

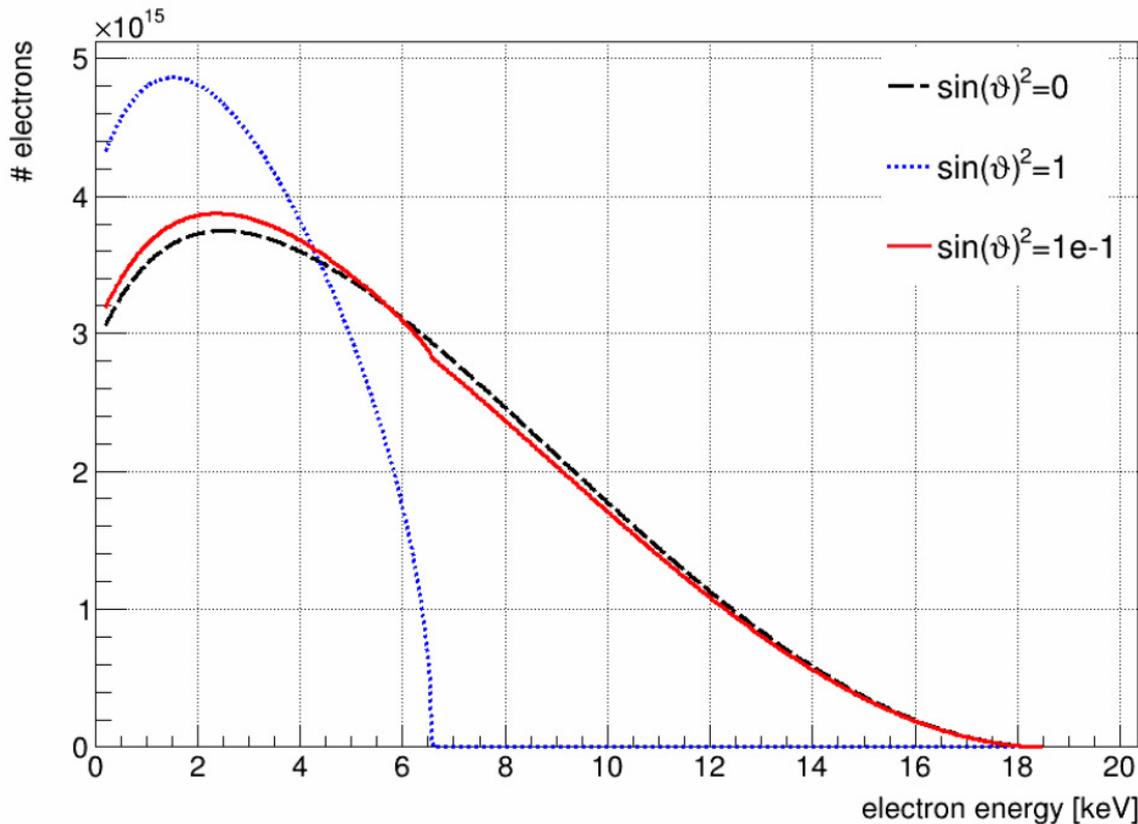
Применение вейвлет-
анализа для поиска
особенностей в
экспериментальных
спектрах
(разбор работы Dolde&Korzeczek)

Алексей Лохов

(ЛИРП ОЭФ ИЯИ РАН)

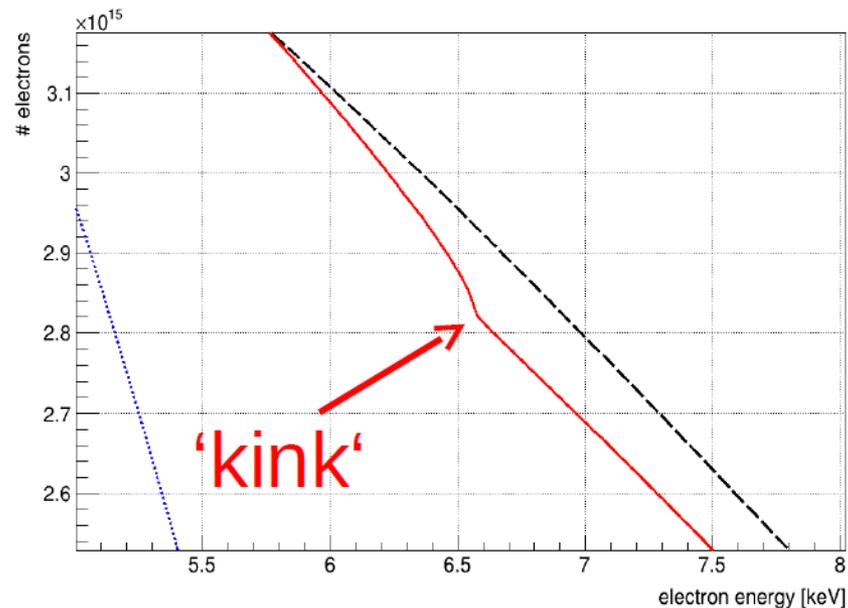
Аномальный вклад от тяжёлых нейтрино

$$\frac{d\Gamma}{dE} = \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\Gamma}{dE} \right)_{m_{keV}} + \cos^2 \vartheta \left(\frac{d\Gamma}{dE} \right)_{m_{light}}$$



Аномальный вклад от тяжёлых нейтрино

$$\frac{d\Gamma}{dE} = \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\Gamma}{dE} \right)_{m_{keV}} + \cos^2 \vartheta \left(\frac{d\Gamma}{dE} \right)_{m_{light}}$$



Как искать?

Надо сделать вывод о наличии, либо отсутствии особенности

Построение статистического критерия для кинка:

- прямое фитирование с дополнительными параметрами (масса тяжёлого нейтрино и синус угла смешивания)
- сканирование с помощью «окна» - поиск излома (S.Mertens)
- вейвлет-анализ спектра (предложено Kai Dolde и Marc Korzeczek)
- выделение степенных зависимостей (Г.Н. Вялов)
- построение стат. критерия для вклада тяжёлого нейтрино с учётом неопределённостей других параметров спектра (например, на основе метода квазиоптимальных весов)

Как искать?

Надо сделать вывод о наличии, либо отсутствии особенности

Построение статистического критерия для кинка:

- вейвлет-анализ спектра (предложено Kai Dolde и Marc Korzeczek)

Преобразование Фурье и вейвлет-преобразование

Непрерывное преобразование Фурье

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Непрерывное вейвлет-преобразование

$$W(s, \tau) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int f(t) \Psi^* \left(\frac{t - \tau}{s} \right) dt$$

Преобразование Фурье и вейвлет-преобразование

Дискретное преобразование Фурье

$$\{x_i\} \rightarrow \{X_k\} \quad X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-i2k \cdot n/N}$$

$$\omega^{nk} = e^{-i2k \cdot n/N} \quad X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot \omega^{nk}$$

Преобразование Фурье и вейвлет-преобразование

Дискретное вейвлет-преобразование

$(x_0 \quad \dots \quad x_{2N+1})$ — сигнал (в случае тритиевого спектра — число (count) электронов)

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_{2N+1} \end{pmatrix} \times T = \begin{pmatrix} s_0 \\ d_0 \\ \dots \\ s_N \\ d_N \end{pmatrix}$$

$(s_0 \quad \dots \quad s_N)$ — сглаженный сигнал

$(d_0 \quad \dots \quad d_N)$ — детали спектра, мощность отфильтрованных высоких частот

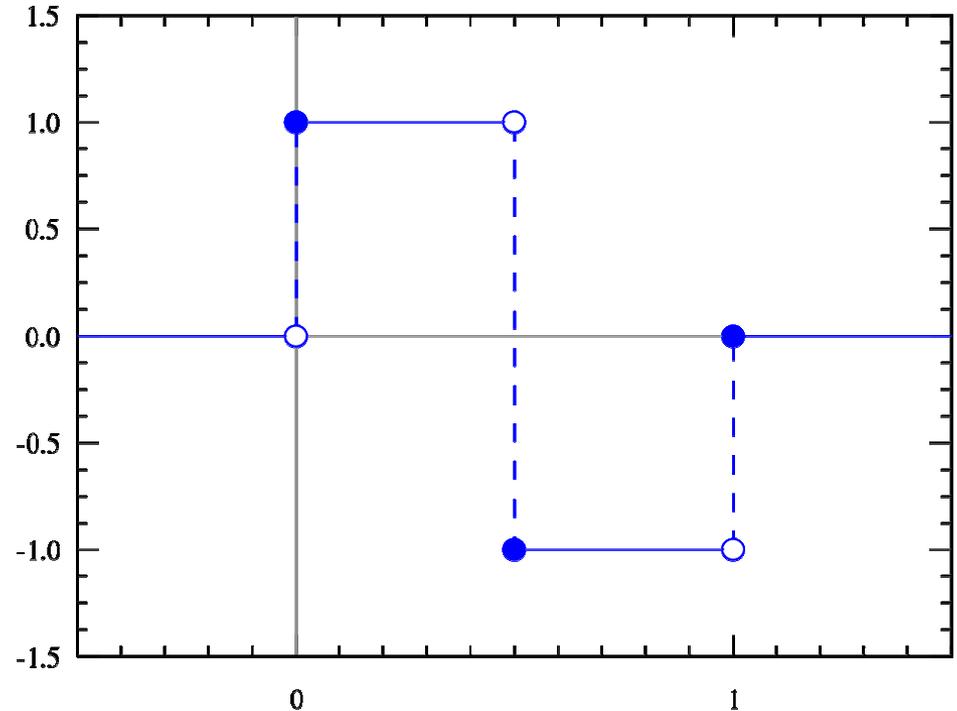
Вейвлеты Хаара

Wavelet function

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & t \notin [0, 1) \end{cases}$$

Scaling function

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \notin [0, 1) \end{cases}$$



Вейвлеты Хаара

Ортогональные вейвлеты

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \phi(2t - k)$$

$(h_0 \dots h_{N-1})$ –
scaling function coefficients

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k \phi(2t - k)$$

$(g_0 \dots g_{N-1})$ –
wavelet function coefficients

Вейвлеты Хаара

$$N=2$$

$$h_0 = 1, h_1 = 1; \quad g_0 = 1, g_1 = -1;$$

Матрица преобразования Хаара

$$H_2 = \text{norm} \begin{pmatrix} h_0 & h_1 \\ g_0 & g_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$H_2 H_2^T = I, H_2^{-1} = H_2^T$$

Вейвлеты Хаара

Схема преобразования сигнала $\{x_j\}$

$$H_2 \cdot \left\{ (x_0, x_1) \quad \dots \quad (x_{2N}, x_{2N+1}) \right\}^T \rightarrow \left\{ (s_0, d_0) \quad \dots \quad (s_N, d_N) \right\}^T$$

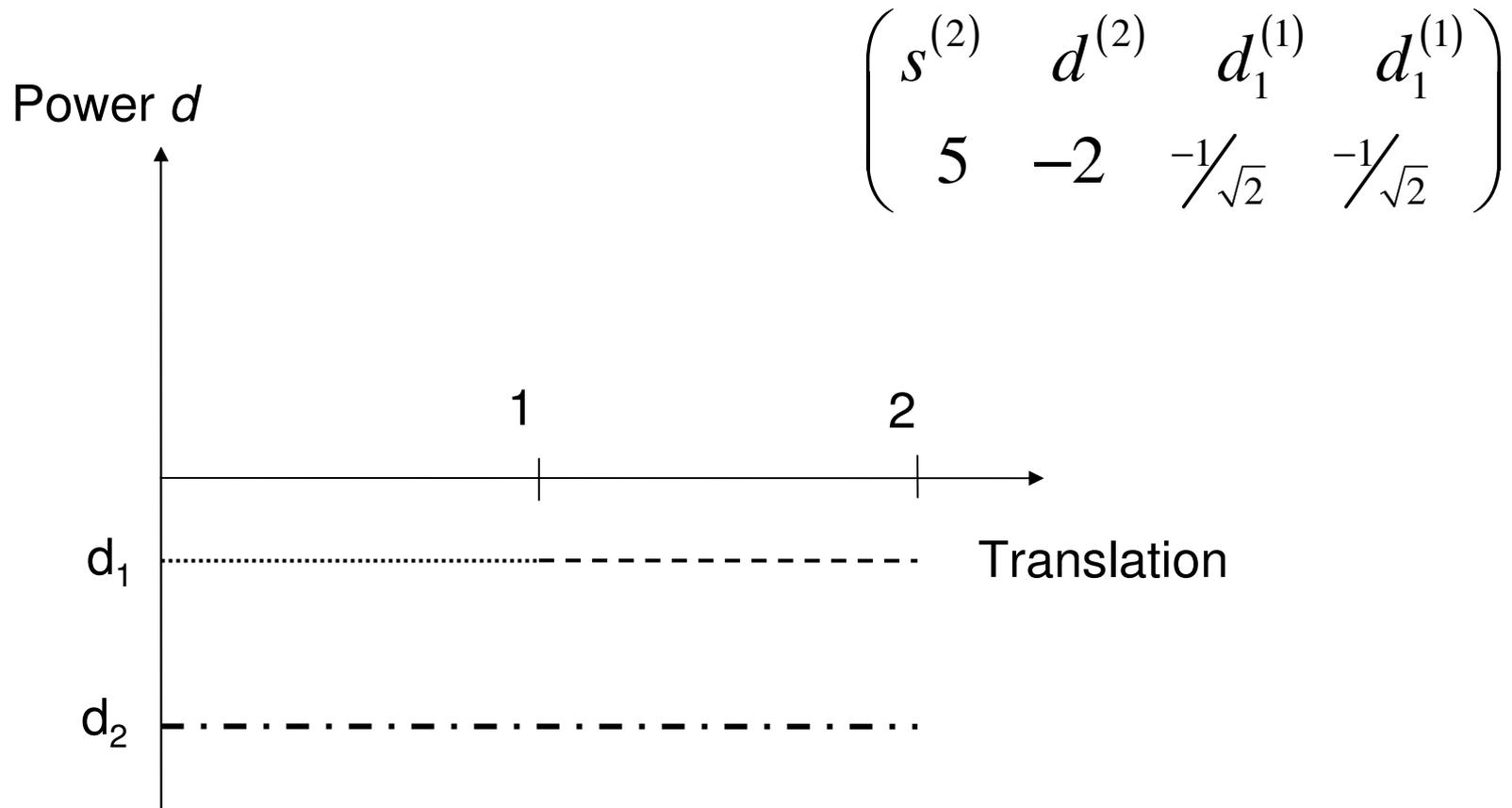
Пример:

$$(1, 2, 3, 4) \rightarrow ((1, 2), (3, 4)) \rightarrow H_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} ((3, -1), (7, -1)) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} ((3, 7), [-1, -1]) \rightarrow H_2 \rightarrow ((5, -2), \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right]) \rightarrow$$

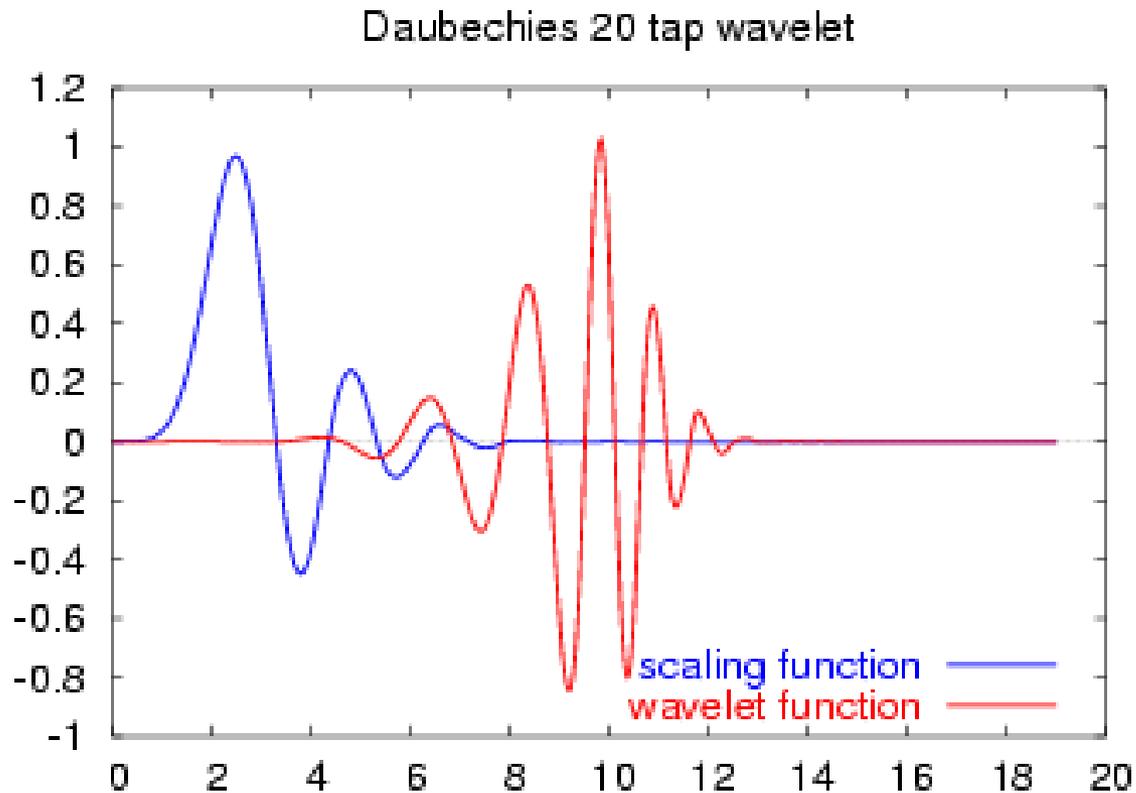
$$\rightarrow \begin{pmatrix} s^{(2)} & d^{(2)} & d_1^{(1)} & d_1^{(1)} \\ 5 & -2 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Спектр мощности



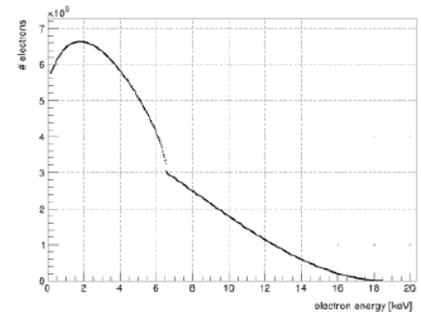
Представление деталей сигнала для каждого масштаба

Вейвлеты Добеши



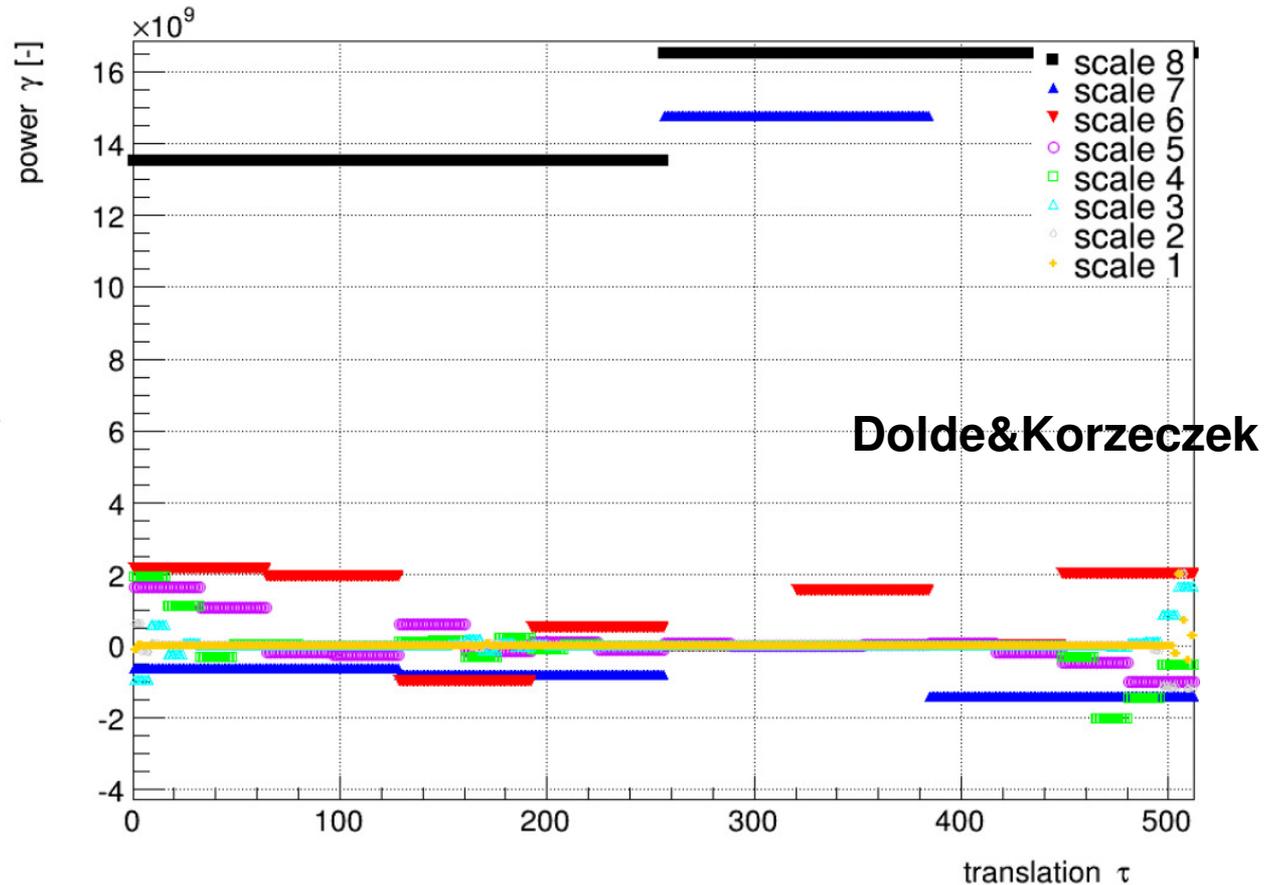
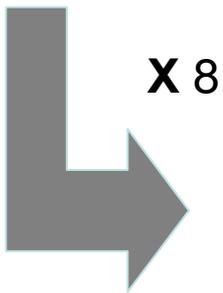
Dolde&Korzeczek использовали семейство вейвлетов Добеши 18

Спектр мощности



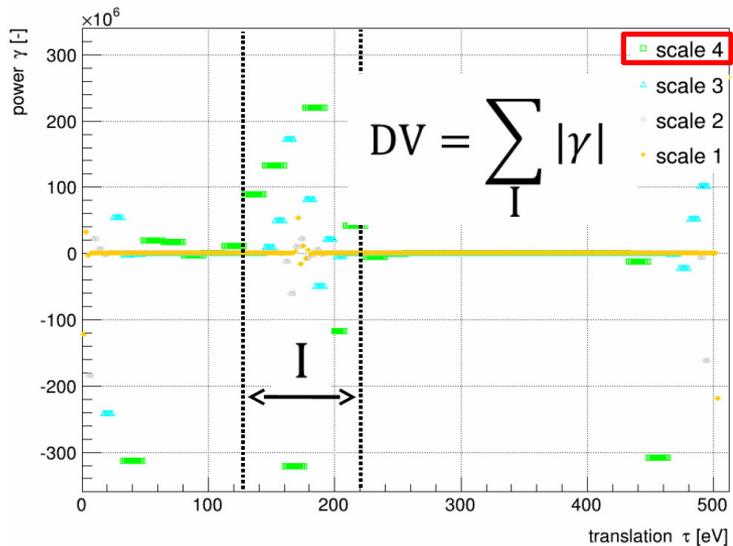
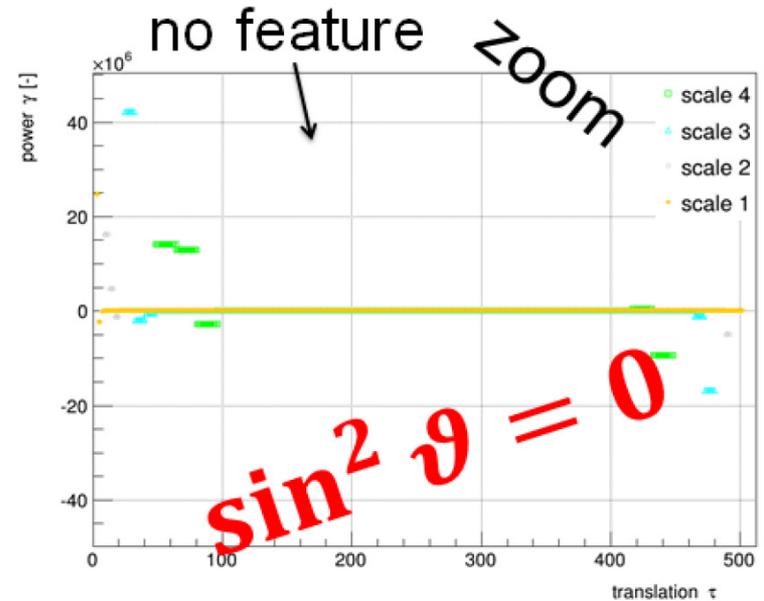
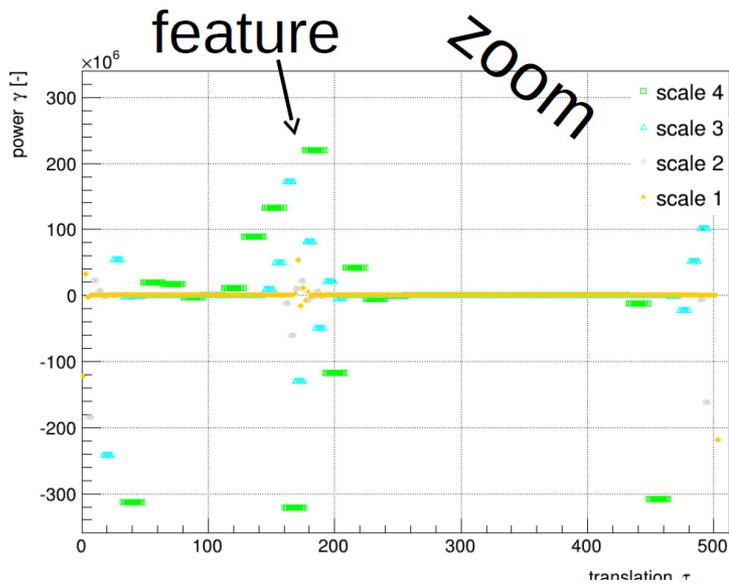
$$\left\{ \begin{array}{c} count_0 \\ \dots \\ count_N \end{array} \right\}_i$$

$T_{\text{Daubechies18}}$



$$\left\{ (d_1^{(8)}, d_2^{(8)}), (d_1^{(7)}, d_2^{(7)}, d_3^{(7)}, d_4^{(7)}), (d_1^{(6)}, d_2^{(6)}, d_3^{(6)}, d_4^{(6)}, d_5^{(6)}, d_6^{(6)}, d_7^{(6)}, d_8^{(6)}), \dots \right\}$$

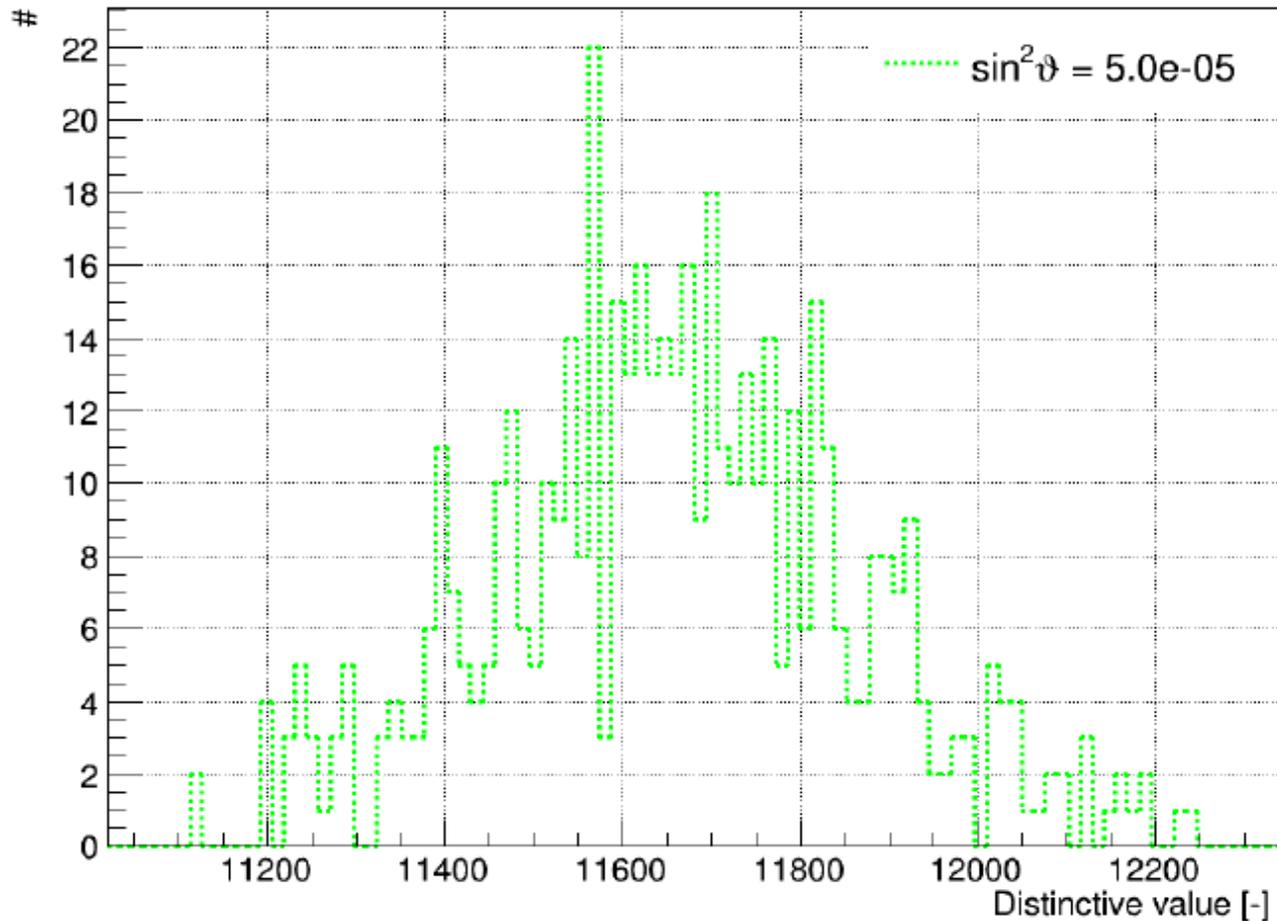
Выбор критерия



DV – статистический критерий для kinka

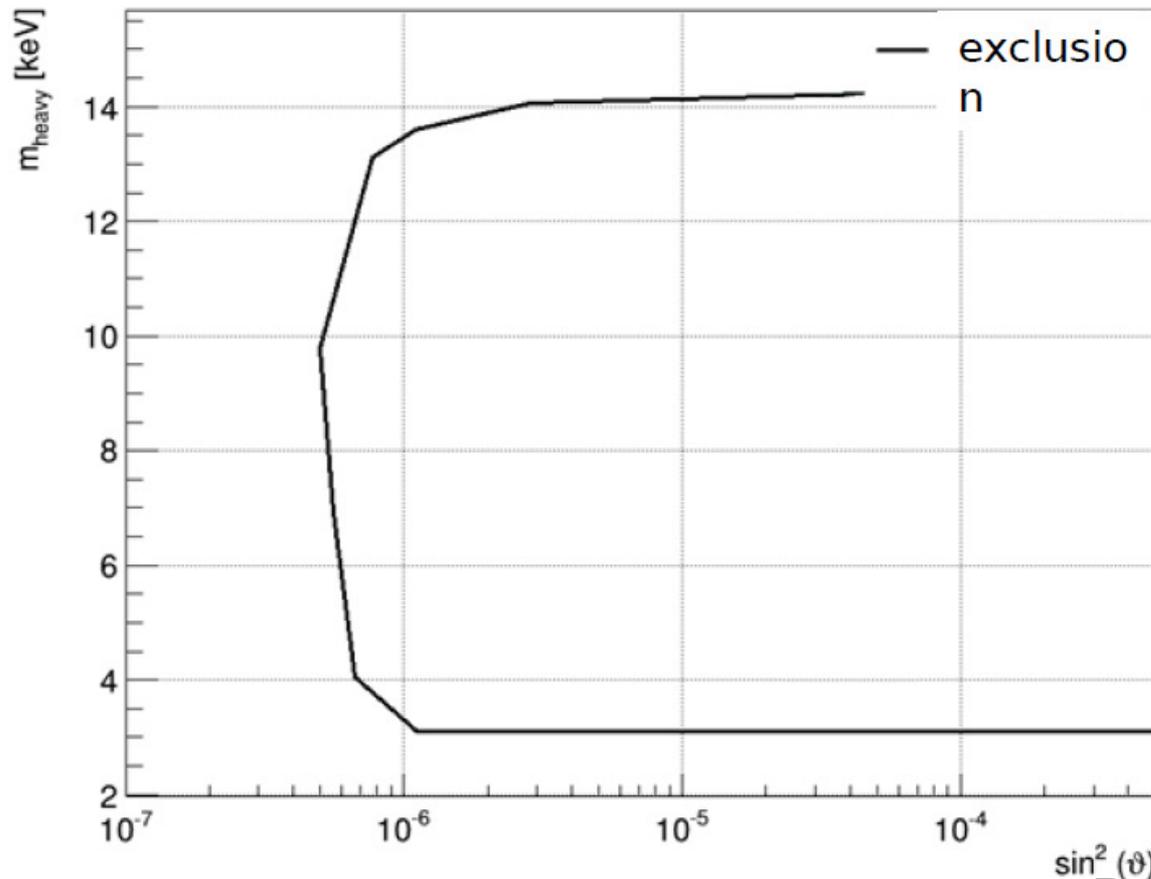
Распределение критерия

Монте-Карло моделирование распределения для критерия DV

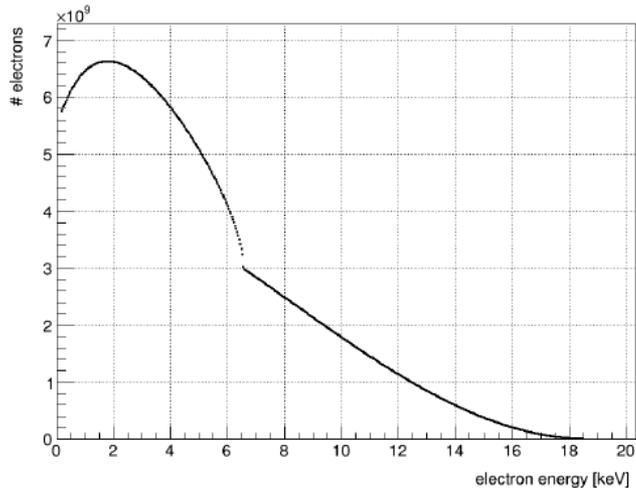


Чувствительность к аномальному вкладу

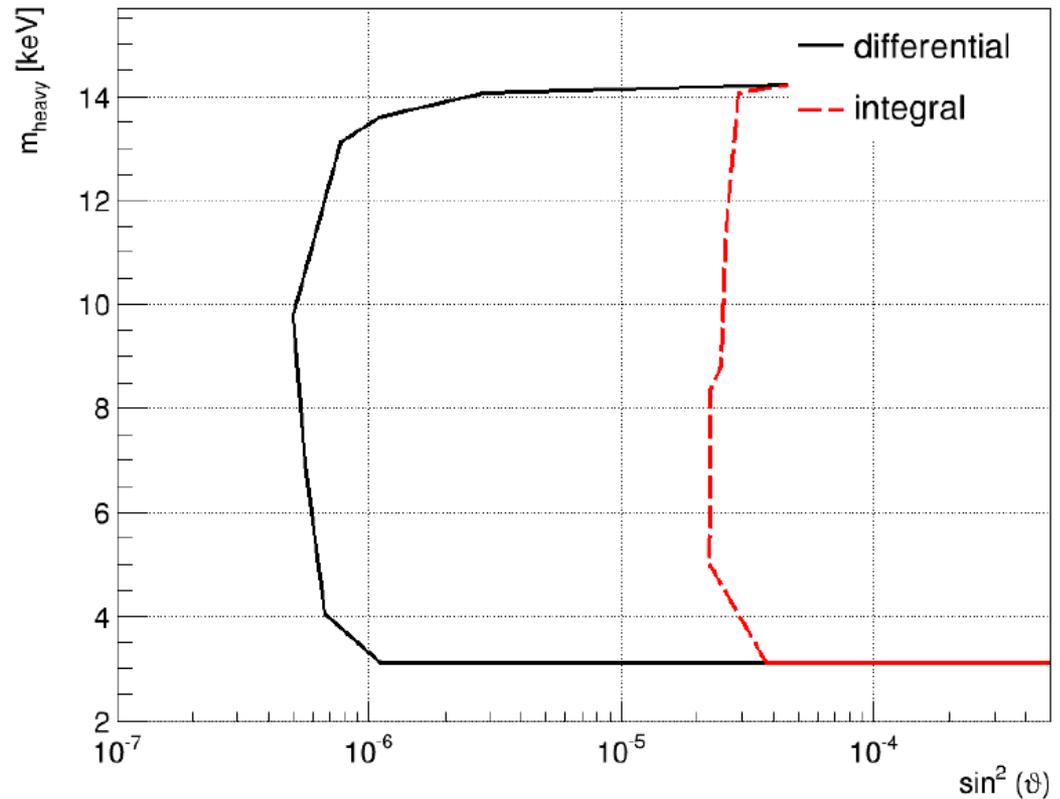
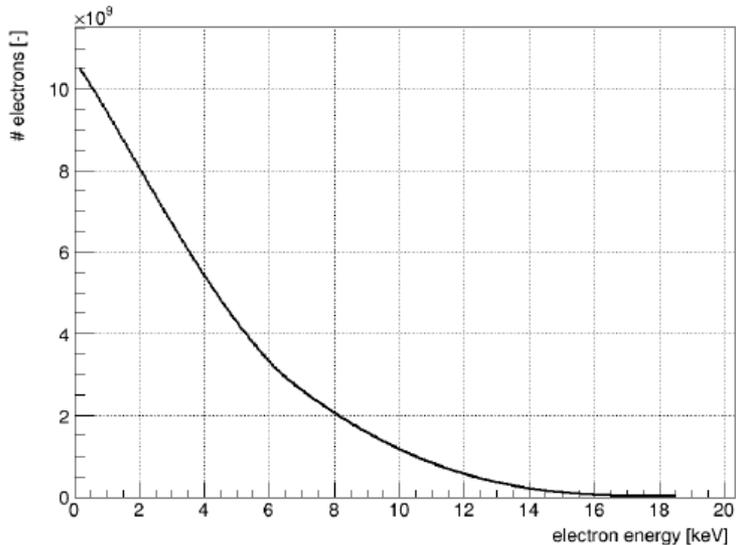
Для разных масс тяжёлого нейтрино строим распределения критериев DV -> исключаем (на уровне доверия 90%) значения угла смешивания правее exclusion curve



Чувствительность в зависимости от типа спектра



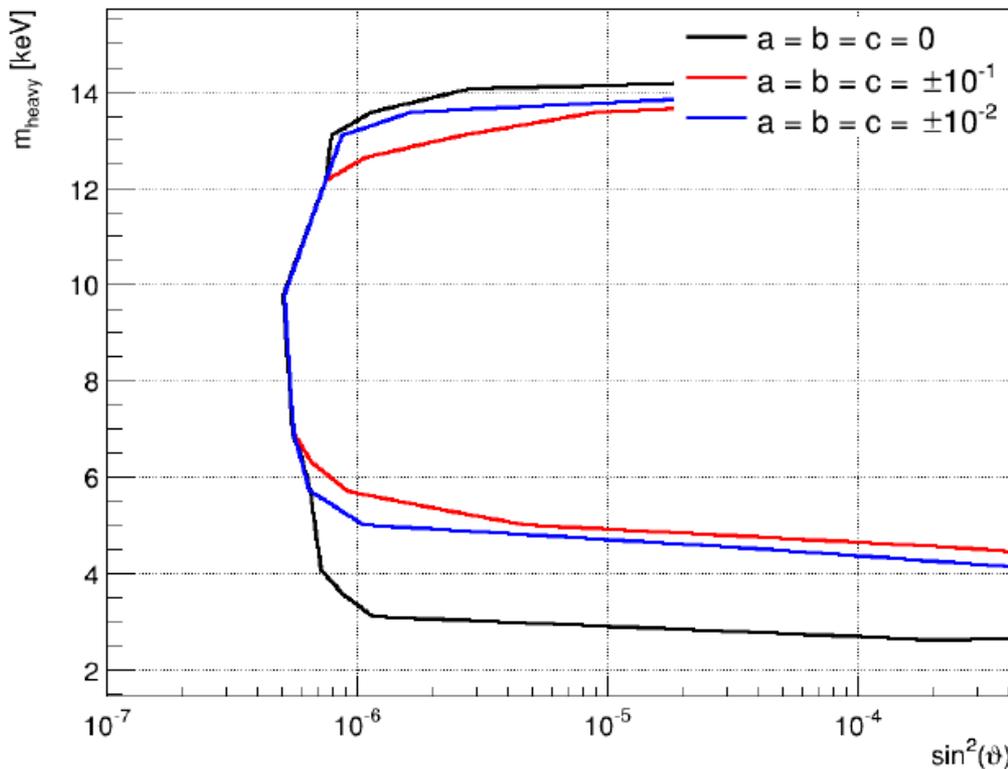
$$\sin^2 \vartheta = 0.5$$



Чувствительность в зависимости от формы спектра

Пусть форма спектра известна с некоторой точностью. Поправка:

$$p(E) = 1 + a \frac{E - E_0}{E_0} + b \left(\frac{E - E_0}{E_0} \right)^2 + c \left(\frac{E - E_0}{E_0} \right)^3$$



a, b, c – распределены по Гауссу с дисперсией $10^{-1}, 10^{-2}$

Выводы

- Дискретные вейвлет-преобразования позволяют строить статистические критерии для поиска аномальных вкладов в экспериментальных спектрах
- Чувствительность таких критериев к форме спектра может оказаться достаточно слабой
- Нет систематического подхода к построению критерия – выбор конкретного типа вейвлетов обоснован лишь в рамках конкретной задачи и конкретного Монте-Карло моделирования

Выводы

- Построенный критерий (DV) выглядит искусственным, его эффективность можно доказать лишь сравнением соответствующих функций мощности
- Слабую зависимость критерия от формы спектра можно также продемонстрировать на основе функций мощности
- Напрашивается поиск оптимального критерия в рамках, например, метода квазиоптимальных весов