) 39 – 52.**
**10. Г. Корн и Т. Корн. Справочник по математике. М., 1974.**
**11. И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М-Л, 1948.**
**12. V.M. Lobashev et al., Direct Search for The Mass of Neutrino and Anomaly in The Tritium Beta-Spectrum. Physics Letters B 460 (1999) 227-235.**
**13. В.М. Лобашев. Измерения массы нейтрино в бета-распаде трития. Вестник РАН 2003, том 73, № 1, 14-27.**
**14. V.M. Lobashev et al., Nuclear Physics A 654 (1999) 982-987.**
**15. А. И. Белесев и др. Препринт ИЯИ – 1174/2006.См. также ЯФ – 2008- т. 71, №3, с. 449 – 459. Physics of Atomic Nuclei – 2008 - V. 71, Iss.3, p. 427 – 436.**
**16. Kraus C. et al., 2005 Eur. Phys. J. C40 447 – 468.**
**17. Particle Data Group, Journal of Physics, July 14, 2006.**