



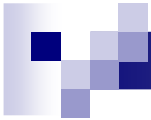
**Подробности анализа имеющихся
спектров beta-распада трития с
целью поиска дополнительного
тяжёлого собственного состояния
нейтрино**

В. Пантуев



Содержание

- Введение
- Описание метода максимального правдоподобия
- Систематические ошибки
- Фактические формы функции правдоподобия и окончательный результат
- Проверка для электронного нейтрино (сопоставление с предыдущим основным результатом эксперимента)
- Проверка обычным методом фитирования спектра
- Сравнение с результатами из Майнц группы
- Выводы



Рассуждения о возможном наличии дополнительных состояний нейтрино стали учебными:

Particle Data Group

$$|\nu_l\rangle = \sum_j U_{lj}^* |\nu_j; \tilde{p}_j\rangle, \quad l = e, \mu, \tau,$$

If the number n of massive neutrinos ν_j is bigger than 3 due to a mixing between the active flavour and sterile neutrinos, one will have additional relations similar to that in Eq. (13.5) for the state vectors of the (predominantly LH) sterile antineutrinos. In the case of just one RH sterile neutrino field $\nu_{sR}(x)$, for instance, we will have in addition to Eq. (13.5):

$$|\bar{\nu}_{sL}\rangle = \sum_{j=1}^4 U_{sj}^* |\nu_j; \tilde{p}_j\rangle \cong \sum_{j=1}^4 U_{sj}^* |\nu_j, L; \tilde{p}_j\rangle, \quad (13.6)$$

where the neutrino mixing matrix U is now a 4×4 unitary matrix.

PS: В лаборатории уже получен грант для развития этого направления

Смешивание в случае существования стерильных нейтрино

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} & U_{e \text{ sterile}} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} & U_{\mu \text{ sterile}} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} & U_{\tau \text{ sterile}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \nu_{\text{sterile}} \end{pmatrix}$$

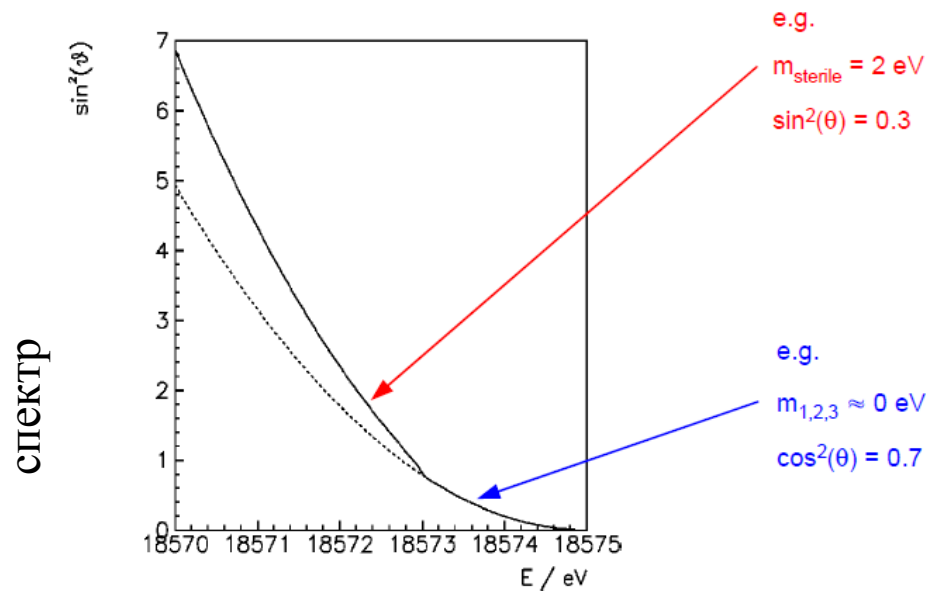
$$\text{sterile neutrino: } U_{e \text{ sterile}}, U_{\mu \text{ sterile}}, U_{\tau \text{ sterile}} \ll 1$$

for $m(\nu_1) \approx m(\nu_2) \approx m(\nu_3)$:

$$\nu_e = \cos^2(\theta) \nu_{1,2,3} + \sin^2(\theta) \nu_{\text{sterile}}$$

Как проявится в бета-спектре распада трития

$$dN/dE = K F(E,Z) p E_{\text{tot}} (E_0 - E_e) \left(\cos^2(\theta) \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_{1,2,3}^2} + \sin^2(\theta) \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_{\text{sterile}}^2} \right)$$



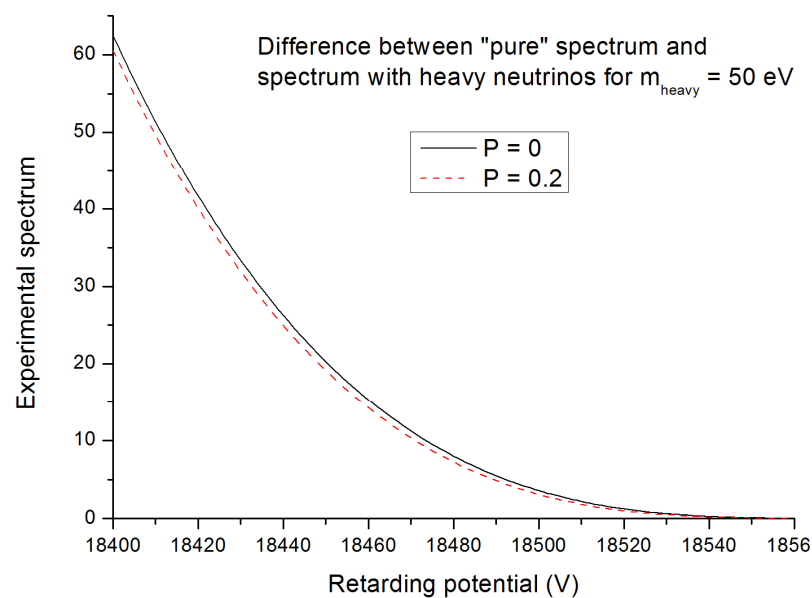
Для фита определяем $m_{123} = 0$, добавляем два параметра:

m_4 и примеси $P_{\text{heavy}} = U_{e4}^2$

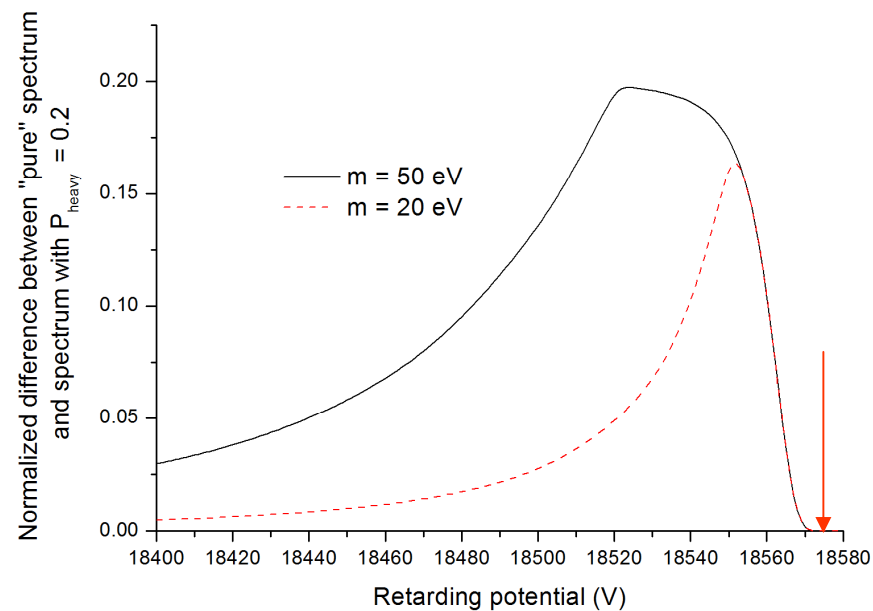
$$S(E) = NF(E)(E + m_e)p_e(E_0 - E) \cdot \left[\underbrace{U_{e4}^2 \sqrt{(E_0 - E)^2 - m_4^2}}_{\text{sterile}} + \underbrace{(1 - U_{e4}^2)(E_0 - E)}_{\text{standard}} \right]$$

Проверка моделированием:

Интегральный спектр



Разница формы спектров



Результаты были доложены более года назад 20 марта 2012 г.
<http://www.inr.ru/~pantuev/seminars/Sterily.pdf>

В декабре 2012 была послана короткая статья в Письма в ЖЭТФ

Pis'ma v ZhETF, vol. 97, iss. 2, pp. 73–75

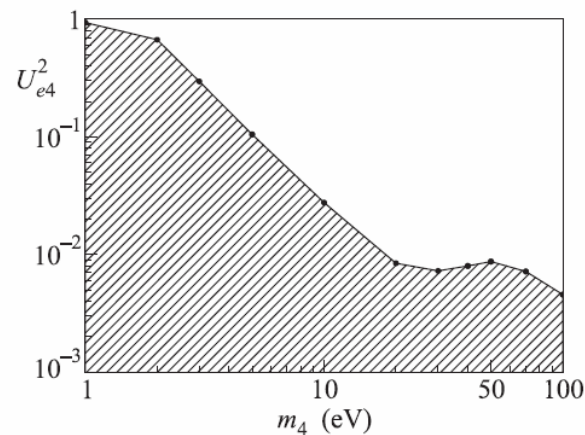
© 2013 January 25

An upper limit on additional neutrino mass eigenstate in 2 to 100 eV
region from “Troitsk nu-mass” data

A. I. Belev, A. I. Berlev, E. V. Geraskin, A. A. Golubev, N. A. Likhovid, A. A. Nozik¹, V. S. Pantuev¹,
V. I. Parfenov, A. K. Skasyrskaya

Institute for Nuclear Research of the RAS, 117312 Moscow, Russia

Submitted 3 December 2012



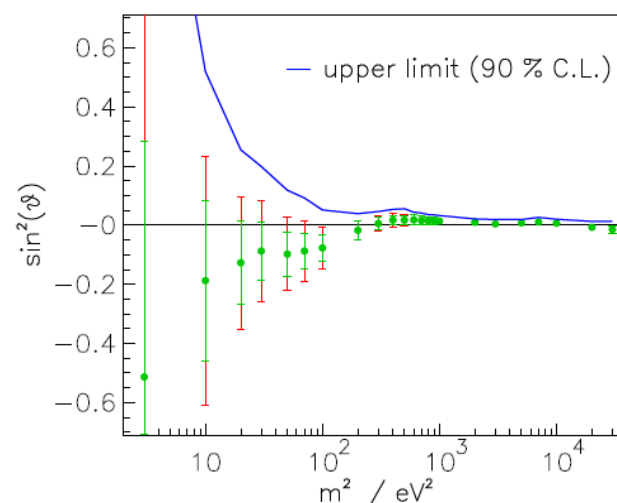
The upper 95% C.L. limit for admixture U_{e4}^2 of the heavy neutrino eigenstate in β -electron spectrum versus its mass, m_4

Было отмечено, что вклад систематических ошибок мал и не учитывался. Все подробности планировалось описать в большой статье.

Чуть ранее, 4 человека из бывшей группы эксперимента в Майнц опубликовали аналогичный результат (почему туда не вписаны остальные участники - неясно).

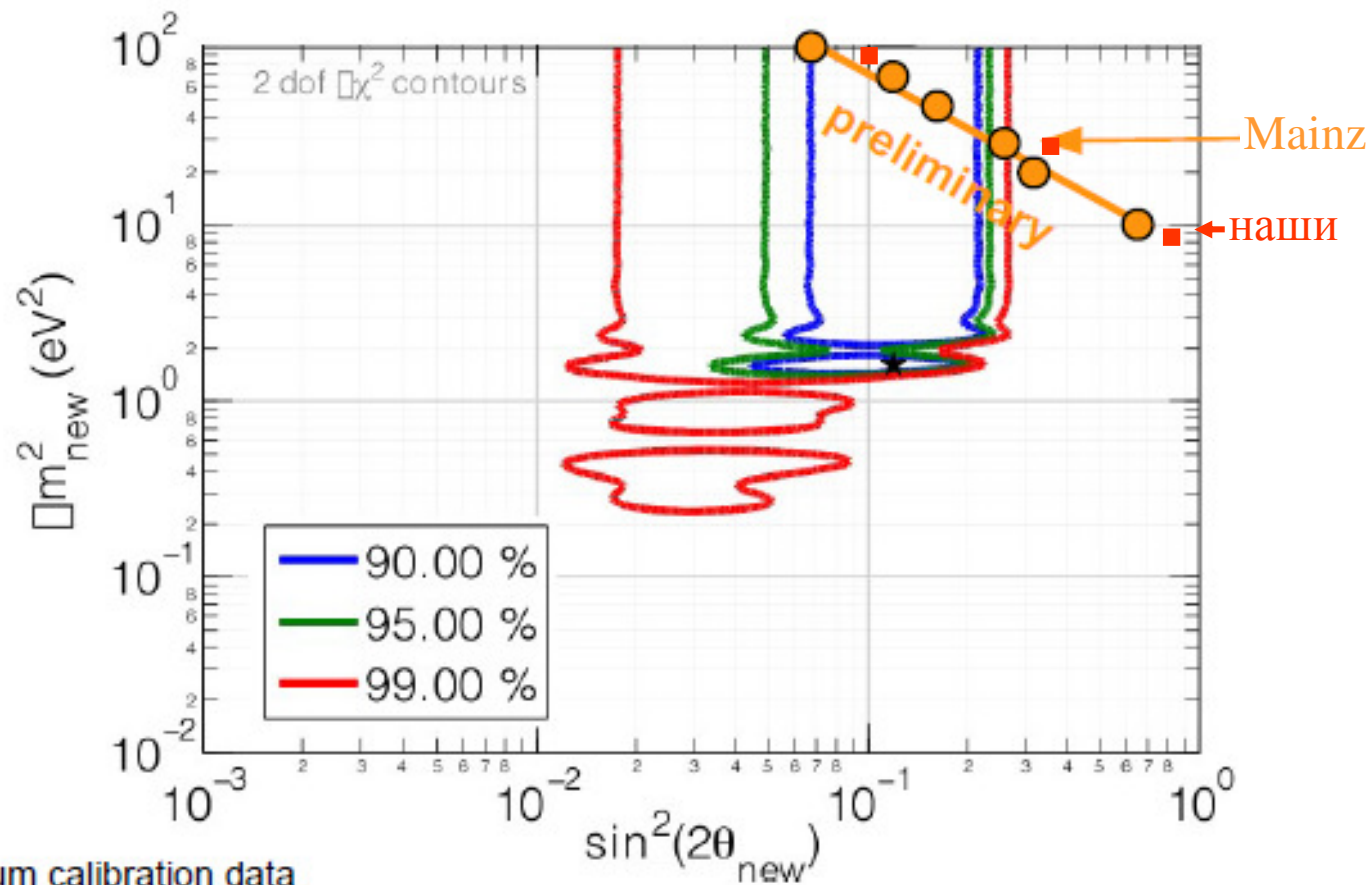
Limit on sterile neutrino contribution from the Mainz Neutrino Mass Experiment

Christine Kraus¹, Andrej Singer^{2*}, Kathrin Valerius^{2†} and Christian Weinheimer^{2‡}



За год до этого эти авторы показывали совершенно другой результат – примерно в 3-4 раза лучше (мы это узнали только после опубликования нашей статьи, до этого сравнение не проводилось):

Слайд из моего доклада год назад:
Сравнение с обработкой в Mainz



... очень близко !

Как строились функции правдоподобия:

- Для каждого сеанса брался экспериментальный спектр, по измеренным точкам проводилась функция от переменных

$$L(U_{e4}^2, E_0, N, bkg) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_i}} e^{-\frac{(X_i - \mu_i)^2}{2\mu_i}}$$

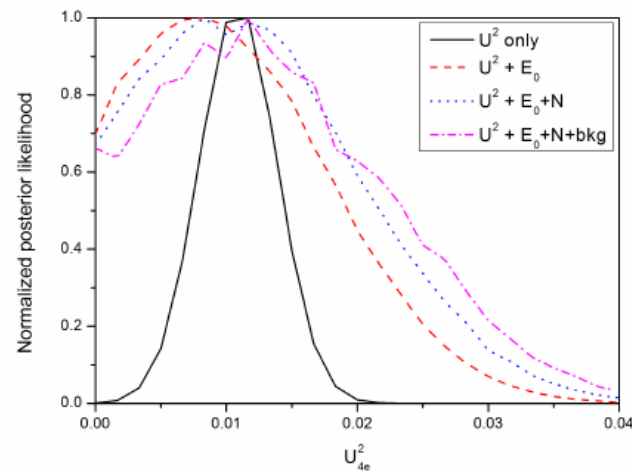
- where $\mu_i = \mu(V_i, U_{e4}^2, E_0, N, bkg)$ is the estimate of the spectrum value at the point i

Переводя на простой язык – это произведение отклонений в каждой точке нормированное на гауссовскую ошибку в точке. Удобно использовать логарифм функции.

Процедура делалась для каждого значения дополнительной тяжёлой массы m_4

Затем проводилось интегрирование методом Монте Карло по не интересующим нас параметрам, сразу по 3-м одновременно. Все возможные корреляции между параметрами учитываются автоматически:

$$L(U_{e4}^2) = \int_{E_0} \int_N \int_{bkg} L(U_{e4}^2, E_0, N, bkg)$$

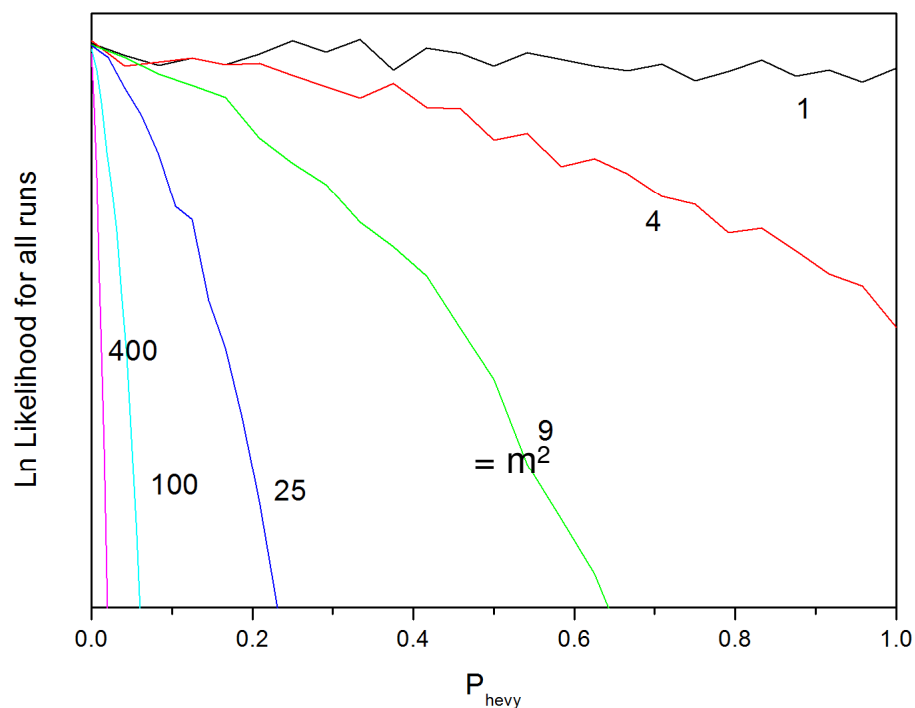


Пример, как ведёт себя функция в случае последовательного интегрирования

FIG. 1: Likelihood functions integrated sequentially over different parameters for $m_4=50$ eV.

Суммарная функция правдоподобия по всем сеансам
вычислялась как **произведение** функций правдоподобий
отдельных сеансов.

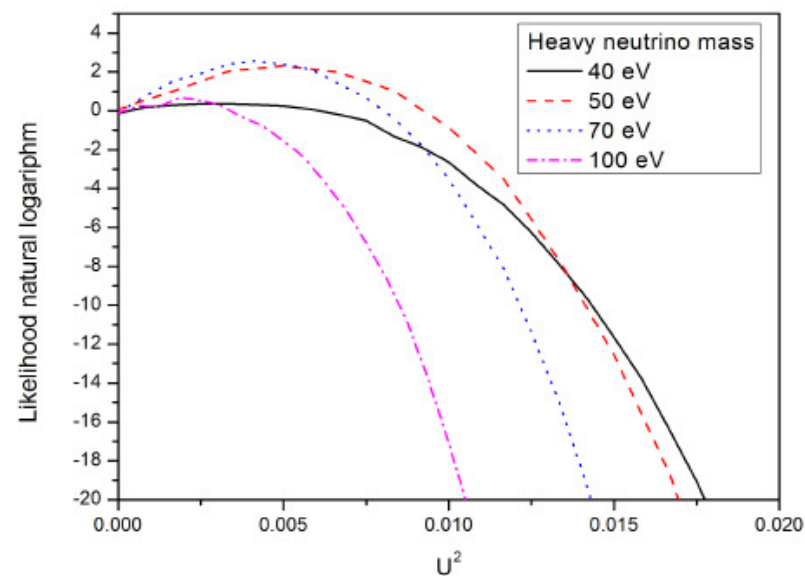
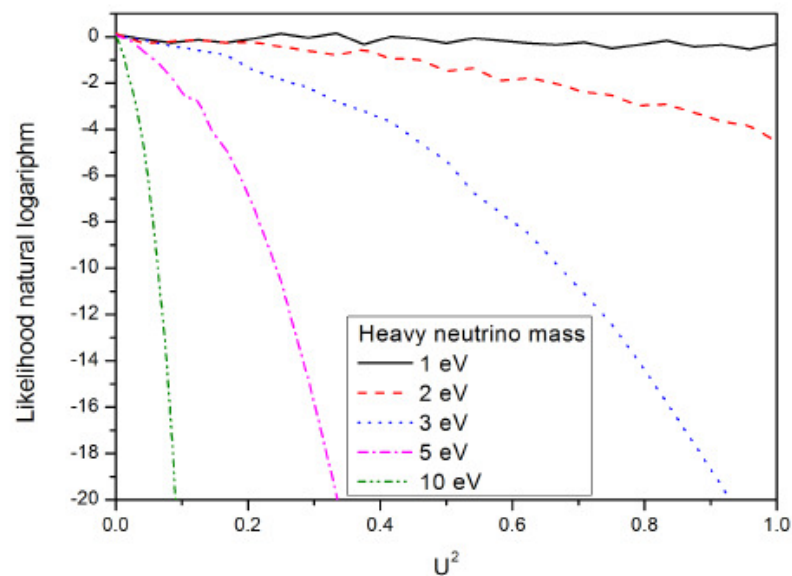
$$L(P_{heavy}) = \prod_i L_i(P_{heavy})$$



Окончательный вид функций правдоподобия.

Статистические ошибки учтены автоматически.

Систематические ошибки не приведены.

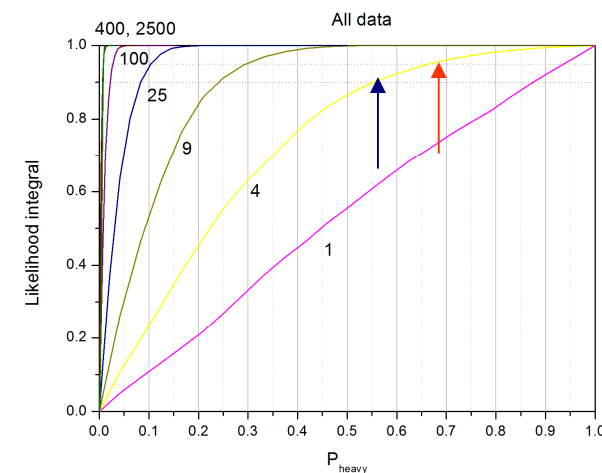


Далее, интегрируется функция правдоподобия до значений 90% и 95%, PDG:

33.3.1. Bayesian intervals :

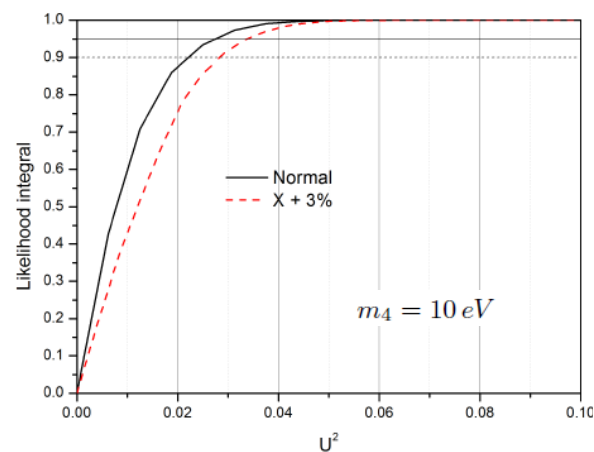
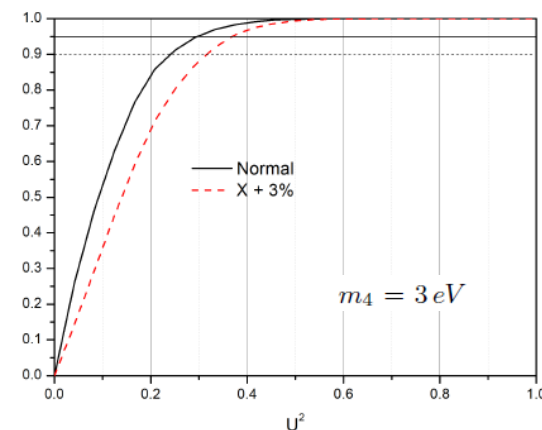
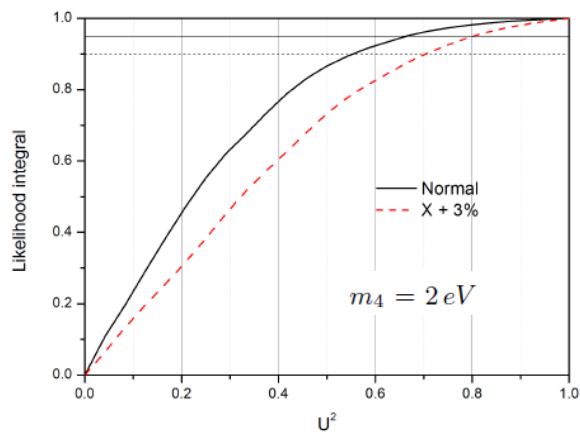
As described in Sec. 33.1.4, a Bayesian posterior probability may be used to determine regions that will have a given probability of containing the true value of a parameter. In the single parameter case, for example, an interval (called a Bayesian or credible interval) $[\theta_{lo}, \theta_{up}]$ can be determined which contains a given fraction $1 - \alpha$ of the posterior probability, *i.e.*,

$$1 - \alpha = \int_{\theta_{lo}}^{\theta_{up}} p(\theta|x) d\theta . \quad (33.43)$$



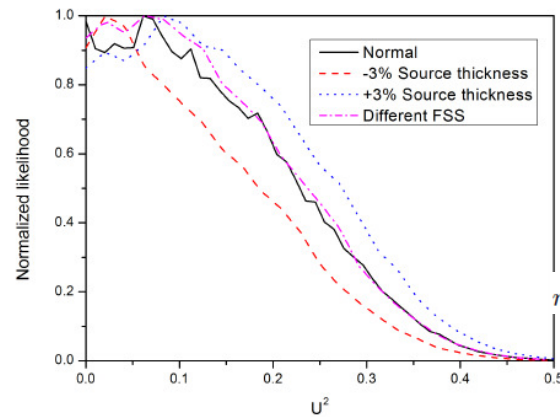
Получаем значения верхней границы **вероятной примеси** тяжёлого нейтрино

Оценка погрешностей

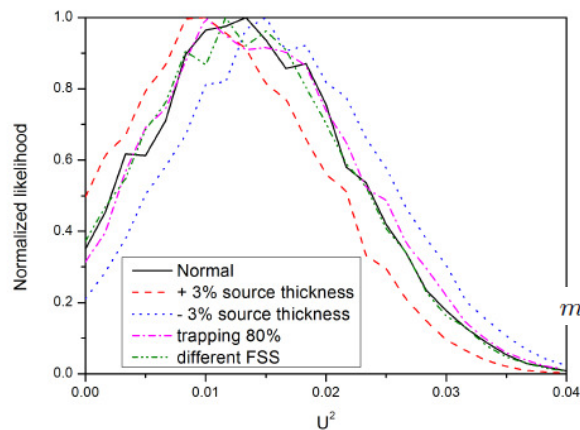
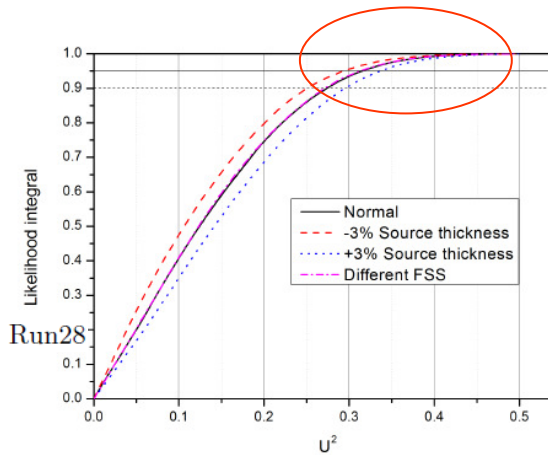


Основная погрешность в оценке толщины/количества вещества в тритиевом источнике. Для предела в 95% её влияние мало.

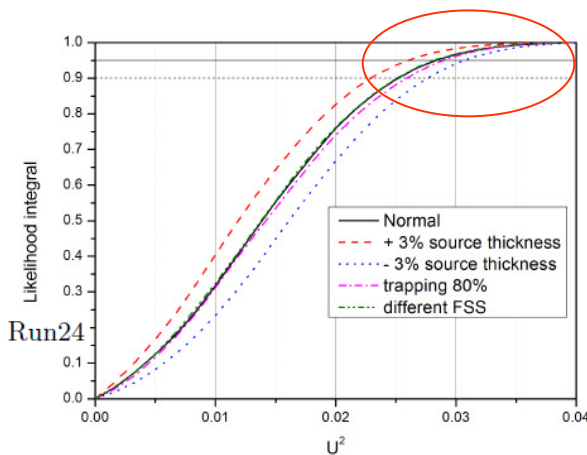
Вклад остальных систематик (треппинг, спектр конечных состояний) ещё меньше:

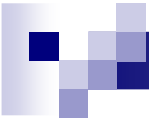


$m_4 = 5 \text{ eV}$ and Run28



$m_4 = 50 \text{ eV}$ and Run24





Сделано два вида оценки систематических ошибок:

консервативная, когда параметр отпускается на свой предел,

и стандартная, согласно рекомендациям, например в **Particle Data Group**:

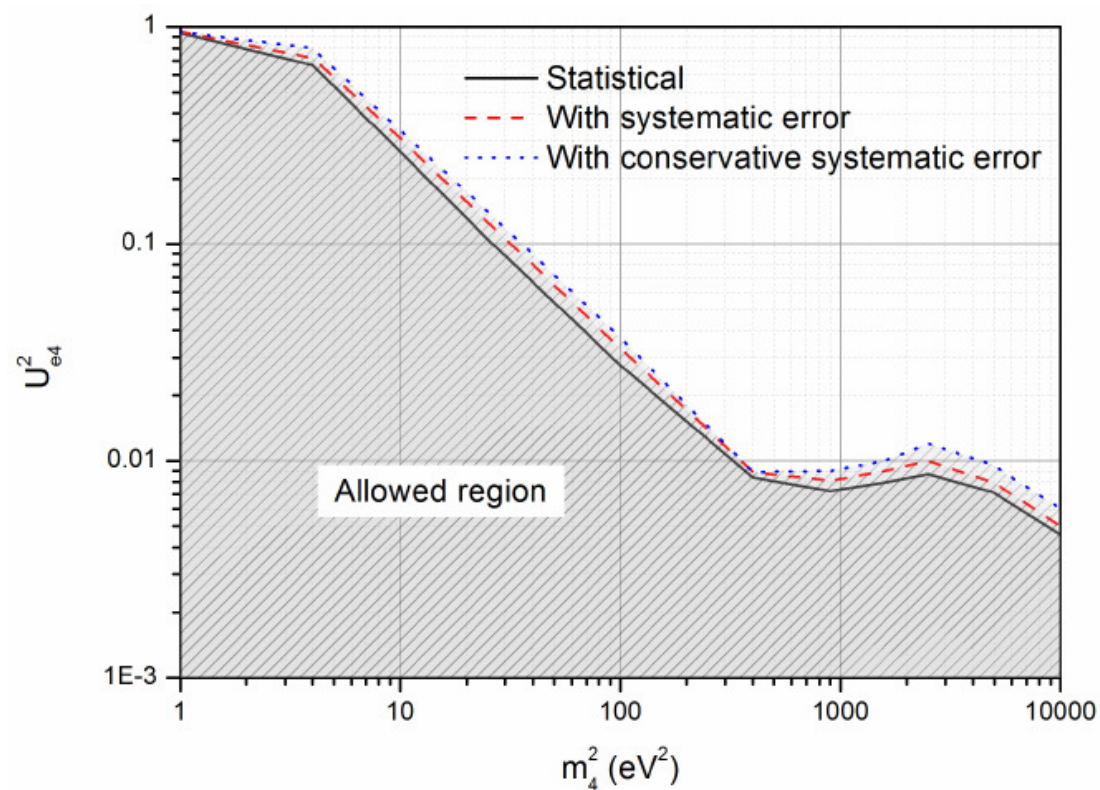
33.1.4.2. *Bayesian treatment of nuisance parameters:*

$$L_m(x|\theta) = \int L(x|\theta, \nu) \pi(\nu) d\nu$$

где « ν » - параметр систематической неопределённости, в нашем случае, например, толщина источника;

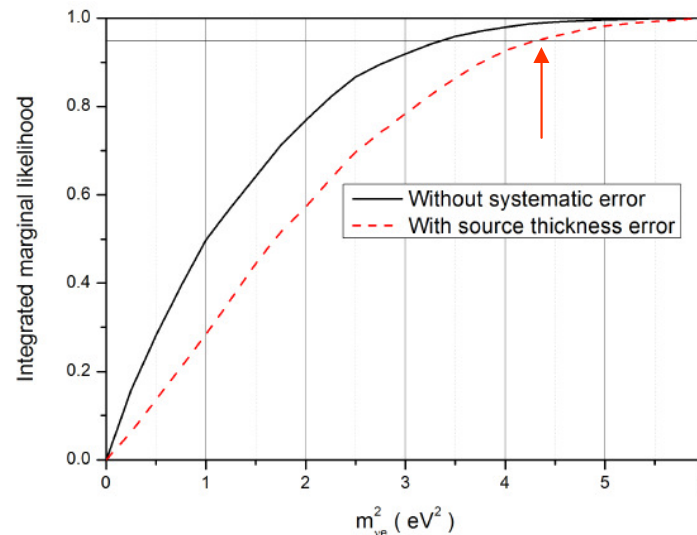
« π » - его распределение в максимальных пределах, которое предполагалось плоским (+/- 3% для толщины)

Результат на верхнюю границу вероятности примеси для разных масс



Проверки

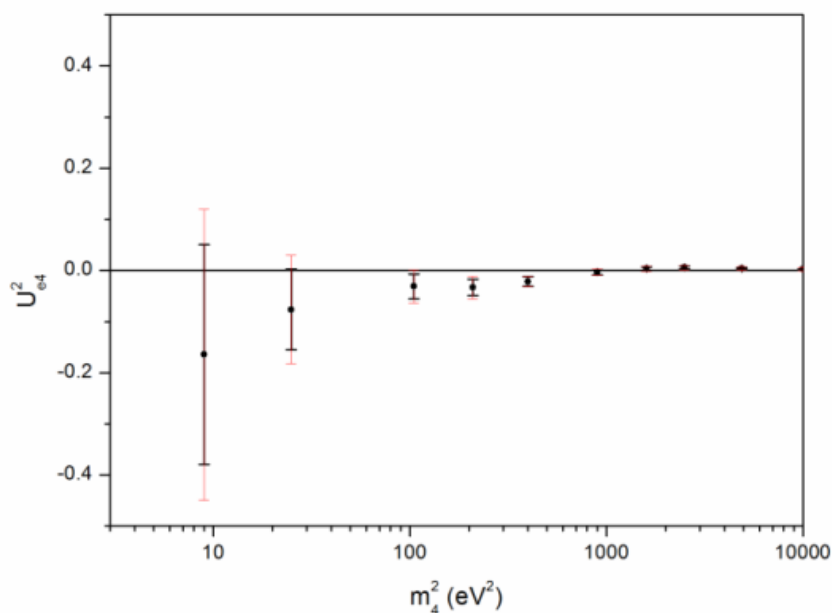
- Прodelать аналогичный анализ с помощью функции правдоподобия для **активного (лёгкого электронного нейтрино)** и сравнить с полученным ранее результатом стандартным методом фитирования:



Получаем $\sqrt{4.35} = 2.08 \text{ eV}$, что близко к опубликованной величине 2.12 эВ в Байесовском подходе (По Ф.К. $m < 2.05$ эВ)

Проверки

- Проведение стандартного фита спектра MINUIT-ом. Во многих точках фит даёт отрицательное значение.

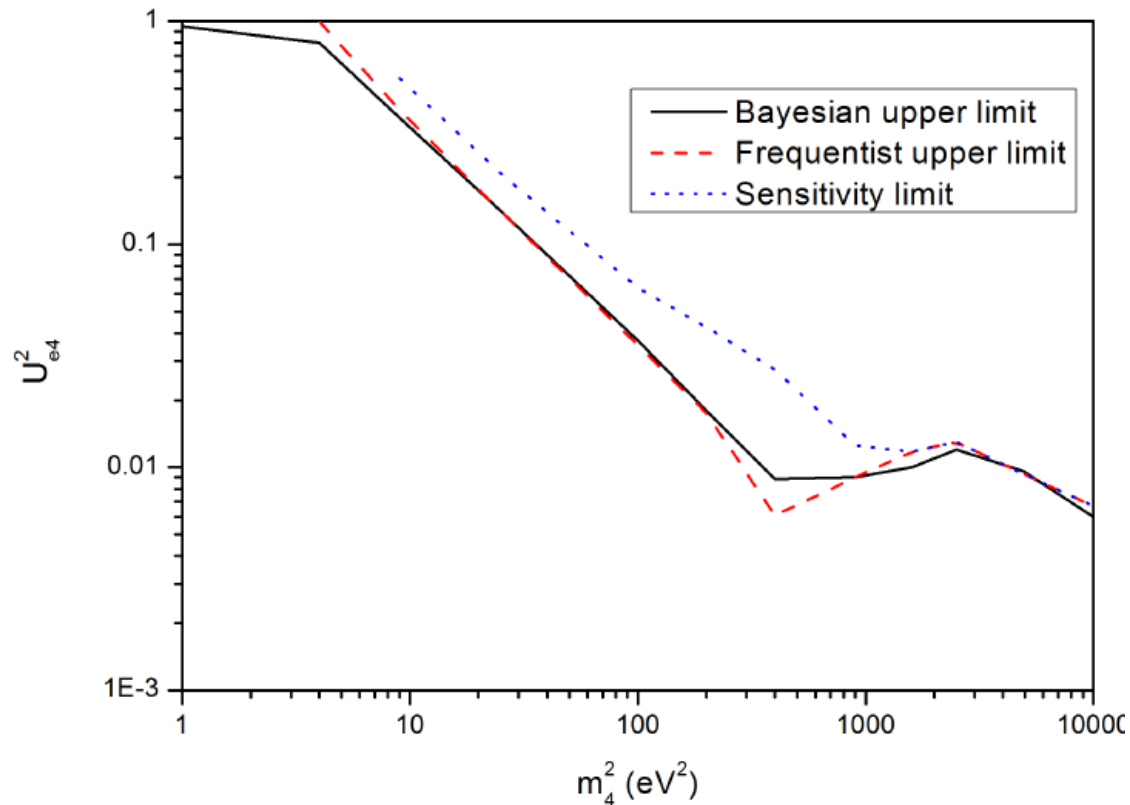


Взяты консервативные
оценки систематики

Надо использовать таблицу по
Фельдману- Козинсу, все значения в
«сигмах»:

x_0	68.27% C.L.	90% C.L.	95% C.L.
-0.6	0.00, 0.49	0.00, 1.10	0.00, 1.41
-0.5	0.00, 0.56	0.00, 1.18	0.00, 1.49
-0.4	0.00, 0.64	0.00, 1.27	0.00, 1.58
-0.3	0.00, 0.72	0.00, 1.36	0.00, 1.67
-0.2	0.00, 0.81	0.00, 1.45	0.00, 1.77
-0.1	0.00, 0.90	0.00, 1.55	0.00, 1.86
0.0	0.00, 1.00	0.00, 1.64	0.00, 1.96

Результат прямого фита



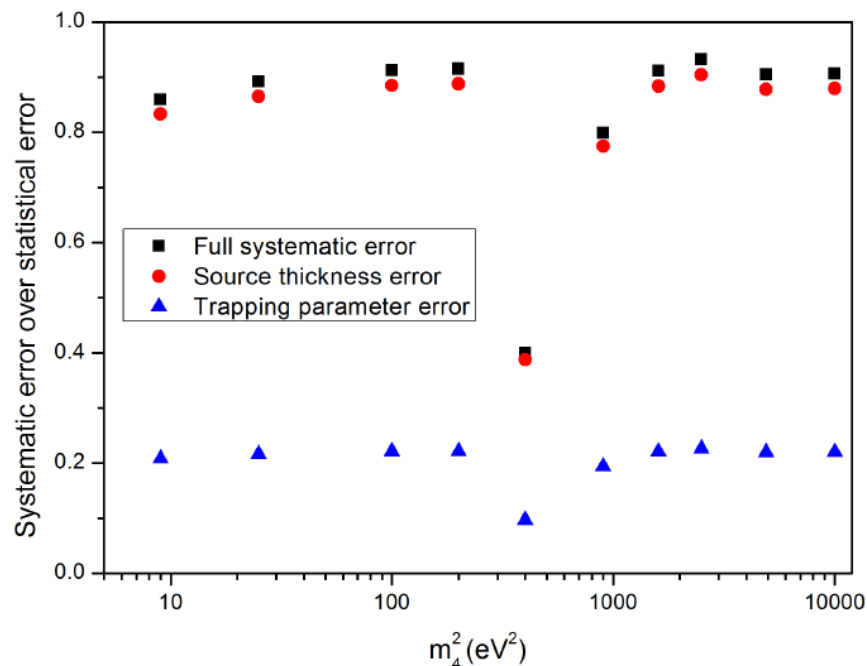
Кривые:

1. Байесовский подход максимального правдоподобия и с консервативной оценкой систематики;
2. Прямой фит + Ф-К
3. **Предел чувствительности** – это когда точка сдвигается из минуса в ноль, а ошибка остаётся той же:

Предел = $1.96 \cdot \sigma$

Вопрос – насколько систематическая ошибка меняет результат?

Отношение **консервативной** систематической ошибки к статистической:



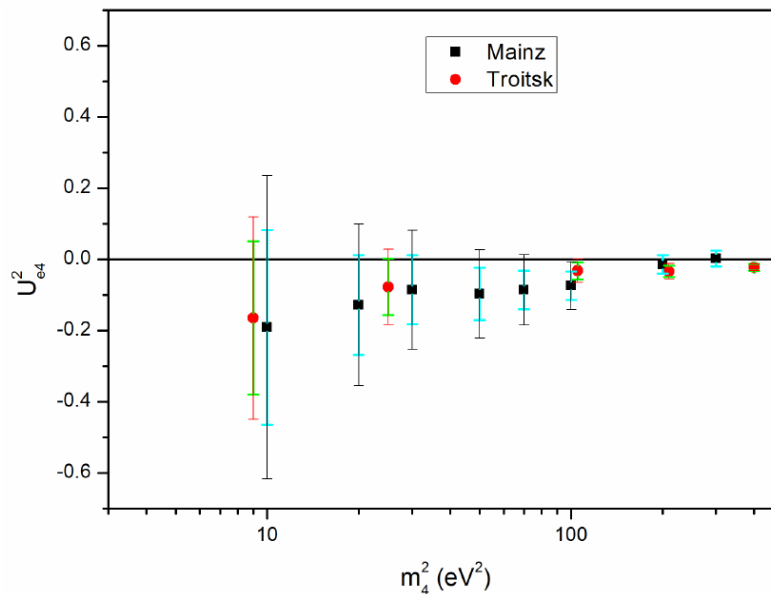
С консервативной ошибкой величина увеличивается максимум в

$$\sqrt{1+0.9^2} = \sqrt{1.81} = 1.35$$

Чтобы увеличить полную ошибку в 2-3 раза, систематика должна увеличиться в 1.7 – 3 раза

Различия с Майнцом

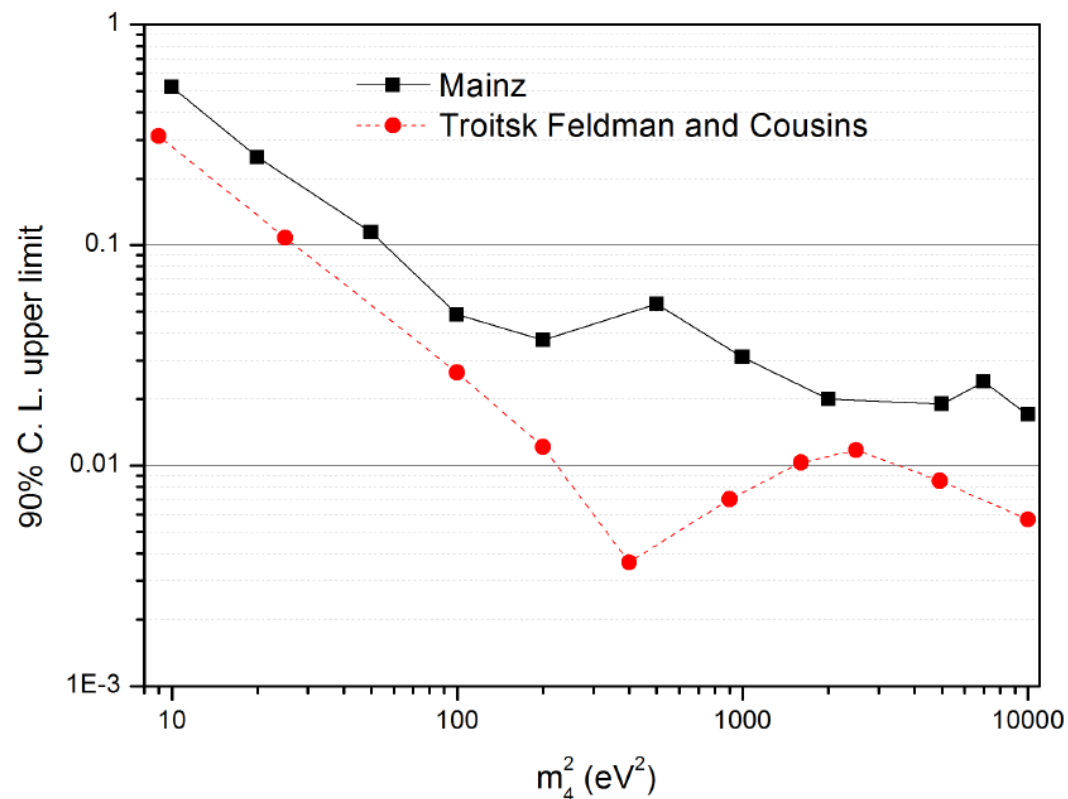
- Используем процедуру как у них - прямого фитирования (см. 3 слайда выше),
- «Снимаем» точки с ошибками из их публикации



На взгляд точки и ошибки
близки... У нас везде
лучше.

Делаем по-честному
прямое сравнение с
использованием таблицы
по Ф.-К.

Используем 90% доверительный интервал, как в статье Майнц:



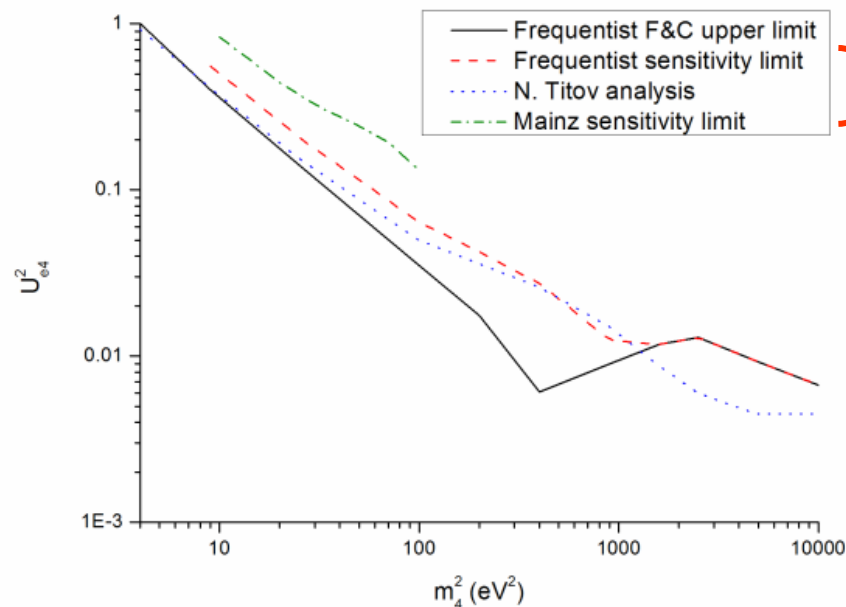
Отличие примерно в 2 раза и больше сохраняется даже с консервативной оценкой систематики

Причины – у нас лучше статистика и совсем другая систематика для больших масс

Apples to apples, oranges to oranges

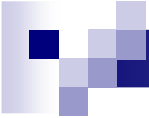
Ещё раз напомним используемые понятия:

- Подходы по Байесу и по Фельдману- Козинсу. Дают близкие результаты, Байес чуть консервативнее - пределы выше
- Используется также «предел чувствительности» = «**statistical limit**» = «**sensitivity limit**» . Это когда величина получается нефизически отрицательная, но её сдвигают в ноль



В модели Н. Титова использовался «**statistical limit**».

Если всё привести к единому смыслу, то нет противоречия, а Майнц по-прежнему в 2 раза хуже



Выводы

- Показаны все шаги обработки с помощью функции максимального правдоподобия; удаётся избежать проблему нефизических отрицательных значений
- Описана процедура получения систематических ошибок
- Анализ полученных данных позволяет установить верхние пределы на массу и примесь 4-го нейтрино
- Обработка предложенной методикой для массы **активного электронного нейтрино** даёт отличное согласие с опубликованным результатом
- Получено хорошее согласие с методом прямого фитирования спектров
- Сравнение с результатами в Майнц даёт фактор **2** лучшее ограничение даже с консервативной оценкой систематических ошибок.



backup

Мы заявляли о работе над стерильными нейтрино на KATRIN (доклад Д. Ещенко) ещё в марте 2011....

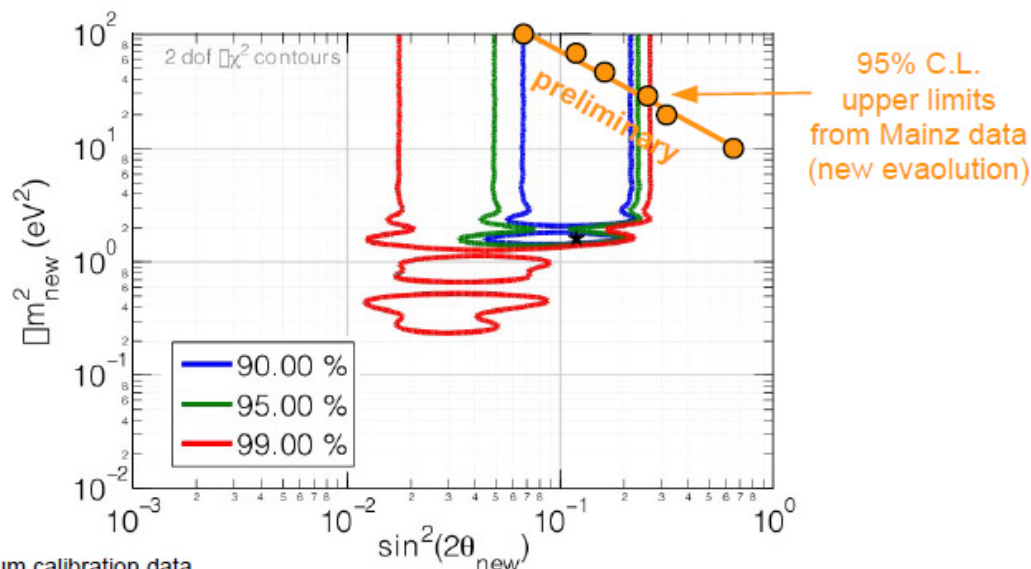
Майнц уже проводит обработку своих старых спектров: октябрь 2011:



Sterile neutrino limits from the Mainz Neutrino Mass Experiment

Do same analysis (same data sets, same programs, same way to treat systematic uncertainties)
on Mainz phase 2 data as in Ch. Kraus et al., Euro. Phys. J. C40 (2005) 447
now only small mass region with more fits and a bit different evaluation program

Слайд с выступления
Christian Weinheimer
на коллаборационном
митинге KATRIN,
октябрь 2011



reactor + gallium calibration data
from G. Mention et al., arXiv:1101.2755

(work by Ch. Kraus, A. Singer, K. Valerius, ChW)

Summary of KATRIN results

Попытка использовать данные Троицка для оценки ограничений на стерильные нейтрино:

Carlo Giunti and Marco Laveder, arxiv:1005.4599

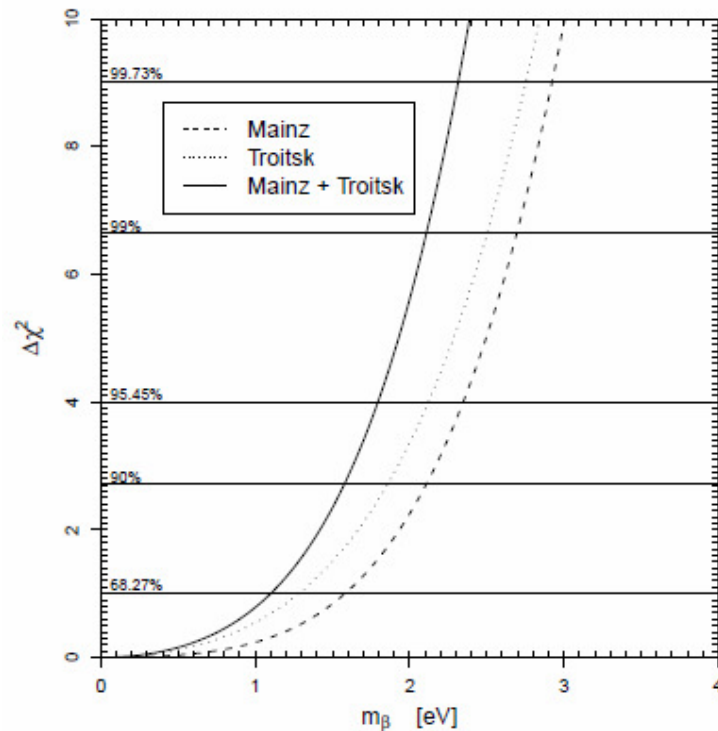
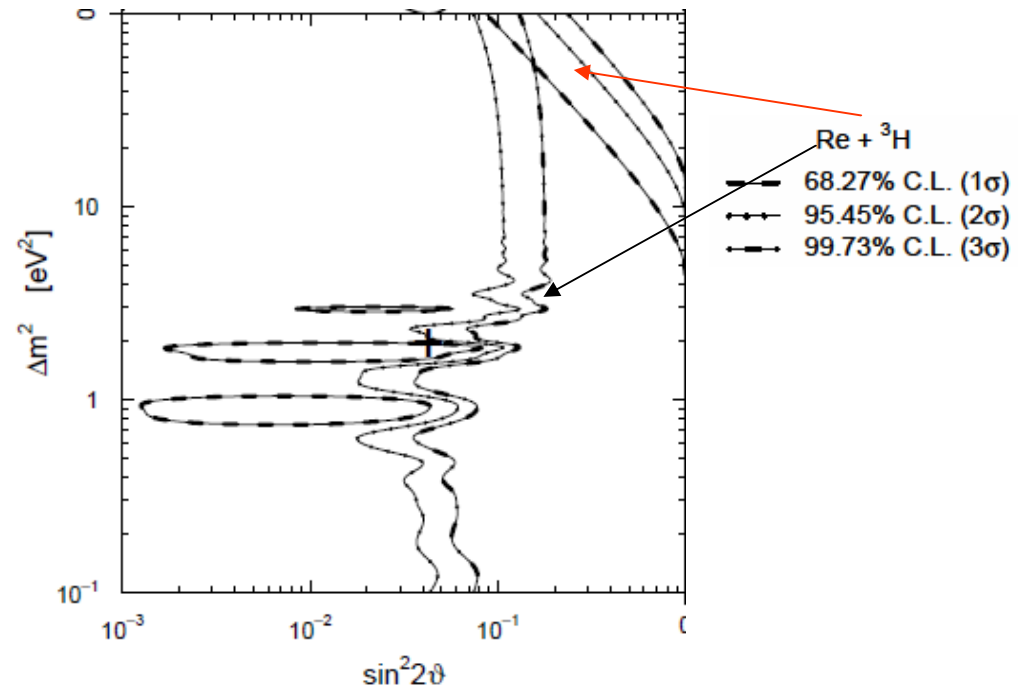
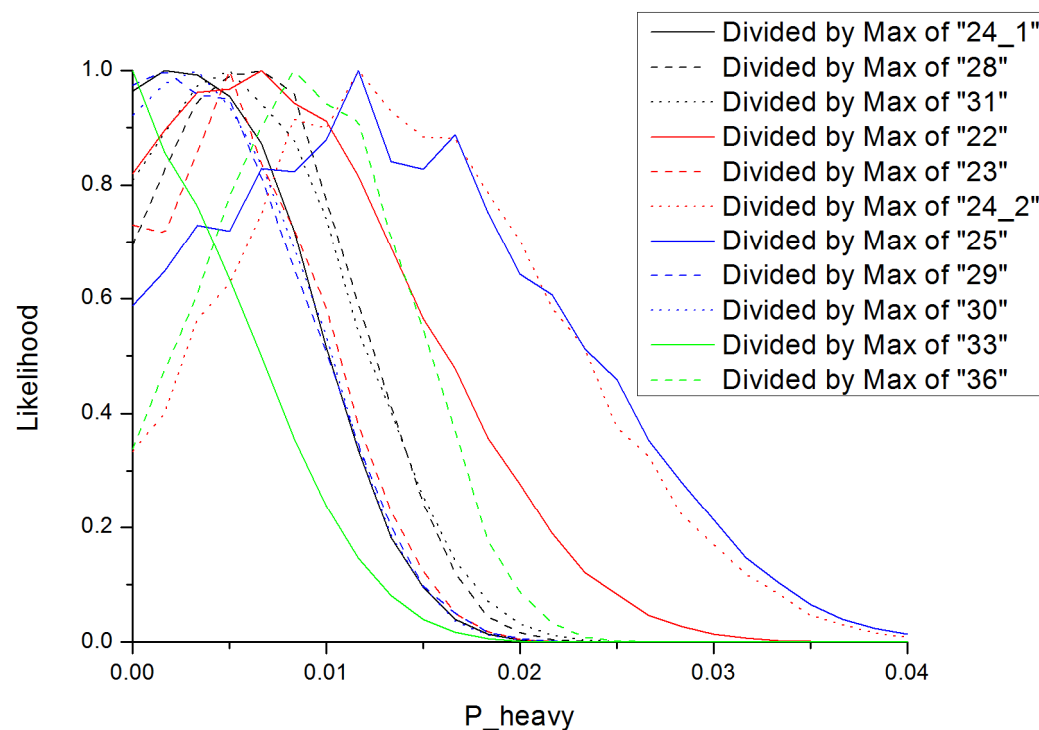


FIG. 5. $\Delta\chi^2$ as a function of m_β . The horizontal lines correspond to the indicated value of confidence level. The dashed and dotted lines have been obtained, respectively, from the results in Eqs. (20) and (21) of the Mainz and Troitsk Tritium β -decay experiments. The solid line is the result of the combined fit.



Сопоставление
реакторных данных и по
распадам трития

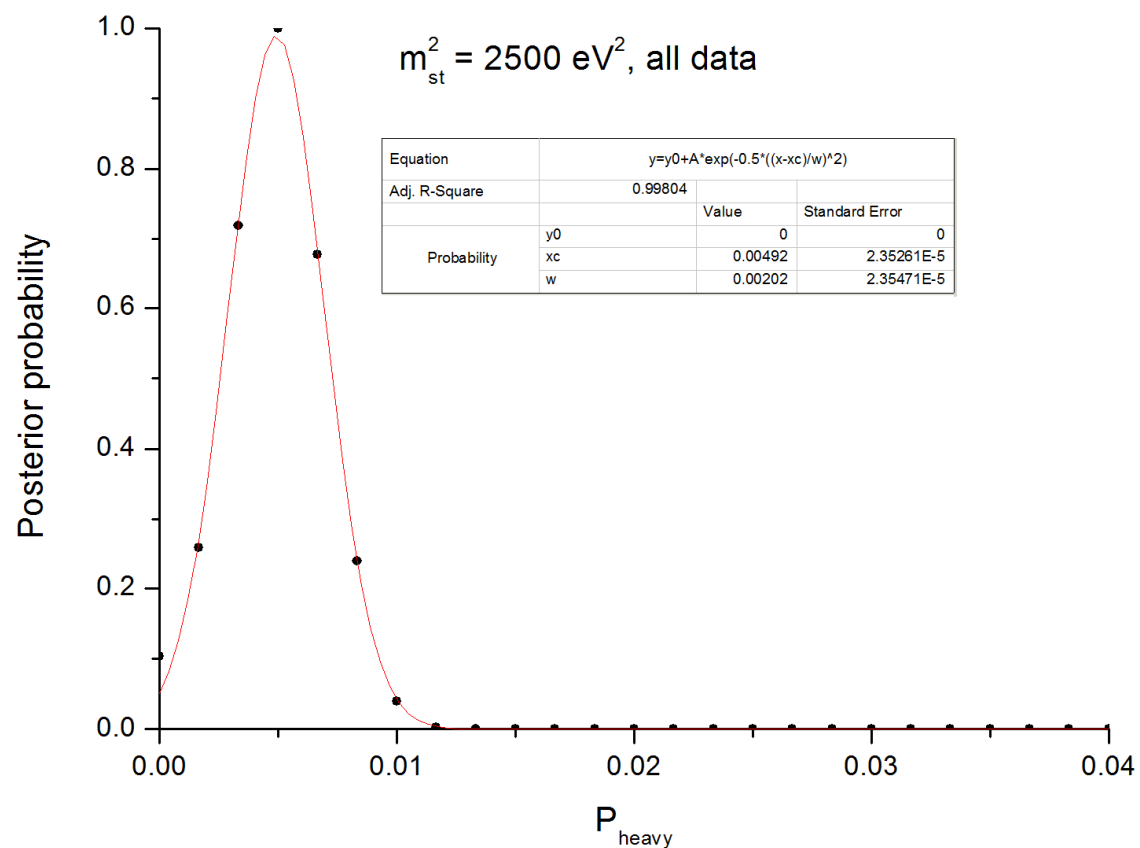
Проблема при массе около 50 эВ:
функции правдоподобия не стремятся в ноль, а дают
значимое значение P_{heavy}



Функция ПП для
разных сеансов
при $m_{\text{heavy}}=50$ эВ

Уменьшение толщины источника только усиливает эффект

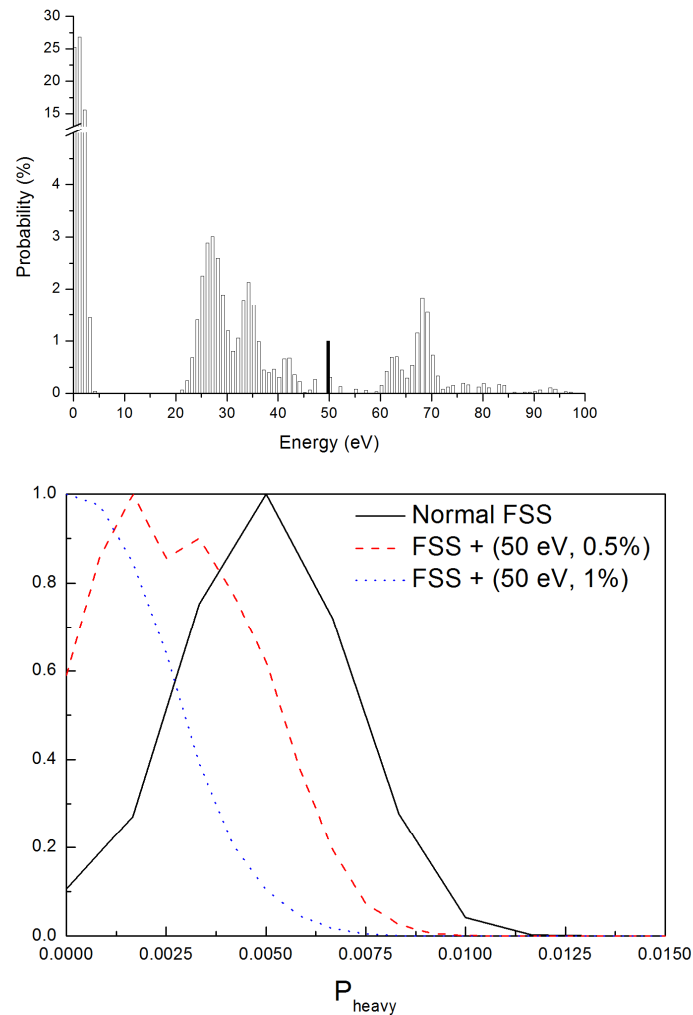
Суммирование по всем файлам:



На уровне нашей чувствительности появление такого вклада не влияет на **опубликованную** оценку квадрата массы электронного нейтрино

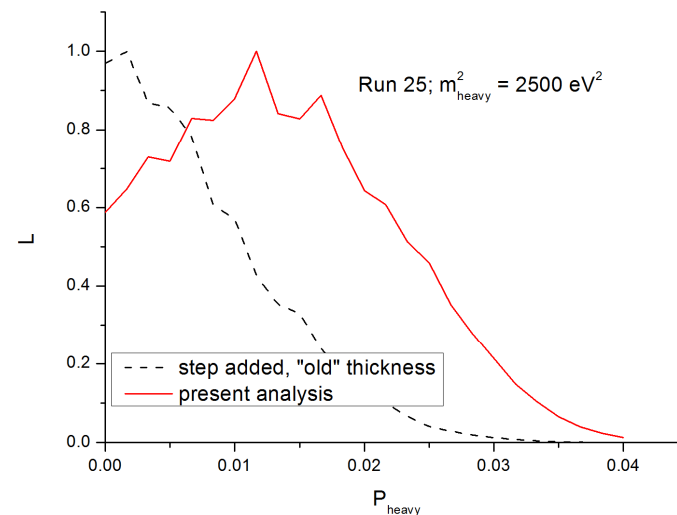
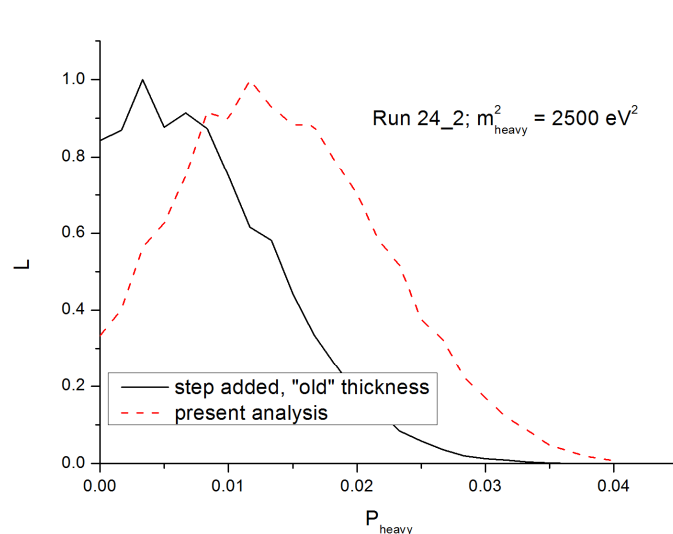
Семинар ОЭФ 11 июня 2013 г.

В принципе, известна систематика, которая может убрать пик при 50 эВ – это добавление линии в спектр конечных состояний



ДФ 11 июня 2013 г.

В качестве проверочного упражнения: задать параметры источника трития как в предыдущей обработке (уменьшенная толщина) и добавить «ступеньку»



Пик на 50 эВ уходит...

Семинар ОЭФ 11 июня 2013 г.

... но появляется другой на 5 эВ
(это в дополнение, поверх «ступеньки»)

