

К 80-летию Владимира Михайловича Лобашева

"Свет Будды" кумулятивных частиц
(ядерный эффект gloria)

В.Б.Копелиович, Г.К.Матушко (ИЯИ РАН),
И.К.Поташникова (УСМ, Чили)

J. Phys. G (2014); arXiv:1403.1992 (nucl-th)

1. Введение
2. Особенности кинематики в "КЗО"
3. Метод малого фазового объема
4. Ядерный эффект gloria
5. Выводы, перспективы

В начале 70-х возникло новое направление ядерной физики высоких энергий – **кумулятивное рождение** частиц (ОИЯИ, А.М.Балдин, В.С.Ставинский, В.В.Глаголев ...).

Совокупность этих явлений получила название **ядерный скейлинг** (ИТЭФ, Г.А.Лексин и соавторы)

ВМ: "Это может быть **разветвленный каскад**".

"Мы сами наблюдали, что фотон после двукратного взаимодействия имеет энергию, превышающую энергию фотона, вылетающего под тем же углом после однократного взаимодействия."

Эффект "обратной фокусировки" подобен оптическому атмосферному явлению **глория** (в странах Востока его называют **светом Будды**).

Обнаружен в ОИЯИ и ИТЭФ в 70-е годы и (почти) забыт на обочине столбовой дороги науки... Дает небольшой вклад в полное сечение, но достаточно ярок и имеет простое объяснение, основанное на почти элементарной математике.

Детали кинематики

При достаточно большой начальной энергии, $E_0 \gg M_f, \omega_f$,

$$\omega_f - zk_f \leq m_t,$$

$z = \cos \theta < 0$. Величина $(\omega_f - zk_f)/m_N$ была названа кумулятивным числом. (точнее, целая часть плюс 1).

Для легких частиц (например, π -мезона) итерация формулы Комптона приводит при большой начальной энергии ω_0 к

$$\omega_N^{max} \simeq N \frac{2m}{\theta^2} + \frac{m}{6N}.$$

Работает хорошо уже начиная с $N = 2$.

Для нуклон-нуклонного рассеяния при больших N и E_0 также можно произвести $1/N^2$ разложение, первые члены которого

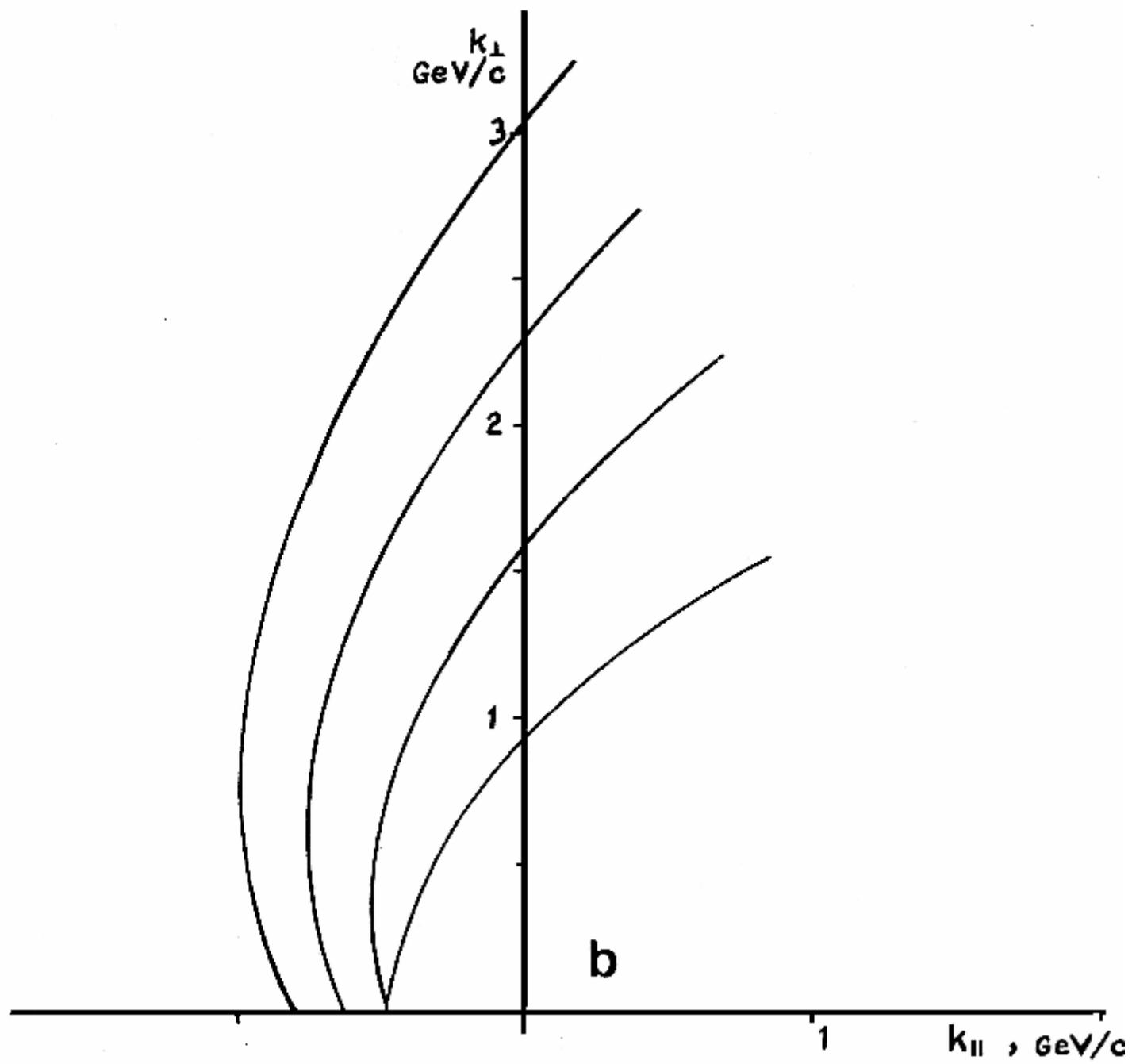
$$k_N^{max} \simeq N \frac{2m}{\theta^2} - \frac{m}{3N},$$

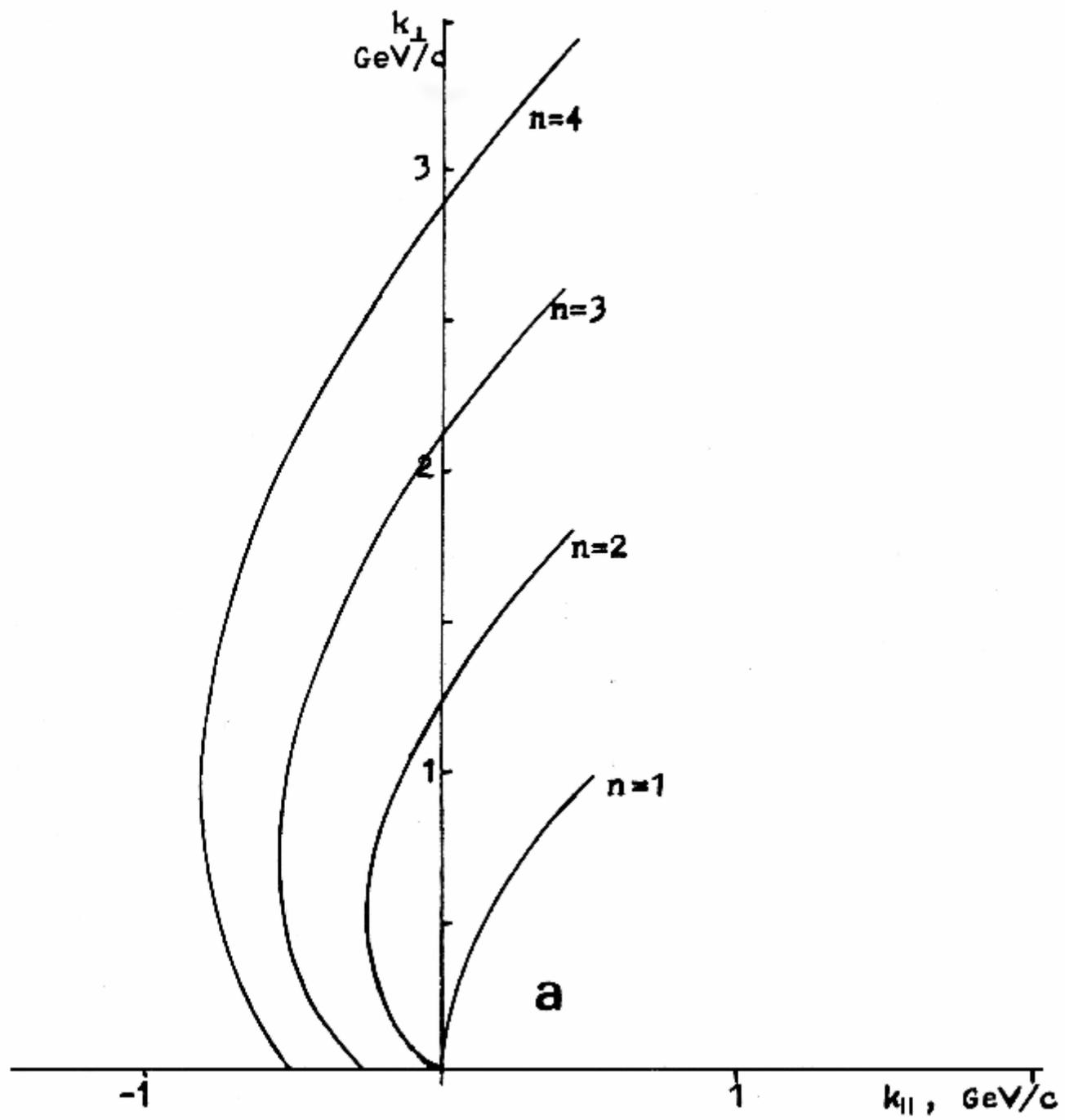
предасимптотическая поправка отрицательна и вдвое больше, чем для легкой частицы.

Нормальное Ферми-движение нуклонов в ядре делает эти границы существенно шире:

$$k_N^{max} \simeq N \frac{2m}{\theta^2} \left[1 + \frac{p_F^{max}}{2m} \left(\theta + \frac{1}{\theta} \right) \right],$$

для больших углов вылета, $\theta \sim \pi$. Распределение нуклонов по Ферми-импульсам взято в простейшей форме - ступеньки, причем $p_F^{max}/m \simeq 0.27$. При больших N кинематические границы для МП увеличиваются примерно на $\sim 40\%$.





Возбуждение резонансов в промежуточном состоянии.

Упругие перерасеяния – лишь "верхушка айсберга". Рождение резонансов в промежуточных состояниях с последующим девозбуждением вносит основной по величине вклад в сечение. Простейшие примеры: $NN \rightarrow NN^* \rightarrow NN$, $NN \rightarrow N\Delta \rightarrow NN$, $\pi N \rightarrow \rho N \rightarrow \pi N$, и т.д. (М.Браун, В.Вечернин, 1977; ВК, 1977) Экспериментально В.И.Комаров и соавт. (ОИЯИ).

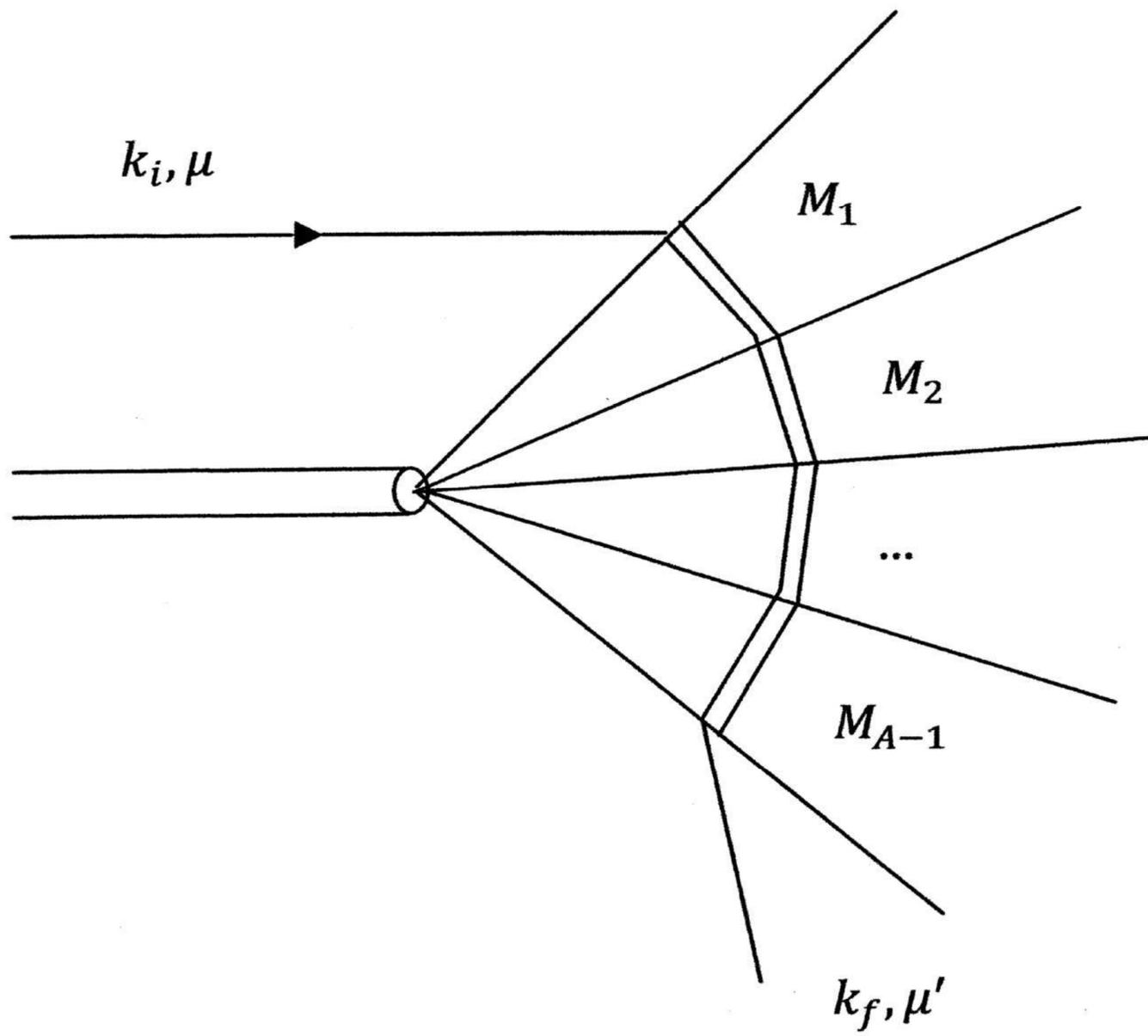
Относительное изменение конечного импульса k_f .

$$\frac{\Delta k_f}{k_f} \simeq \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N-1} \frac{\Delta M_l^2}{k_l^2},$$

где $\Delta M_l^2 = M_l^2 - \mu^2$, k_l значение 3-импульса в l -м промежуточном состоянии. Доп. энергия, которую несет резонанс, переходит в кинет. энергию конечной (кумулятивной) частицы.

Число различных процессов для N -кратного МП $(N_R + 1)^{N-1}$, где N_R - число резонансов, участвующих в процессе. Наибольшее преимущество у процесса с образованием резонанса в предпоследнем $(N - 1)$ -м акте. Важна спиновая структура $NN_1^* \rightarrow NN_2^*$ при энергиях до нескольких ГэВ. Спин. структура плохо известна, нет перспектив, что этот пробел будет восполнен в обозримое будущее.

Существенно: при произвольно большой начальной энергии кинематика всего МП определяется **конечными** импульсом и углом вылета.



Similar to the case of electromagnetic interactions, the hadron formation time (coherence length)

$$\tau^{form} \sim 1/(\omega - k_z)$$

if the incident energy is large enough, where ω and k_z are the energy and the longitudinal momentum of the produced particle, the axis z - along the incident particle momentum.

For the production of a particle on a target with the mass m_t at high enough incident energy the inequality takes place:

$$\omega - k_z \leq m_t,$$

at the kinematical boundary the equality takes place. To produce a final particle beyond the kinematical boundary due to multiple interaction process, in the first interaction act the particle should be produced near the kinematical boundary, i.e.

$$\omega_1 - \cos\theta_1 k_1 \sim m_N,$$

therefore, the formation time of the first produced particle

$$\tau_1^{form} \sim 1/(\omega_1 - \cos\theta_1 k_1) \sim 1/m$$

is necessarily small, and the whole production picture is of quasiclassical character. The interesting phenomena observed in the high energy particles - nuclei interaction reactions and widely discussed in the literature, connected with the large formation time of the particles produced in forward direction, do not take place in the cumulative production processes.

Как и в случае электромагнитных взаимодействий (Ландау, Померанчук, 1953) время формирования адрона (длина когерентности)

$$\tau^{form} \sim 1/(\omega - k_z)$$

при достаточно большой начальной энергии, ω и k_z – энергия и продольный импульс рожденной частицы, ось z – по импульсу падающей частицы.

Чтобы образовать конечную частицу за кинематическим пределом, в первом акте взаимодействия частица должна родиться вблизи кинематического предела, то есть

$$\omega_1 - \cos\theta_1 k_1 \sim m_N,$$

откуда время формирования

$$\tau_1^{form} \sim 1/(\omega_1 - \cos\theta_1 k_1) \sim 1/m_N$$

с необходимостью невелико, и весь процесс может описан квазиклассически, в приближении факторизации вероятностей отдельных подпроцессов.

3 The small phase space method for the MIP probability calculations

There is a preferable plane of the whole MIP leading to the production of energetic particle at large angle θ , (not strictly backwards!), the angles of subsequent rescatterings are close to θ/N (optimal, or basic kinematics). The deviations of real angles from the optimal values are small, they are defined mostly by the difference $k_N^{max} - k$, where $k_N^{max}(\theta)$ is the maximal possible momentum reachable for definite MIP, and k is the final momentum of the detected particle. $k_N^{max}(\theta)$ should be calculated taking into account normal Fermi motion of nucleons inside the nucleus, and also resonances excitation — deexcitation in the intermediate state. Some high power of the difference $(k_N^{max} - k)/k_N^{max}$ enters the resulting probability.

Within the quasiclassical treatment adequate for our case, the probability product approximation is valid. In terms of differential cross sections of binary reactions $d\sigma_l/dt_l(s_l, t_l)$

$$f_N(\vec{p}_0, \vec{k}) = \pi R_A^2 G_N(R_A, \theta) \int \frac{f_1(\vec{p}_0, \vec{k}_1)(k_1^0)^3 x_1^2 dx_1 d\Omega_1}{\sigma_1^{leav} \omega_1}$$

$$\prod_{l=2}^N \left(\frac{d\sigma_l(s_l, t_l)}{dt_l} \right) \frac{(s_l - m^2 - \mu_l^2)^2 - 4m^2 \mu_l^2}{4\pi m \sigma_l^{leav} k_{l-1}}$$

$$\times \prod_{l=2}^{N-1} \frac{k_l^2 d\Omega_l}{k_l(m + \omega_{l-1} - z_l \omega_l k_{l-1})} \frac{1}{\omega'_N} \delta(m + \omega_{N-1} - \omega_N - \omega'_N).$$

$G_N(R_A, \theta)$ is the geometrical factor which enters the probability of the N -fold multiple interaction with definite trajectory of the interacting particles (resonances) inside the nucleus. This trajectory is defined mostly by the final values of \vec{k} (k, θ), according to the kinematical relations. Inclusive cross section of the rescattered particle production in the first interaction is $\omega_1 d^3\sigma_1/d^3k_1 = f_1(\vec{p}_0, \vec{k}_1)$, $d^3k_1 = (k_1^0)^3 x_1^2 dx_1$, $\omega_N = \omega$, $z_l = \cos \theta_l$.

Метод малого фазового объема расчета вероятности МП

Кинематика МП селективна: имеется выделенная плоскость, определяемая начальным и конечным импульсами, если конечный угол θ отличен от $\pi = 180^\circ$, и углы последовательных рассеяний близки к θ/N (оптимальная, или базовая кинематика). Отклонения углов от оптимальных значений малы и определяются разностью $k_N^{max} - k$, где $k_N^{max}(\theta)$ - максимальный импульс, достижимый в МП, k - импульс детектируемой к. частицы. $k_N^{max}(\theta)$ должен быть рассчитан с учетом Ферми - импульса и возбуждения - девозбуждения резонансов в промежуточном состоянии. Вероятность процесса пропорц-а высокой степени разности $(k_N^{max} - k)/k_N^{max}$.

Инклюзивное сечение процесса выражается через сечения бинарных реакций $d\sigma_l/dt_l(s_l, t_l)$

$$f_N(\vec{p}_0, \vec{k}) = \pi R_A^2 G_N(R_A, \theta) \int \frac{f_1(\vec{p}_0, \vec{k}_1) (k_1^0)^3 x_1^2 dx_1 d\Omega_1}{\sigma_1^{leav} \omega_1}$$

$$\prod_{l=2}^N \left(\frac{d\sigma_l(s_l, t_l)}{dt_l} \right) \frac{(s_l - m^2 - \mu_l^2)^2 - 4m^2 \mu_l^2}{4\pi m \sigma_l^{leav} k_{l-1}}$$

$$\times \prod_{l=2}^{N-1} \frac{k_l^2 d\Omega_l}{k_l (m + \omega_{l-1} - z_l \omega_l k_{l-1})} \frac{1}{\omega'_N} \delta(m + \omega_{N-1} - \omega_N - \omega'_N).$$

$G_N(R_A, \theta)$ - геометрический фактор, зависящий от радиуса ядра и определяемый траекторией частицы (резонанса) внутри ядра, то есть величинами $\vec{k}(k, \theta)$.

$\omega_1 d^3\sigma_1/d^3k_1 = f_1(\vec{p}_0, \vec{k}_1)$ - инклюзивное сечение рождения в 1-м акте взаимодействия, $d^3k_1 = (k_1^0)^3 x_1^2 dx_1$, $\omega_N = \omega$, $z_l = \cos \theta_l$.

Для оценки сечения процесса можно вынести произведение всех сечений вблизи от оптимальной кинематики и умножить на малый фазовый объем всего МП. В случае перерасеяния легкой частицы, например, π -мезона, $\mu_l^2/m^2 \ll 1$,

$$\frac{1}{\omega'_N} \delta(m + \omega_{N-1} - \omega_N - \omega'_N) = \frac{1}{kk_{N-1}} \delta \left[\frac{m}{k} - \sum_{l=2}^N (1 - z_l) - \frac{1}{x_1} \left(\frac{m}{p_0} + 1 - z_l \right) \right]$$

Если конечный угол θ существенно отличен от π , имеется выделенная плоскость, вблизи которой происходит весь МП.

При $\theta = \pi$, строго назад, имеется азимутальная симметрия и в сечение рождения к. частицы дает вклад весь интервал азимут. углов $0 < \phi < 2\pi$ (азимутальная или аксиальная фокусировка).

Полезно ввести азимутальные отклонения от оптимальной плоскости, φ_k , $k = 1, \dots, N - 1$; причем $\varphi_N = 0$ по определению плоскости всего процесса, (\vec{p}_0, \vec{k}) . Отклонения полярных углов от оптимальных значений, θ/N , обозначим как ϑ_k , $\sum_{k=1}^N \vartheta_k = 0$. Направления импульсов \vec{k}_l после l -го взаимодействия, \vec{n}_l , определены азимутальными φ_l и полярными $\theta_l = (l\theta/N) + \vartheta_1 + \dots + \vartheta_l$, $\theta_N = \theta$ углами.

При учете квадратичных по φ_l , ϑ_l вкладов:

$$z_k = (\vec{n}_k \vec{n}_{k-1}) \simeq \cos(\theta/N) (1 - \vartheta_k^2/2) - \sin(\theta/N) \vartheta_k + \\ + \sin(k\theta/N) \sin[(k-1)\theta/N] (\varphi_k - \varphi_{k-1})^2/2.$$

Для легкой частицы в фазовый объем всего МП входит сумма

$$\sum_{k=1}^N (1 - \cos \vartheta_k) = N [1 - \cos(\theta/N)] + \cos(\theta/N) \sum_{k=1}^N \left[-\varphi_k^2 \sin^2(k\theta/N) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\cos(\theta/N)} \sin(k\theta/N) \sin((k-1)\theta/N) \right] - \frac{\cos(\theta/N)}{2} \sum_{k=1}^N \vartheta_k^2$$

$\varphi_N = \varphi_0 = 0$ — по определению плоскости всего МП,

Фазовый объем пропорционален интегралу:

$$I_N(\Delta_N^{ext}) = \int \delta\left[\Delta_N^{ext} - z_N^\theta \left(\sum_{k=1}^N \varphi_k^2 - \varphi_k \varphi_{k-1} / z_N + \vartheta_k^2 / 2 \right)\right] \prod_{l=1}^{N-1} d\varphi_l d\vartheta_l =$$

$$= \frac{(\Delta_N^{ext})^{N-2} (\sqrt{2\pi})^{N-1}}{J_N(z_N^\theta) \sqrt{N} (N-2)! (z_N^\theta)^{N-1}},$$

$z_N^\theta = \cos(\theta/N)$, якобиан

$$J_N(z) = \sqrt{\text{Det} ||a_N||},$$

Матрица $||a||$ определяет квадратичную форму по азимутальным отклонениям $Q_N(z, \varphi_k)$ которая входит в δ -функцию:

$$Q_N(z, \varphi_k) = a_{kl} \varphi_k \varphi_l = \sum_{k=1}^N \varphi_k^2 - \frac{\varphi_k \varphi_{k-1}}{z}.$$

Примеры:

$$Q_3(z, \varphi_k) = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_2 / z; \quad Q_4(z, \varphi_k) = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 - (\varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2 \varphi_3) / z,$$

Фаз. объем зависит от

$$\Delta_N^{ext} \simeq \frac{m}{k} - \frac{m}{p_0} - N(1 - z_N^\theta) - (1 - x_1) \frac{m}{p_0}$$

определяющей расстояние до кинематической границы N -кратного МП.

$$\Phi_N^{pions} = \frac{1}{\omega'_N} \delta(m + \omega_{N-1} - \omega_N - \omega'_N) \prod_{l=1}^N d\Omega_l = \frac{I_N(\Delta_N^{ext})}{kk_{N-1}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2\pi})^{N-1} (\Delta_N^{ext})^{N-2}}{kk_{N-1} (N-2)! \sqrt{N} J_N(z_N^\theta) (z_N^\theta)^{N-1}}$$

Нормальное Ферми движение нуклонов существенно увеличивает фазу объем :

$$\Delta_N^{ext} = \Delta_N^{ext}|_{p_F=0} + \vec{p}_l^F \vec{r}_l / 2m,$$

\vec{r}_l - согласно оптимальной кинематике,

Ядерный эффект gloria ("свет Будды"кумулятивных частиц)

Рекуррентное соотношение для квадратичной формы

$$Q_{N+1}(z, \varphi_k, \varphi_l) = Q_N(z, \varphi_k, \varphi_l) + \varphi_N^2 - \varphi_N \varphi_{N-1}/z$$

позволяет записать

$$Q_N(z_N^\theta, \varphi_k, \varphi_l) = J_2^2 \left(\varphi_1 - \frac{\varphi_2}{2zJ_2^2} \right)^2 + \frac{J_3^2}{J_2^2} \left(\varphi_2 - \frac{J_2^2 \varphi_3}{2zJ_3^2} \right)^2 + \dots \\ \dots + \frac{J_{N-1}^2}{J_{N-2}^2} \left(\varphi_{N-2} - \frac{J_{N-2}^2 \varphi_{N-1}}{2zJ_{N-1}^2} \right)^2 + \frac{J_N^2}{J_{N-1}^2} \varphi_{N-1}^2.$$

Отсюда для якобианов следует

$$J_N^2(z) = J_{N-1}^2(z) - \frac{1}{4z^2} J_{N-2}^2(z)$$

что позволяет получить J_N^2 для любых N исходя из $J_2^2(z) = 1$ и $J_3^2(z) = 1 - 1/(4z^2)$.

Была получена общая формула для $J_N^2(z_N^\theta)$ (ВК, 1977, 1986):

$$\text{Det}||a_{kl}|| = J_N^2(z_N^\theta) = 1 + \sum_{m=1}^{m < N/2} \left(-\frac{1}{4(z_N^\theta)^2} \right)^m C_{N-m-1}^m,$$

$$z_N^\theta = \cos(\theta/n),$$

The condition $J_N(\pi/N) = 0$ leads to the equation for z_N^π which solution (one of all possible roots) provides the value of $\cos(\pi/N)$ in terms of radicals. The following expressions for these jacobians take place

$$J_2^2(z) = 1; \quad J_3^2(z) = 1 - \frac{1}{4z^2}; \quad J_4^2(z) = 1 - \frac{1}{2z^2},$$

$J_3(\pi/3) = I_3(z = 1/2) = 0$, $J_4(\pi/4) = I_4(z = 1/\sqrt{2}) = 0$. Let us give here less trivial examples. For $N = 5$

$$J_5^2 = 1 - \frac{3}{4z^2} + \frac{1}{16z^4},$$

and one obtains $\cos^2(\pi/5) = (3 + \sqrt{5})/8$ for $J_5(\pi/5) = 0$.

At $N = 6$

$$J_6^2 = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{3}{16z^4} = J_3^2\left(1 - \frac{3}{4z^2}\right).$$

For $N = 7$

$$J_7^2 = 1 - \frac{5}{4z^2} + \frac{3}{8z^4} - \frac{1}{64z^6}.$$

$J_7(\pi/7) = 0$.

For arbitrary N , J_N^2 is a polynomial in $1/4z^2$ of the power $|(N - 1)/2|$ (integer part of $(N - 1)/2$).

Strictly backwards the phase space has different form, $J_{N-1}(\theta/N)$ enters instead of $J_N(\theta/N)$ which is different from zero at $\theta = \pi$, and

$$\begin{aligned} I_N(\varphi, \vartheta) &= \int \delta\left[\Delta_N^{ext} - z_N^\pi \left(\sum_{k=1}^N \varphi_k^2 - \varphi_k \varphi_{k-1} / z_N^\pi + \vartheta_k^2 / 2\right)\right] \left[\prod_{l=1}^{N-2} d\varphi_l d\vartheta_l\right] 2\pi d\vartheta_{N-1} = \\ &= \frac{(\Delta_N^{ext})^{N-5/2} (2\sqrt{2}\pi)^{N-1}}{J_{N-1}(z_N^\pi) \sqrt{N} (2N-5)!! (z_N^\pi)^{N-3/2}}, \end{aligned}$$

Integration over $d\varphi_{N-1}$ takes place over the whole 2π interval.

Условие $J_N(\pi/N) = 0$ приводит к уравнению для z_N^π , одно из решений которого (один из корней полинома) дает значение $\cos(\pi/N)$ в радикалах. Выражения для якобианов таковы

$$J_2^2(z) = 1; \quad J_3^2(z) = 1 - \frac{1}{4z^2}; \quad J_4^2(z) = 1 - \frac{1}{2z^2},$$

$J_3(\pi/3) = I_3(z = 1/2) = 0$, $J_4(\pi/4) = I_4(z = 1/\sqrt{2}) = 0$. Более сложные примеры: для $N = 5$

$$J_5^2 = 1 - \frac{3}{4z^2} + \frac{1}{16z^4},$$

откуда $\cos^2(\pi/5) = (3 + \sqrt{5})/8$ for $J_5(\pi/5) = 0$.

При $N = 6$

$$J_6^2 = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{3}{16z^4} = J_3^2\left(1 - \frac{3}{4z^2}\right).$$

Для $N = 7$

$$J_7^2 = 1 - \frac{5}{4z^2} + \frac{3}{8z^4} - \frac{1}{64z^6}.$$

$J_7(\pi/7) = 0$.

Для произвольного N , J_N^2 — полином по $1/4z^2$ степени $|(N-1)/2|$ (целая часть $(N-1)/2$).

Строго назад в фаз. объем вместо $J_N(\theta/N)$ входит $J_{N-1}(\theta/N)$, отличный от нуля при $\theta = \pi$, и

$$\begin{aligned} I_N(\varphi, \vartheta) &= \int \delta\left[\Delta_N^{ext} - z_N^\pi \left(\sum_{k=1}^N \varphi_k^2 - \varphi_k \varphi_{k-1} / z_N^\pi + \vartheta_k^2 / 2\right)\right] \left[\prod_{l=1}^{N-2} d\varphi_l d\vartheta_l\right] 2\pi d\vartheta_{N-1} = \\ &= \frac{(\Delta_N^{ext})^{N-5/2} (2\sqrt{2}\pi)^{N-1}}{J_{N-1}(z_N^\pi) \sqrt{N} (2N-5)!! (z_N^\pi)^{N-3/2}}, \end{aligned}$$

Интегрирование по одному из углов $d\varphi_{N-1}$ следует провести по всему 2π -интервалу.

Для иллюстрации азимутальной (аксиальной) фокусировки вблизи $\theta = \pi$ полезно рассмотреть отношение фаз. объемов вблизи от направления назад и при $\theta = \pi$. Элементарные сечения при этом меняются несущественно.

$$R_N(\theta) = \frac{\Phi(z)}{\Phi(\theta = \pi)} = \sqrt{\frac{\Delta_N^{ext}}{z_N^\pi} \frac{(2n-5)!!}{2^{N-1}(N-2)!} \frac{J_{N-1}(z_N^\pi)}{\sin(\pi/N)J_N(z_N^\theta)}}$$

Вблизи $\theta = \pi$ имеет место

$$J_N(z_N^\theta) \simeq \sqrt{\frac{\pi - \theta}{N} [J_N^2(z_N^\pi)]' \sin \frac{\pi}{N}}$$

В результате

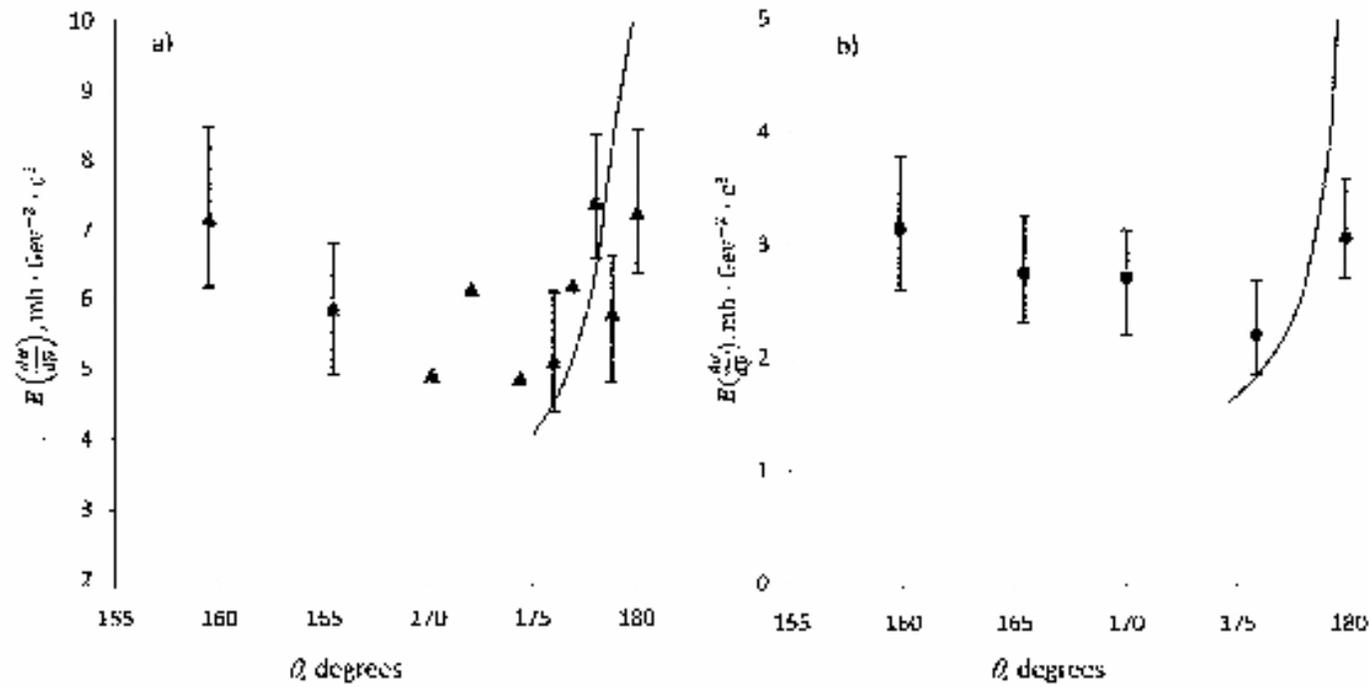
$$R_N(\theta) = C_N \sqrt{\frac{\Delta_N^{ext}}{\pi - \theta}}$$

где

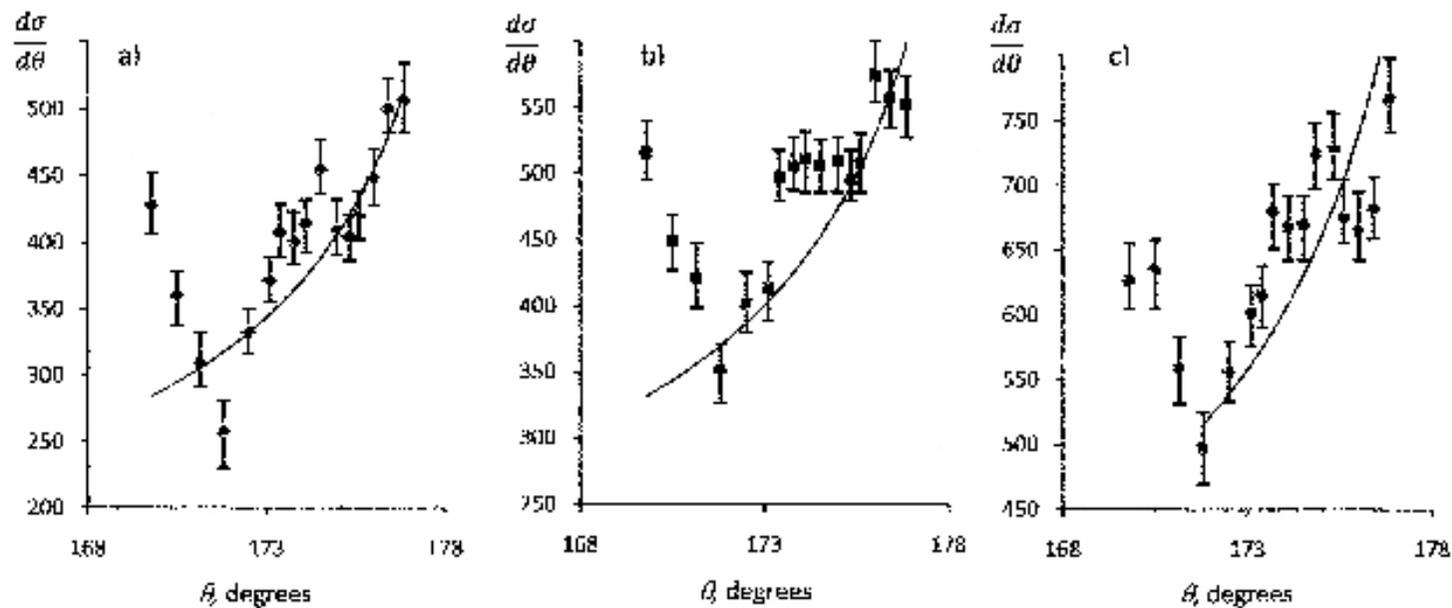
$$C_N = \frac{J_{N-1}(z_N^\pi) \sqrt{N}}{[(J_N^2(z_N^\pi))']^{1/2} [\sin(\pi/N)]^{3/2} \sqrt{z_N^\pi} (N-2)! 2^{N-1}}$$

N	$(J_N^2(z_N^\pi))'$	$\sin(\pi/N)$	$[(J_N^2(z_N^\pi))' \sin^3(\pi/N)]^{1/2}$	$J_{N-1}[z_N^\pi]$	C_N
3	4	0.866	1.612	1	0.38
4	2.83	0.707	0.999	0.707	0.32
5	2.11	0.588	0.655	0.486	0.29
6	1.540	0.5	0.438	0.333	0.27
7	1.087	0.434	0.298	0.229	0.26

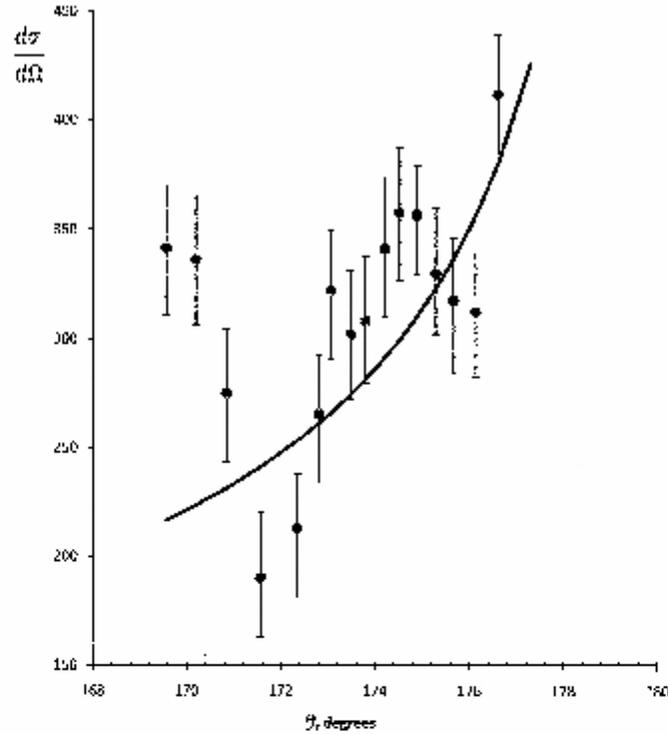
Таблица. Численные значения величин, определяющих отношение сечений рождения к. части вблизи $\theta = \pi$. Здесь $z_N^\pi = \cos(\pi/N)$.



The angular dependence of inclusive cross section of the production of positive pions by projectile protons with momentum $8.9 \text{ GeV}/c$. a) pions with momentum $0.5 \text{ GeV}/c$ emitted from Pb nucleus. The error bars at some points have not been clearly indicated in the original paper; b) pions with momentum $0.3 \text{ GeV}/c$ emitted from He nucleus. The data are taken from Fig. 18 of the paper by V.S.Stavinsky, Fiz.Elem.Chast. At.Yadra (1979)).

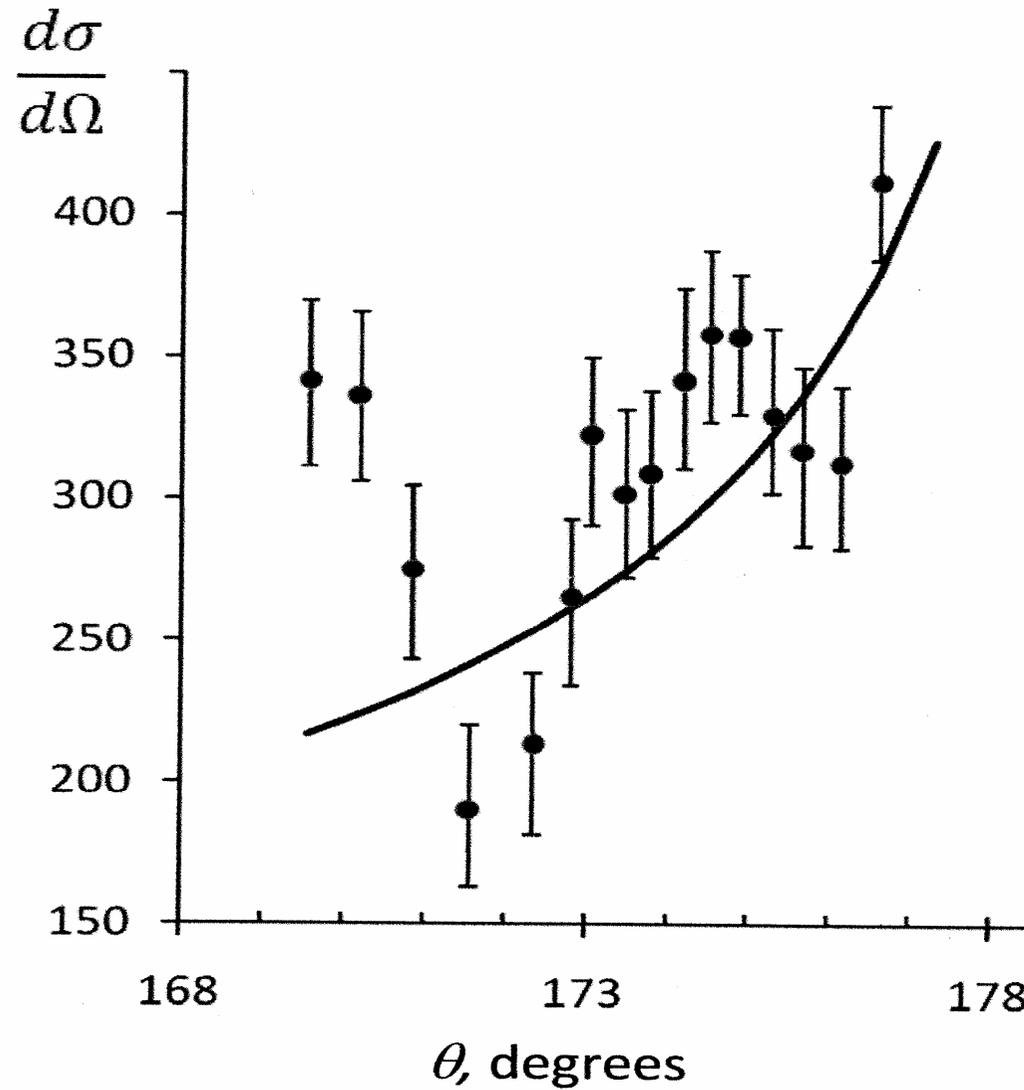


Angular distributions of secondary protons with kinetic energy between 0.06 and 0.24 GeV emitted from the Pb nucleus, in arbitrary units. The momentum of the projectile protons is 4.5 GeV/c . a) The energy of emitted protons in the interval 0.11 – 0.24 GeV ; b) the energy interval 0.08 – 0.11 GeV ; c) the energy interval 0.06 – 0.08 GeV . Data obtained by G.A.Leksin group at ITEP, taken from Fig. 3 of paper Yad.Fiz. (1986).



Angular distributions of secondary pions with kinetic energy greater 0.14 GeV emitted from the Pb nucleus, in arbitrary units. The momentum of the projectile protons is $4.5\text{ GeV}/c$. Data obtained by G.A.Leksin group at ITEP, taken from Fig. 5 of paper Yad.Fiz. (1986).

In many other cases the flat behaviour of the differential cross section near $\theta \sim \pi$ takes place, but it was probably not sufficient resolution to detect the enhancement of the cross section near $\theta = \pi$. In some experiments the deviation of the final angle from 180 deg. is large, therefore, further measurements near $\theta = \pi$ are desirable, also for kaons, hyperons as cumulative particles.



Angular distributions of secondary pions with kinetic energy greater 0.14 GeV emitted from the Pb nucleus, in arbitrary units. The momentum of the projectile protons is 4.5 GeV/c. Data obtained by G.A.Leksin group at ITEP.

Azimuthal focusing takes place for any values of the polar scattering angles θ_k^{opt} . After substitution $\sin\theta_k\varphi_k \rightarrow \varphi_k$

$$(\vec{n}_k\vec{n}_{k-1}) \simeq \cos(\theta_k - \theta_{k-1})(1 - \vartheta_k^2/2) - \sin(\theta_k - \theta_{k-1})\vartheta_k + \frac{s_{k-1}}{2s_k}\varphi_k^2 + \frac{s_k}{2s_{k-1}}\varphi_{k-1}^2 - \varphi_{k-1}\varphi_k,$$

where we introduced shorter notations $s_k = \sin\theta_k$.

The quadratic form depending on the small azimuthal deviations φ_k which enters the sum $\sum_k(1 - z_k)$ for the N -fold process is

$$Q_N^{gen}(\varphi_k, \varphi_l) = \frac{s_2}{s_1}\varphi_1^2 + \frac{s_1 + s_3}{s_2}\varphi_2^2 + \frac{s_2 + s_4}{s_3}\varphi_3^2 + \dots + \frac{s_{N-2} + s_N}{s_{N-1}}\varphi_{N-1}^2 - \\ - 2\varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2\varphi_3 - \dots - 2\varphi_{N-2}\varphi_{N-1} = \|a\|^{gen}(\theta_1, \dots, \theta_{N-1})_{kl}\varphi_k\varphi_l,$$

with $s_N = \sin\theta$. E.g., for $N = 5$ we have the matrix

$$\|a\|_{N=5}^{gen}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = \begin{bmatrix} s_2/s_1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & (s_1 + s_3)/s_2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & (s_2 + s_4)/s_3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & (s_3 + s_\theta)/s_4 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$s_\theta = s_5$, and generalization to arbitrary N is straightforward.

It can be shown by induction that at arbitrary N

$$Det(\|a\|_N^{gen}) = \frac{s_\theta}{s_1}, \quad s_\theta = s_N.$$

After integration the delta-function containing the quadratic form over the small azimuthal deviations we obtain

$$\int \delta(\Delta - \|a\|_N^{gen}(\theta_1, \dots, \theta_{N-1})_{kl}\varphi_k\varphi_l) d\varphi_1 \dots d\varphi_{N-1} = \sqrt{\frac{s_1}{s_\theta}} \frac{\Delta^{(N-3)/2}}{(N-3)!!} (2\pi)^{(N-3)/2} c_{N-3},$$

$c_n = \pi$ for odd n , and $c_n = \sqrt{2\pi}$ for even n , and $N - 3 \geq 0$, see Appendix.

Characteristic angular dependence of the cumulative particles production cross section near $\theta = \pi$:

$$d\sigma \sim \sqrt{\frac{s_1}{s_\theta}} \simeq \sqrt{\frac{s_1}{\pi - \theta}},$$

since $\sin\theta \simeq \pi - \theta$ for $\pi - \theta \ll 1$.

Дифф. сечение рождения к. частицы возрастает с ростом угла θ , и при значении

$$\theta^{crit} \simeq \pi - C_N^2 \Delta_N^{ext}, \quad \epsilon^{crit} = \pi - \theta^{crit} \simeq C_N^2 \Delta_N^{ext}$$

сравнивается с сечением при $\theta = \pi$, и может далее возрастать с ростом θ . То есть, дифф. сечение в области, включающей $\theta = \pi$, может иметь форму воронки (кратера).

$$\Delta_{typical}^{ext} \sim \theta^2/2N(N+1) < \pi^2/2[N(N+1)],$$

не превышает ~ 0.5 для $N = 3$ и быстро падает с ростом N . Поэтому значения ϵ^{crit} могут составлять лишь несколько градусов.

Включение Ферми-движения не меняет сути дела.

Азимутальная (аксиальная) фокусировка имеет место при произвольных значениях полярных углов θ_k^{opt} . После замены $(\sin\theta_k)\varphi_k \rightarrow \varphi_k$

$$(\vec{n}_k \vec{n}_{k-1}) \simeq \cos(\theta_k - \theta_{k-1})(1 - \vartheta_k^2/2) - \sin(\theta_k - \theta_{k-1})\vartheta_k + \frac{s_{k-1}}{2s_k}\varphi_k^2 + \frac{s_k}{2s_{k-1}}\varphi_{k-1}^2 - \varphi_{k-1}\varphi_k,$$

с кратким обозначением $s_k = \sin\theta_k$.

Квадрат. форма, зависящая от малых отклонений φ_k в сумме $\sum_k(1 - z_k)$ для N -кратного МП

$$Q_N^{gen}(\varphi_k, \varphi_l) = \frac{s_2}{s_1} \varphi_1^2 + \frac{s_1 + s_3}{s_2} \varphi_2^2 + \frac{s_2 + s_4}{s_3} \varphi_3^2 + \dots + \frac{s_{N-2} + s_N}{s_{N-1}} \varphi_{N-1}^2 -$$

$$-2\varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2\varphi_3 - \dots - 2\varphi_{N-2}\varphi_{N-1} = ||a||^{gen}(\theta_1, \dots, \theta_{N-1})_{kl} \varphi_k \varphi_l,$$

причем $s_N = \sin\theta$. Для $N = 5$ матрица

$$||a||_{N=5}^{gen}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = \begin{bmatrix} s_2/s_1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & (s_1 + s_3)/s_2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & (s_2 + s_4)/s_3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & (s_3 + s_\theta)/s_4 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$s_\theta = s_5$, обобщение на произвольные N очевидно.

Можно показать для произвольных N

$$Det (||a||_N^{gen}) = \frac{s_\theta}{s_1}, \quad s_\theta = s_N.$$

После интегрирования дельта-функции, содержащей эту кв. форму, по азимут. отклонениям

$$\int \delta(\Delta - ||a||_N^{gen}(\theta_1, \dots, \theta_{N-1})_{kl} \varphi_k \varphi_l) d\varphi_1 \dots d\varphi_{N-1} = \sqrt{\frac{s_1}{s_\theta}} \frac{\Delta^{(N-3)/2}}{(N-3)!!} (2\pi)^{(N-3)/2} c_{N-3},$$

$c_n = \pi$ для нечетных n , и $c_n = \sqrt{2\pi}$ для четных n , $N - 3 \geq 0$.

В результате угл. зависимость сечения вблизи от $\theta = \pi$:

$$d\sigma \sim \sqrt{\frac{s_1}{s_\theta}} \simeq \sqrt{\frac{s_1}{\pi - \theta}},$$

так как $\sin\theta \simeq \pi - \theta$ при $\pi - \theta \ll 1$.

Выводы и перспективы

* Эффект обратной фокусировки (ядерная gloria-эффект), обнаруженный в ОИЯИ (Дубна) и ИТЭФ (Москва) в 70-е и 80-е – характерное свойство многократных процессов (кратность ≥ 3) приводящих к образованию кумулятивных частиц.

Универсальная зависимость сечения $d\sigma \sim 1/\sqrt{\pi - \theta}$ вблизи $\theta \sim \pi$

* Это указание на то, что МП существенны в кумулятивном рождении. Вклады флуктуонов или барионных (многокварковых) кластеров НЕ исключаются.

* Было бы важно наблюдать этот эффект для различных к. частиц, в том числе каонов и гиперонов. Возможны следствия для космофизики.

* Объяснение основано на почти элементарной математике. Нерешенная проблема - поведение сечения вблизи $\theta = \pi$, (возможно, численные методы помогут ее решить).

backup

6 Useful relations

Here we present for the readers convenience some formulas and relations which have been used in sections 3 and 4.

$$I_n(\Delta) = \int \delta(\Delta - x_1^2 - \dots - x_n^2) dx_1 \dots dx_n = \pi \frac{(2\pi)^{(n-2)/2}}{(n-2)!!} \Delta^{(n-2)/2}$$

for integer even n .

$$I_n(\Delta)_n = \int \delta(\Delta - x_1^2 - \dots - x_n^2) dx_1 \dots dx_n = \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{(n-2)!!} \Delta^{(n-2)/2}$$

for integer odd n . Relations

$$\int_0^\pi \sin^{2m} \theta d\theta = \pi \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}; \quad \int_0^\pi \sin^{2m-1} \theta d\theta = 2 \frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!},$$

m — integer, allow to check (A1) and (A2) easily.

$$\int \delta(\Delta - x_1^2 - \dots - x_n^2) \delta(x_1 + x_2 + \dots + x_n) dx_1 \dots dx_{n-1} dx_n = \frac{1}{\sqrt{n}} I_{n-1}(\Delta)$$

More generally, for any quadratic form in variables x_k , $k = 1, \dots, n$ after diagonalization we obtain

$$\int \delta(\Delta - a_{kl} x_k x_l) dx_1 \dots dx_n = \int \delta(\Delta - x_1'^2 - \dots - x_n'^2) \frac{dx_1' \dots dx_n'}{\sqrt{\det ||a||}} = \frac{1}{\sqrt{\det ||a||}} I_n(\Delta).$$

The equality also holds for the (inverse) Jacobian of the transformation t of our quadratic form to the canonical form:

$$J_a^2(z) = \det ||a||, \quad J_a(z) = \sqrt{\det ||a||}.$$

It follows from the basic relation

$$\tilde{t} a t = \mathcal{I},$$

where \mathcal{I} is unit matrix $n \times n$, and $\tilde{t}_{kl} = t_{lk}$, so

$$(\det ||t||)^{-2} = \det ||a||, \quad J(a) = \frac{1}{\det ||t||} = \sqrt{\det ||a||}. \quad (A.8)$$

To obtain the relation (4.2) we write, first

$$Q_{N+1}(z, \varphi_k, \varphi_l) = Q_N(\varphi_k, \varphi_l) + \varphi_N^2 - \varphi_N \varphi_{N-l}/z, \quad (4.3)$$

then rewrite this form similar to Eq. (4.1) and write down the equality for the last several terms

$$\frac{J_N^2}{J_{N-1}^2} \varphi_{N-1}^2 + \varphi_N^2 - \frac{\varphi_N \varphi_{N-1}}{z} = \frac{J_N^2}{J_{N-1}^2} \left(\varphi_{N-1} - \frac{J_{N-1}^2 \varphi_N}{J_N^2 2z} \right) + \frac{J_{N+1}^2}{J_N^2} \varphi_N^2. \quad (A9)$$

From equality of coefficients before φ_N^2 in the left and right sides we obtain

$$1 = \frac{J_{N-1}^2}{4z^2 J_N^2} + \frac{J_{N+1}^2}{J_N^2} \quad (A10),$$

and equation (4.2) follows immediately.

The relation can be obtained from Eq. (4,2)

$$J_N^2(z) = J_{N-k}^2 J_{k+1}^2 - \frac{1}{4z^2} J_{N-k-1}^2 J_k^2 \quad (A.11)$$

which, at $N = 2m$, $k = m$ (m is the integer), leads to remarkable relation

$$J_{2m}^2 = J_m^2 \left(J_{m+1}^2 - \frac{1}{4z^2} J_{m-1}^2 \right). \quad (A.12)$$

Relation (A.10) can be verified easily for J_4^2 , J_6^2 and J_8^2 , see section 4. It follows from (A.10) that at $N = 2m$ not only $J_N(\pi/N) = 0$, but also $J_N(2\pi/N) = 0$ which has quite simple explanation.

For the odd values of N another useful factorization property takes place:

$$J_{2m+1}^2 = (J_{m+1}^2)^2 - \frac{1}{4z^2} (J_m^2)^2 = \left(J^{m+1} - \frac{1}{2z} J_m^2 \right) \left(J^{m+1} + \frac{1}{2z} J_m^2 \right), \quad (A.13)$$

which can be easily verified for J_7^2 and J_5^2 given in section 4.

The polinomials J_N^2 and equations for $z_N^\pi = \cos(\pi/N)$ can be obtained in more conventional way. There is an obvious equality

$$[\exp(i\pi/N)]^N = \exp(i\pi) = -1 \quad (A.14)$$

It can be written in the form

$$[\cos(\pi/N) + i\sin(\pi/N)]^N = -1, \quad (A.15)$$