Построение доверительных интервалов с учётом априорной информации

А.Лохов, Ф.Ткачёв

(ИЯИ РАН)

27 февраля 2014

План доклада

- Постановка проблемы
- Неймановские доверительные интервалы. Непрерывный и дискретный случаи
- Два пути решения. Примеры решений
- Корректное построение: метод предела чувствительности
- Софт

Априорная информация о параметрах

$$m_\nu^2 \geq 0$$

Физическое ограничение

$$\tilde{m}_\nu^2 < 0$$

Экспериментальная оценка

Как сделать корректную интервальную оценку неотрицательного параметра?

$$m_\nu^2$$

Априорная информация о параметрах

Пуассоновский процесс с фоном

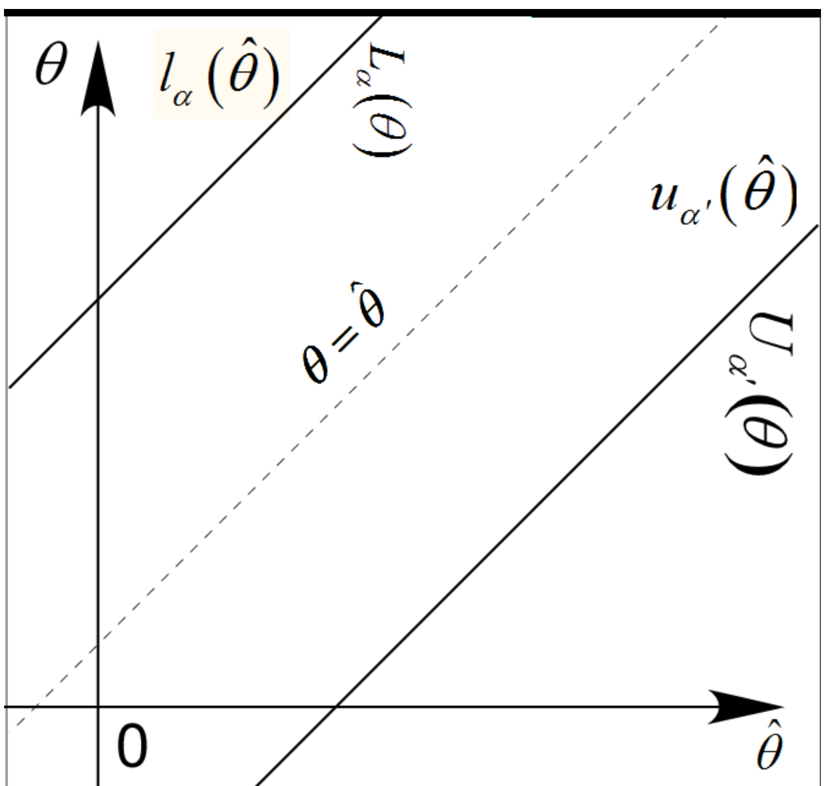
$$P_{\mu,b}(n) = \frac{(\mu + b)^n}{n!} e^{-(\mu+b)}$$

Как построить доверительный интервал для сигнала с учётом известного фона?

Неймановское построение доверительных интервалов. Непрерывные распределения

$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$ - оценка для неизвестного параметра θ

$P_\theta\left(\hat{\theta}\right)$ $\quad \mathrm{P}\left(-\infty < \hat{\theta} < L_\alpha(\theta)\right) = \alpha, \quad \mathrm{P}\left(U_{\alpha'}(\theta) < \hat{\theta} < +\infty\right) = \alpha'$



$$\mathrm{P}\left(l_\alpha(\hat{\theta}) < \theta\right) = \alpha, \quad \mathrm{P}\left(\theta < u_{\alpha'}(\hat{\theta})\right) = \alpha'$$

$$\alpha_0 = 1 - (\alpha + \alpha')$$

доверительная вероятность

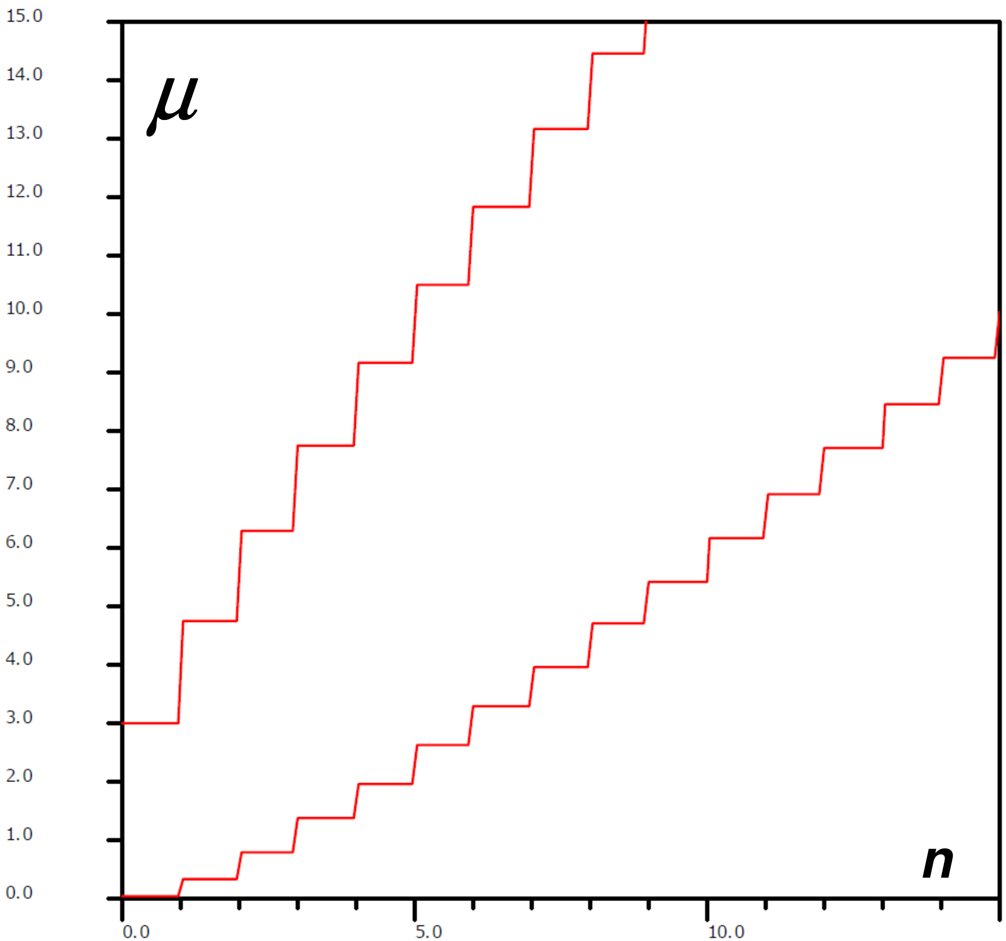
$$\alpha_0 \cdot 100\% = CL, \quad (90\%, 95\%, 99\%\ldots)$$

доверительный уровень

Свобода выбора $\alpha, \ \alpha'$

Неймановское построение доверительных интервалов. Дискретные распределения

$$P\left(\mu_0 \in \left[\mu_1, \mu_2\right]\right) = \alpha \quad \longrightarrow \quad P\left(\mu_0 \in \left[\mu_1, \mu_2\right]\right) \geq \alpha$$



$$P_\mu\left(n \in \left[n_1(\mu), n_2(\mu)\right]\right) \geq \alpha$$

$$P_\mu(n) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}$$

90% C.L доверительные интервалы для параметра пуассоновского распределения

Два подхода к учёту априорной информации

При построении доверительной области:

- Feldman, Cousins
- CCGV (Power-Constrained limits)

При выбор оценки:

- Mandelkern, Schultz
- Метод предела чувствительности

Рецепт Фельдмана и Казинса

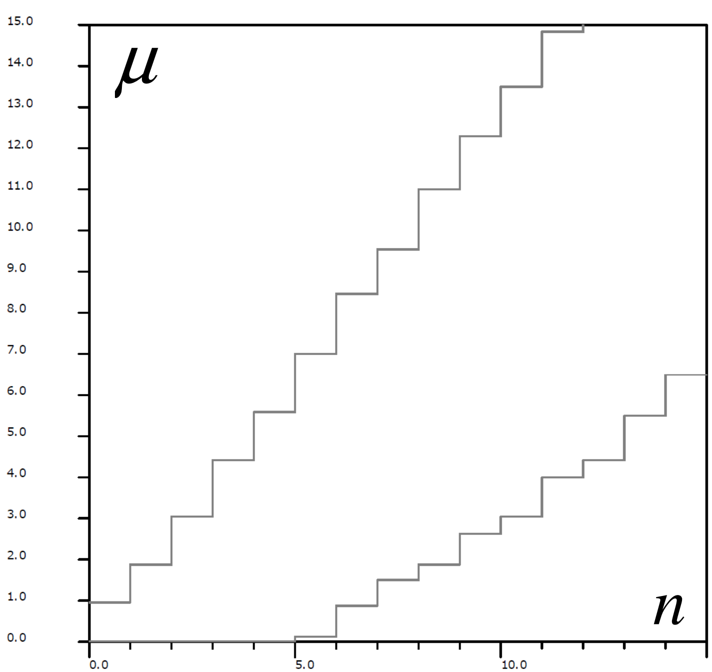
(на примере пуассоновского процесса с фоном)

Построение доверительной области определяется отношением правдоподобий

$$R(n) = \frac{P(n \mid \mu_1)}{P(n \mid \mu_{best})}$$

$P(n \mid \mu_1)$ - вероятность зарегистрировать ***n*** событий при $\mu = \mu_1$

$$\mu_{best} = \max(0, n-b)$$



Точки *n* добавляются в доверительную область в порядке убывания соответствующего

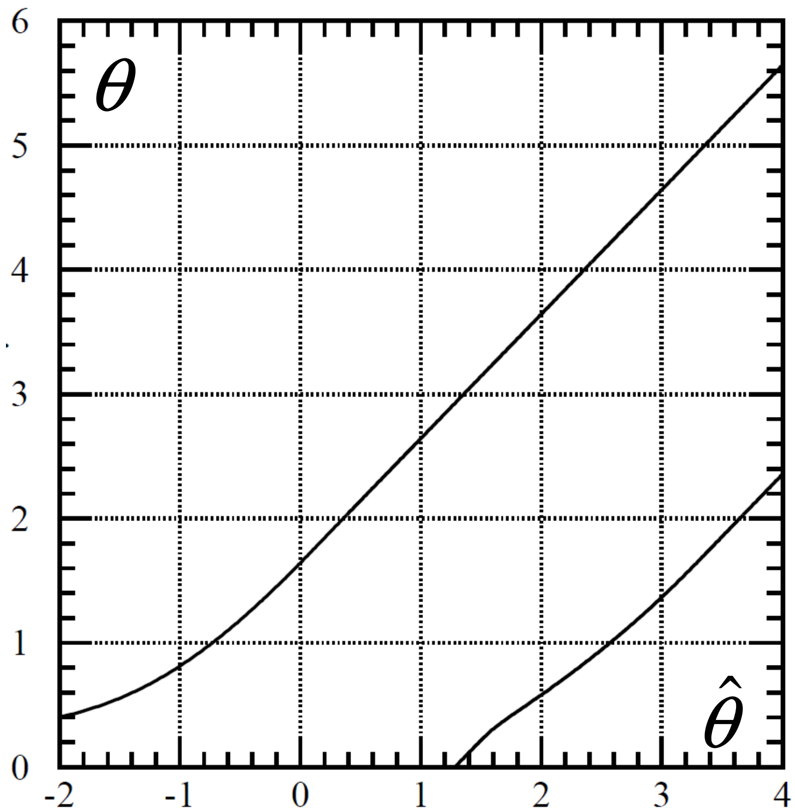
Система доверительных интервалов (CL 90%) для пуассоновского сигнала μ с известным фоном *b=3*

Рецепт Фельдмана и Казинса

(для нормального распределения с неотрицательным средним)

Построение доверительной области определяется отношением правдоподобий

$$R\left(\hat{\theta}\right) = \frac{P\left(\hat{\theta} \mid \theta\right)}{P\left(\hat{\theta} \mid \theta_{best}\right)} \qquad \theta_{best} = \max\left(0, \hat{\theta}\right)$$



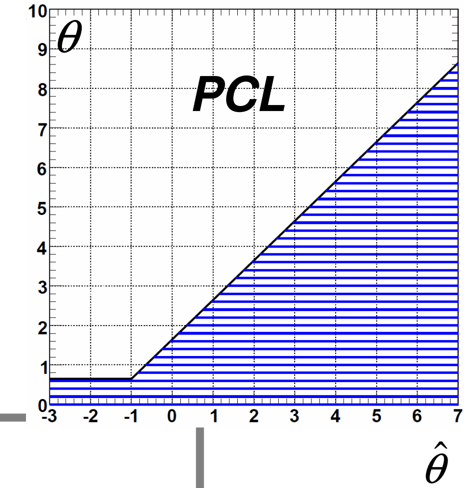
$$P_{\hat{\theta}}\left(\theta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2}{2}}$$

$$\theta \geq 0$$

Система доверительных интервалов для (CL 90%) неотрицательной величины θ. Оценка для θ имеет нормальное распределение.

Как сравнивать результаты?

Другие варианты



• **Power-Constrained limits**

• построение доверительной области основано на функции мощности

• интервалы содержат **перекрывание**: вероятностное содержание доверительной области превышает заданное значение доверительной вероятности

• **Конструкция Манделькерна и Шульца**

• в основе – идея об использовании априорной информации при выборе оценки

• ограниченность методом максимального правдоподобия

•некоторая искусственность

Метод предела чувствительности

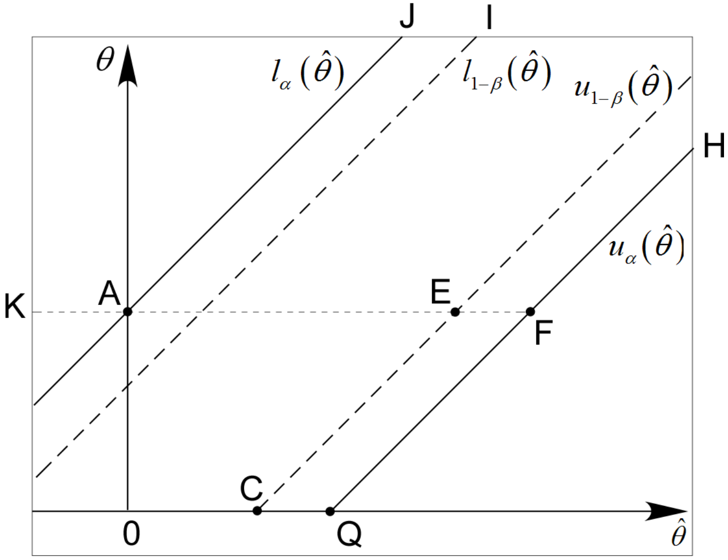
- даёт явную формулу для оценки
- для «нефизических» значений оценки совпадает с эмпирическим рецептом предела чувствительности
- даёт систему доверительных интервалов, построенную строго в рамках неймановской процедуры

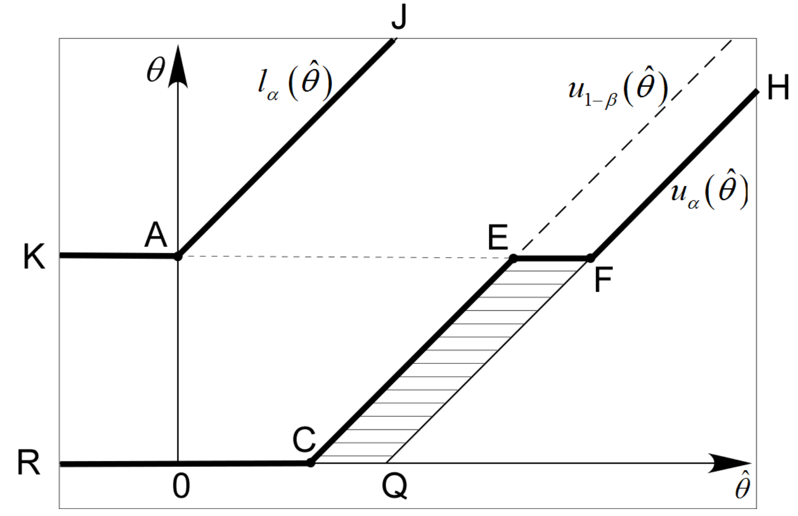
Метод предела чувствительности
(в непрерывном случае)

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$$ с учетом условия $$\theta \geq 0$$

$$\boxed{\tilde{\theta} = \max\left(\hat{\theta}, 0\right)}$$

Tkachov, 2009





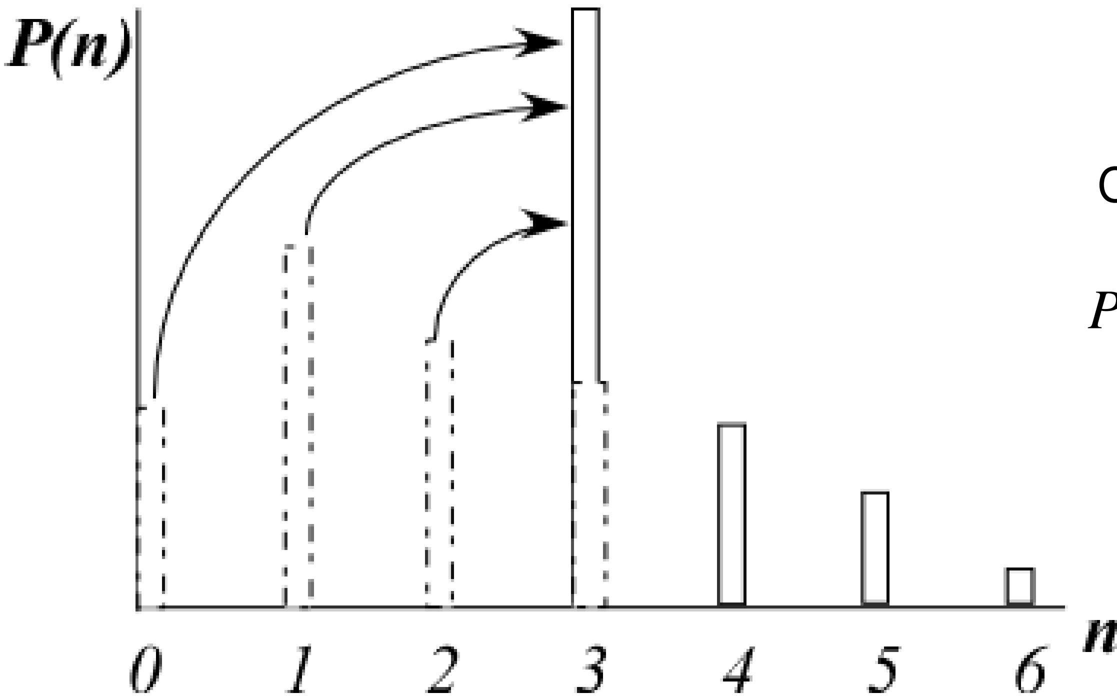
Метод предела чувствительности

(для пуассоновского процесса с фоном)

$$P_\mu(n) = \frac{(\mu+b)^n}{n!} e^{-(\mu+b)}$$

полагаем, что величина *b* известна

$$\boxed{\widetilde{(\mu+b)} = \max(n,b)}$$



Тогда при *n>b* число событий *n* будет измерено с вероятностью

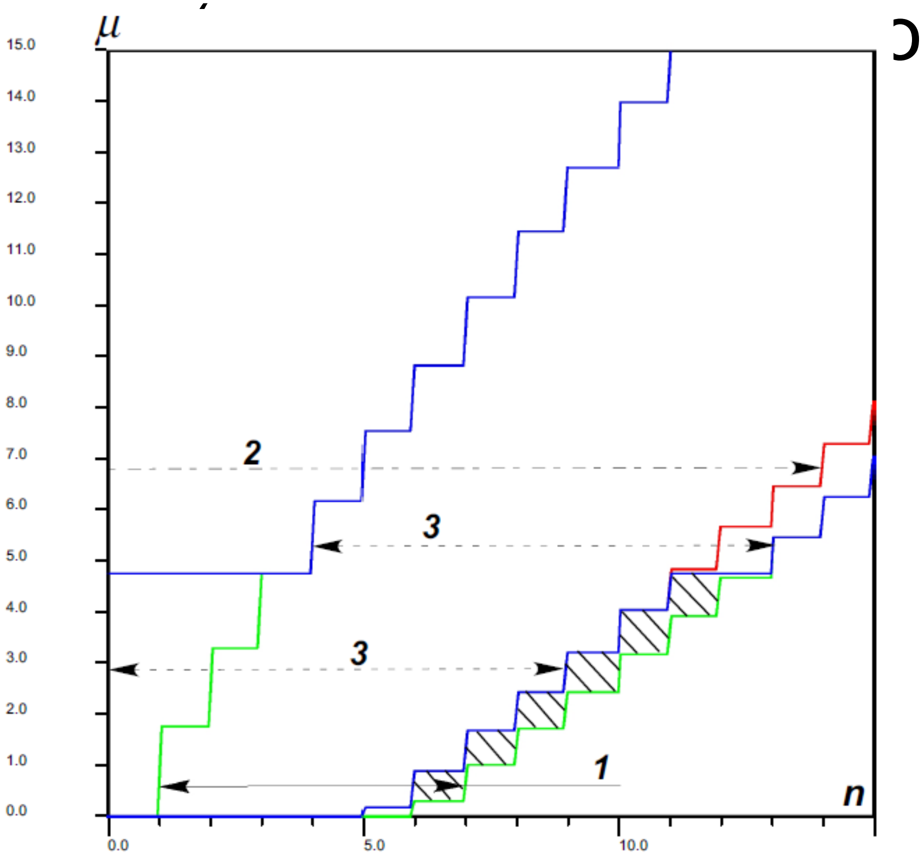
$$P_\mu(n) = \frac{(\mu+b)^n}{n!} e^{-(\mu+b)}$$

С вероятностью

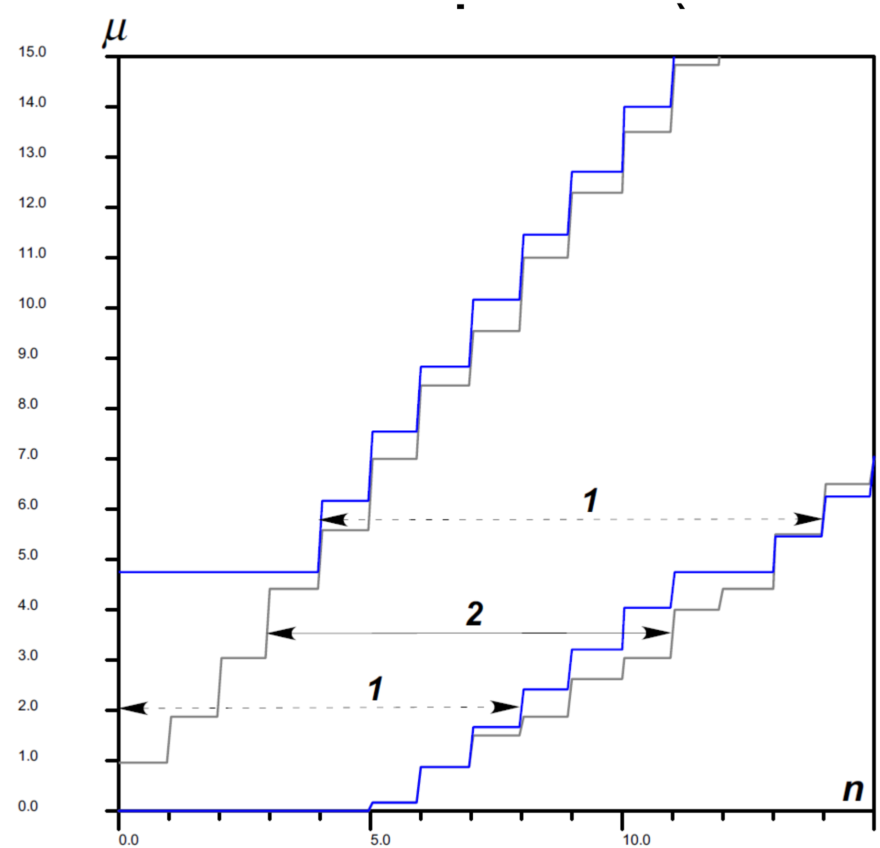
$$P(n \le b) = \sum_{n=0}^{[b]} \frac{(\mu+b)^n}{n!} e^{-(\mu+b)},$$

будет получена оценка, равная величине фона *b*

Метод предела чувствительности



+ стандартные интервалы



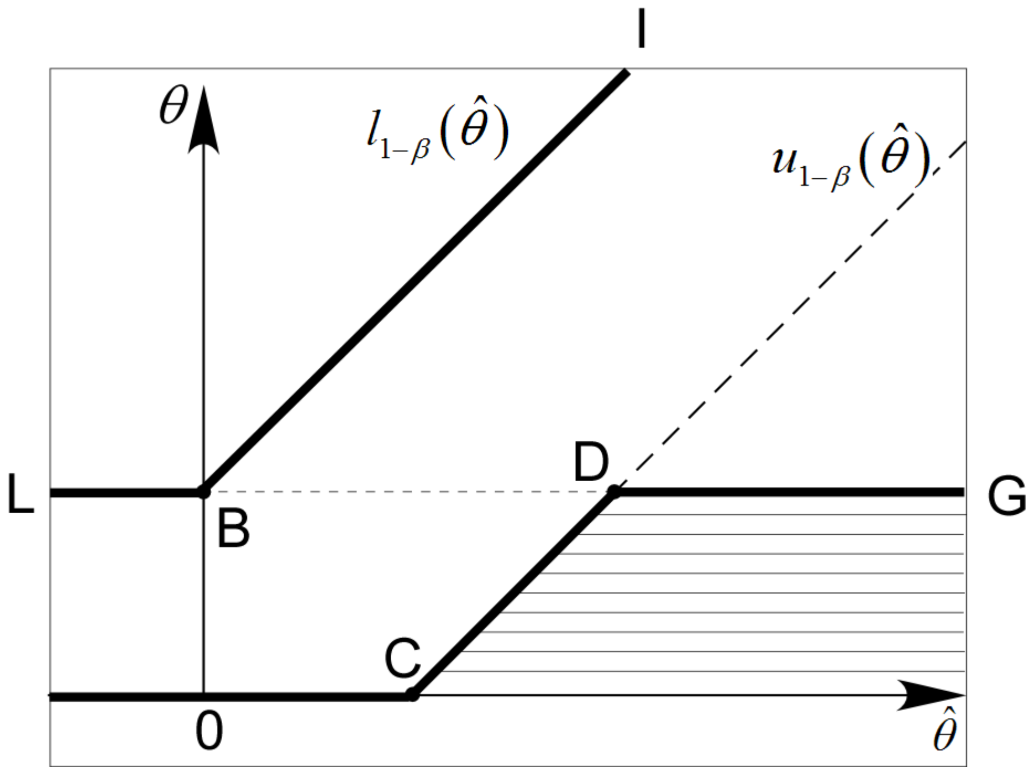
+ рецепт Фельдмана и Казинса

Метод предела чувствительности

(в непрерывном случае)

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$$ с учетом условия $$\theta \geq 0$$

$$\boxed{\tilde{\theta} = \max\left(\hat{\theta}, 0\right)}$$

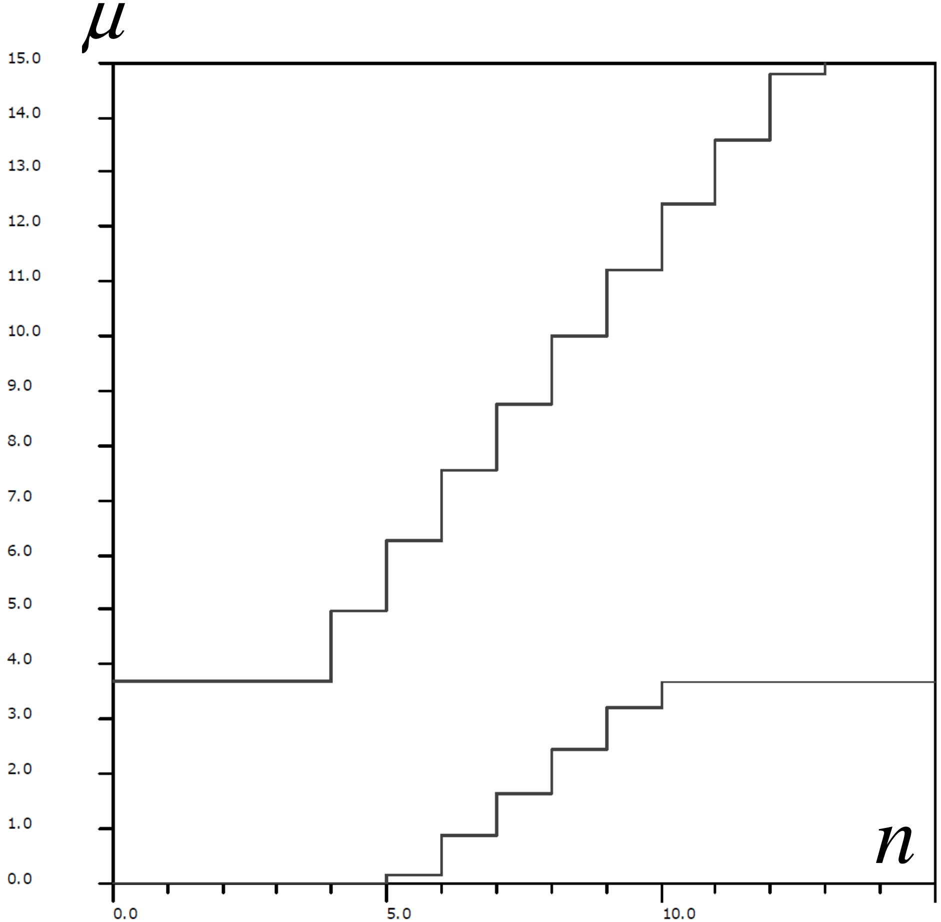


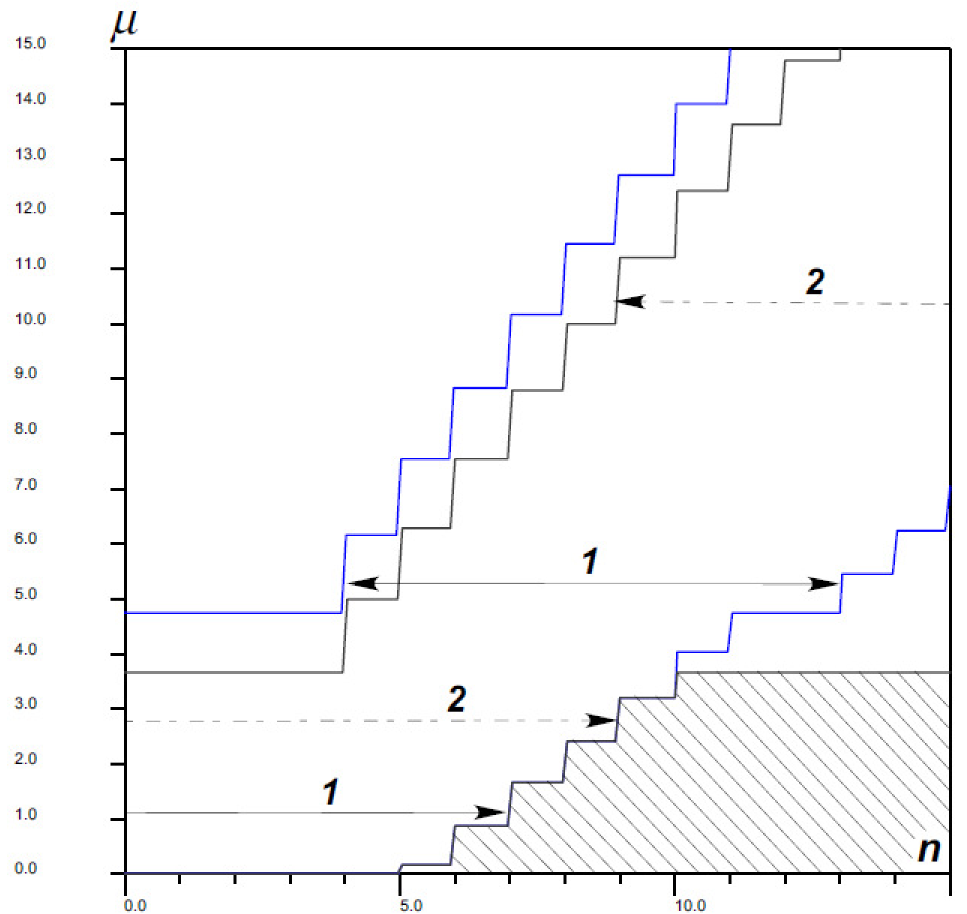
Наилучший верхний предел

- вероятностное содержание соответствует доверительной вероятности
- сохраняется нижняя граница
- верхняя граница интервала – наименьшая из возможных

Метод предела чувствительности
(для пуассоновского процесса с фоном)

Построение **наилучшего верхнего предела** с учётом информации о фоне





Выводы

- важнейшее свойство метода предела чувствительности – сравнимость результатов
- оценивание устойчиво для нефизических значений оценки
- в случае дискретных распределений решается проблема меньшего, чем ожидаемый фон, числа зарегистрированных событий

Выводы

- в рамках метода предела чувствительности возможно построение наилучшего верхнего предела для параметра. При этом перекрывание (избыток вероятностного содержания в доверительной области) минимально
- в дискретном случае возможны различные варианты построения доверительных интервалов – в зависимости от конкретных требований (симметричность, ограничение сверху или снизу и т.д.)
- разработан софт для расчёта значений доверительных интервалов и рисования соответствующих доверительных поясов