

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт ядерных исследований Российской академии наук

На правах рукописи

Никифорова Василиса Викторовна

**Космологические решения в теории гравитации
с динамическим кручением**

01.04.02 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, академик РАН
Рубаков Валерий Анатольевич

Москва – 2018

Содержание

Введение	4
Глава 1. Описание модели	12
1.1. Лагранжиан	12
1.2. Уравнения поля	16
Глава 2. Взаимодействие источников на фоне пространства Минковского	18
Глава 3. Самоускоряющееся решение	24
3.1. Космологические решения	24
3.2. Самоускоряющееся решение	28
Глава 4. Малые возмущения на фоне самоускоряющегося решения. Общие положения	32
4.1. Общие положения. Обобщенные тождества Бьянки	32
4.2. Конформное время и конформное преобразование метрики	34
4.3. Параметризация космологическим возмущений: преобразование Фурье и разложение по спиральностям	36
Глава 5. Малые возмущения на фоне самоускоряющегося решения. Случай большого фонового кручения. Скалярный сектор 43	
5.1. Приведение системы уравнений скалярного сектора к системе четырех дифференциальных уравнений первого порядка	44
Глава 6. Малые возмущения на фоне самоускоряющегося решения. Случай малого фонового кручения	59
6.1. Общие положения. Разложение по степеням z	59
6.2. Скалярный сектор	68

6.3. Тензорный сектор	74
6.4. Векторный сектор	80
Заключение	88
Приложение А. Уравнения для тензорных возмущений	92
Приложение Б. Уравнения для векторных возмущений	95
Приложение В. Уравнения для скалярных возмущений	101
В.1. Записанные в терминах z в A -параметризации (используются в случае малого фонового кручения)	101
В.2. Записанные в терминах β , $\tilde{\beta}$, \mathfrak{f} , \mathfrak{g} , Λ и в K -параметризации (используются в случае большого фонового кручения)	107
Литература	117

Введение

С момента своего возникновения более века назад [1, 2], общая теория относительности Эйнштейна (ОТО) находится в отличном согласии со всеми гравитационными наблюдениями и экспериментами (для обзора тестов ОТО см., например, [3, 4]). Тем не менее, поиск модифицированных теорий гравитации, включающих в себя ОТО в качестве некоторого предела, сохраняет актуальность. Существует несколько причин интереса к модифицированным или расширенным теориям гравитации, в частности: (i) поиск альтернативных теорий для интерпретации экспериментальных данных не только с точки зрения ОТО; (ii) поиск альтернативного объяснения нескольких примечательных космологических фактов, таких как необходимость постулировать существование как темной материи, так и темной энергии, значительно превышающих количество видимой материи во Вселенной.

Остановимся на последнем из вышеперечисленных пунктов. Стандартный путь объяснения экспериментальных данных по ускоренному расширению Вселенной, предлагаемый космологической моделью Λ CDM, предполагает добавления чрезвычайно малой космологической постоянной в уравнения Эйнштейна. Однако, вместо этого подхода можно предположить, что ускоренное расширение Вселенной объясняется не наличием темной энергии, а неполнотой принятой за основу гравитационной теории (ОТО). Иными словами, ОТО является пределом некоторой более универсальной теории, объясняющей ускоренное расширение Вселенной без введения космологической постоянной. В частности, было предложено много модифицированных теорий гравитации, предлагающих для объяснения современного ускоренного расширения Вселенной некий динамический механизм самоускорения, связанный с нетривиальной инфракрасной физикой. Среди таких самоускоряющихся вселенных можно упомянуть следующие: теории с высшими производными [5, 6], тео-

рии с дополнительными измерениями [7, 8], биметрические теории гравитации [9, 10], массивная гравитация [11, 10], теории с галилеонами [12], обобщенные скалярно-тензорные теории [13]. Актуальный обзор моделей ускоренного расширения, основанных на модифицированной теории гравитации, можно найти в работе [14].

Эндемической проблемой самоускоряющихся космологических моделей, основанных на модифицированной гравитации, является наличие *неустойчивостей* различного рода: тахионов, духов, градиентных неустойчивостей. Неустойчивости, по-видимому, являются необходимым следствием многих механизмов самоускорения. Примеры неустойчивостей в самоускоряющихся вселенных можно найти, например, в работах [5, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22]. Обзор всевозможных неустойчивостей дан, например, в работе [23, 24].

В настоящей работе мы обсуждаем класс теорий модифицированной гравитации, феноменологии которых было уделено относительно мало внимания (по сравнению с упомянутыми выше моделями), хотя они имеют ряд привлекательных особенностей. Этот класс теорий обобщает ОТО путем включения динамического кручения в дополнение к динамической метрике (или тетрадам). Далее в тексте мы будем называть такие теории *гравитацией с динамическим кручением* (ГДК). Гравитация с динамическим кручением возникла как расширение теории Эйнштейна–Картана [25, 26]. Последняя определяется тем, что в действии скаляр кривизны является функцией как метрики, так и сохраняющей метрику несимметричной аффинной связности. В теории Эйнштейна–Картана кручение не является динамическим, то есть в отсутствие источников кручения теория сводится к ОТО. В динамической теории гравитации, представленной и исследованной в работах [27, 28, 29, 30, 31, 32], в отличие от теории Эйнштейна–Картана, действие содержит слагаемые, квадратичные по тензорам кручения и кривизны. Последний построен с помощью несимметричной аффинной связности.

Такая теория гравитации может быть интерпретирована как калибровочная теория с калибровочной группой Пуанкаре (для подробного исторического обсуждения идеи гравитации как калибровочной теории, начиная с рассмотрения теории Эйнштейна-Картана как калибровочной теории группы Пуанкаре, см. [33]).

В связи с этим, теории гравитации с динамическим кручением часто рассматриваются в контексте так называемой калибровочной теории гравитации Пуанкаре (ПГТ). Характерной чертой ПГТ является то, что в этой теории поле связности непосредственно взаимодействует со спином материи. Такое взаимодействие приводит к сильным ограничениям на величину фонового кручения во Вселенной [34]. Однако это не единственный способ построения взаимодействия гравитации с материей. Другой подход заключается в том, чтобы считать, что взаимодействие с материей устроено в точности так же, как в ОТО. В настоящей работе мы не ограничиваемся рамками ПГТ и считаем, что величина кручения может быть произвольной.

В работах Хаяши и др. [27, 28, 29, 30], а также Сезгин и др. [31, 32], был рассмотрен общий 10-параметрический лагранжиан гравитации с динамическим кручением, содержащий, помимо линейного по кривизне слагаемого, различные квадратичные инварианты по кривизне и кручению. Были изучены линейные возмущения на фоне пространства Минковского [30, 32] и описан их спектр. Выяснилось, что, в общем случае, в спектре присутствуют возмущения спинов 0, 1 и 2. Было описано 18 различных параметрических областей, внутри которых линейные возмущения стабильны и не выказывают ни духовыми, ни тахионных, ни градиентных нестабильностей. В настоящей диссертации рассматривается один из этих параметрических классов. При соответствующих ему ограничениях на параметры лагранжиана в теории над пространством Минковского имеются, помимо стандартной безмассовой моды спина 0, стабильные массивные возмущения со спинами 0 и 2. Таким образом,

рассматриваемая модель представляет из себя модель массивной гравитации с безмассовым гравитоном и дополнительным массивным гравитоном, отвечающим за модификацию гравитации на больших масштабах.

После исследования стабильности возмущений на фоне плоского пространства-времени естественно рассмотреть вопрос о стабильности на фоне искривленного пространства-времени, и, прежде всего, о наличии явления Бульвара–Дезера [35]. Это явление заключается в появлении на фоне искривленного пространства-времени новых (по сравнению со спектром на фоне пространства Минковского) степеней свободы, которые обычно имеют неправильный знак кинетического члена. Многие теории массивной гравитации демонстрируют явление Бульвара–Дезера. Помимо явления Бульвара–Дезера, в спектре на фоне искривленного пространства-времени могут появиться другие нестабильности: духовые моды или градиентные неустойчивости.

С этой целью в работах [36, 37, 38] были исследованы линейные возмущения на фоне произвольного четырехмерного многообразия Эйнштейна с нулевым кручением. Было показано, что число степеней свободы линейных возмущений, распространяющихся на фоне многообразия Эйнштейна, равно числу степеней свободы линейных возмущений на фоне пространства Минковского. То есть, явление Бульвара–Дезера не наблюдается. Этот результат является неожиданным, принимая во внимание тот факт, что моды Бульвара–Дезера возникают во многих теориях массивного поля спина два при рассмотрении последних на фоне искривленного пространства-времени. Кроме того, было показано, что спектр линейных возмущений на фоне многообразия Эйнштейна с нулевым кручением не содержит ни духовых, ни тахионных мод, ни градиентных неустойчивостей, по крайней мере, при достаточно малой кривизне фонового пространства. Таким образом, рассматриваемая модель продемонстрировала нетривиальные свойства стабильности и требовала дальнейшего изучения.

Далее, так как мы интересуемся космологическими следствиями инфракрасной модификации гравитации, естественно спросить, допускают ли модели с динамическим кручением самоускоряющиеся космологические решения без явного присутствия космологической постоянной в лагранжиане. Решения такого рода действительно были найдены в различных моделях гравитации с динамическим кручением [39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47]. Ключевым вопросом является стабильность самоускоряющихся решений: так как в других самоускоряющихся космологических моделях такие решения часто являются неустойчивыми из-за присутствия в спектре нестабильностей (например, модель Двали–Габададзе–Поратти [48], которая допускает как решение в виде пространства Минковского, так и самоускоряющееся решение [8], однако последнее демонстрирует духовую нестабильность [17]). Исследование стабильности самоускоряющегося решения, однако, представляет собой нетривиальную задачу по причине сложности и громоздкости вычислений.

В диссертации исследована одна из моделей модифицированной теории гравитации с кручением, играющим роль динамического поля. Внимание сосредоточено на рассмотрении этой модели в качестве инфракрасной модификации ОТО, а также на применимости этой модели к альтернативному описанию наблюдаемого ускоренного расширения Вселенной.

Изучено взаимодействие источников гравитационного поля и поля связности на фоне плоского пространства-времени. Это исследование проясняет механизм модификации гравитации, основанный на наличии как безмассового, так и массивной возмущения спина 2, осуществляющих гравитационное взаимодействие. Прояснен механизм генерации поля связности: а именно, показано, что нетривиальная связность (с ненулевым кручением) генерируется даже в отсутствие источников связности, при наличии в качестве источника только симметричного тензора энергии-импульса. Этот результат показывает, что кручение может генерироваться вдали от спиновой материи, которая стан-

дартно считается источником кручения.

В исследуемой модели найдено новое самоускоряющееся решение. Заметим, что в других моделях гравитации с динамическим кручением другими авторами также были найдены самоускоряющиеся решения. Но, несмотря на то, что такие самоускоряющиеся решения на первый взгляд открывают возможность построения модели экспоненциального космологического расширения, отличающейся от текущей парадигмы модели Λ CDM, принципиальным пунктом при проверке жизнеспособности таких моделей является исследование поведения возмущений на фоне найденных самоускоряющихся решений. Такое исследование выполнено в данной диссертационной работе.

Разработаны новые методы аналитического исследования поведения линейных возмущений на фоне космологического решения в модели гравитации с динамическим кручением. Для манипуляций с уравнениями поля и вычисления дисперсионных соотношений написаны компьютерные коды для вычислительных сред Maple и Mathematica.

Разработанные методы могут быть использованы для исследования стабильности линейных возмущений в других моделях класса гравитации с динамическим кручением. Более того, данные методы могут быть полезны для исследования широкого различных моделей модифицированной гравитации.

Диссертация организована следующим образом. В первой главе приведено подробное описание исследуемой модели: выписан лагранжиан, определены основные входящие в него величины, выписаны уравнения поля, указаны ограничения на параметры лагранжиана и описаны результаты, полученные для этой модели в ранних работах.

Во второй главе рассмотрено линеаризованное взаимодействие источников на фоне плоского пространства-времени. Получено действие, описывающее взаимодействие источников. Рассмотрен частный случай — взаимодействие источников, связанных с тетрадами, но не связанных напрямую со связностью.

Получены выражения для возмущений метрики и связности в этом случае.

В третьей главе описан процесс получения самоускоряющегося решения. Найденное решение описывается метрикой де-Ситтера и ненулевым кручением, ответственным за самоускоренное расширение. Доказано существование решения в соответствующей области параметров модели.

В четвертой главе выполнены предварительные вычисления для получения системы уравнений, описывающей линейные возмущения на фоне самоускоряющегося решения. Возмущения тетрады и кручения разложены на компоненты по секторам с определенной спиральностью: ноль (скалярный), один (векторный) и два (тензорный). В общем виде получены тождества Бьянки, связывающие уравнения поля между собой.

В пятой главе линейные возмущения рассмотрены для случая, когда величина фонового кручения много больше, чем параметр Хаббла. В силу того, что нестабильности, если таковые имеются, как правило, проявляются в скалярном секторе возмущений, выполнен анализ возмущений именно в этом секторе. Обнаружено, что число степеней свободы в скалярном секторе возмущений на фоне самоускоряющегося решения равно числу степеней свободы в скалярном секторе возмущений на фоне пространства Минковского. Таким образом, явление Бульвара-Дезера здесь места не имеет. Обнаружена экспоненциальная нестабильность, которую не удастся устранить подбором параметров. Поэтому рассмотрения векторного и тензорного секторов не проводилось.

В шестой главе рассмотрен случай, когда фоновое кручение по порядку величины равно параметру Хаббла. Получены дисперсионные соотношения для мод скалярного, векторного и тензорного секторов. Показано, что явления Бульвара-Дезера не наблюдается. Обнаружена неустранимая градиентная нестабильность в векторном секторе возмущений.

В Заключение приводится краткая сводка результатов работы. Уравнения поля для скалярного, векторного и тензорного секторов приведены в При-

ложениях.

Основные результаты диссертации доложены на конференциях: «Межинститутская молодежная конференция „Физика элементарных частиц и космология“» (Москва, 12 ноября 2014), «Космология и квантовый вакуум» (Сеговия, Испания, 4-8 сентября 2017),

на международных семинарах «Кварки-2016» (29 мая 2016 – 4 июня 2016), «Кварки-2018» (27 мая 2018 – 2 июня 2018),

на международных школах: «Школа по современной астрофизике» (Санкт-Петербург, 15–26 июля 2014), «Международная школа по астрофизике „Франческо Лучин“» (Терамо, Италия, 9–13 декабря 2014), «32-я зимняя школа по теоретической физике: 100 лет общей теории относительности» (Иерусалим, Израиль, 29 декабря 2014 – 8 января 2015), «Международная школа по субъядерной физике» (Эриче, Италия, 24 июня–3 июля 2015),

на семинарах: в ИЯИ РАН (Москва, 28 марта 2016, 14 мая 2018), Ереванском Институте Физики (Ереван, Армения, 29 апреля 2016).

Основные результаты диссертации опубликованы в 5 статьях в рецензируемых научных изданиях [38, 49, 50, 51, 52].

Глава 1

Описание модели

1.1. Лагранжиан

Итак, в данной работе мы рассматриваем 6-параметрический класс моделей гравитации с динамическим кручением. Он описывается действием, базовыми полями которого являются (помимо тех, что описывают материю — мы не рассматриваем их здесь) связность $A_{ij\mu} = -A_{ji\mu}$ и тетрады e_i^μ ($e_i^\mu e_j^\nu = \delta_j^i$). Мы используем обозначения, принятые в работах [27, 28, 29, 30]: сигнатура метрики положительно определена; индексы $i, j, k, \dots = 0, 1, 2, 3$ обозначают индексы касательного пространства (лоренцевы индексы), они поднимаются и опускаются с помощью метрики Минковского η_{ij}, η^{ij} , тогда как греческие индексы $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ обозначают индексы искривленного пространства-времени, которые поднимаются и опускаются с помощью метрики координатной системы x^μ : $g_{\mu\nu} \equiv \eta_{ij} e_i^\mu e_j^\nu$. Таким образом, соответствующие индексы поднимаются и опускаются с помощью соответствующих метрик, и для ясности мы будем стараться всегда писать лоренцев индекс первым, например: $e_{i\mu} = \eta_{ij} e_j^\mu = g_{\mu\nu} e_i^\nu$. В случаях, допускающих неоднозначное толкование индексов, мы будем писать над лоренцевым индексом значок тильды: $e_{\tilde{i}\mu}$.

Действие записывается в виде (здесь и далее: $|e| \equiv \det e_i^\mu = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}}$)

$$S[e_i^\mu, A_{ij\mu}] = \int d^4x |e| L[e, \partial e, \partial^2 e, A, \partial A], \quad (1.1)$$

где

$$L = \frac{3}{2} \tilde{\alpha} F[e, A, \partial A] - \frac{3}{2} \alpha R[e, \partial e, \partial^2 e] + c_2 + c_3 F^{ij} F_{ij} + c_4 F^{ij} F_{ji} + c_5 F^2 + c_6 (\epsilon^{ijkl} F_{ijkl})^2, \quad (1.2)$$

где $\alpha, \tilde{\alpha}, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ — константы связи¹, а ϵ^{ijkl} обозначает символ

¹ Также в последующих главах мы будем использовать константу $\bar{\alpha}$: $\bar{\alpha} \equiv -\alpha$

Леви–Чивиты, причем $\epsilon^{0123} = +1$. Далее, $R[e, \partial e, \partial^2 e]$ — обычный тензор кривизны Эйнштейна, определяемый через $e^i{}_\mu$, тогда как $F[e, A, \partial A]$ — тензор кривизны, посчитанный с помощью связности $A_{ij\mu}$:

$$R_{ijkl} = e_k{}^\mu e_l{}^\nu (\partial_\mu \omega_{ij\nu} - \partial_\nu \omega_{ij\mu} + \eta^{mn} \omega_{im\mu} \omega_{nj\nu} - \eta^{mn} \omega_{im\nu} \omega_{nj\mu}) , \quad (1.3)$$

$$F_{ijkl} = e_k{}^\mu e_l{}^\nu (\partial_\mu A_{ij\nu} - \partial_\nu A_{ij\mu} + \eta^{mn} A_{im\mu} A_{nj\nu} - \eta^{mn} A_{im\nu} A_{nj\mu}) . \quad (1.4)$$

Другие объекты (тензоры и скаляры Риччи, посчитанные с помощью $\omega_{ij\mu}$ (R_{ij} , R) и $A_{ij\mu}$ (F_{ij} , F)), входящие в действие, определены как

$$R_{ij} = \eta^{kl} R_{kilj} = \eta^{kl} R_{ikjl} , \quad R = \eta^{ij} R_{ij} , \quad (1.5)$$

$$F_{ij} = \eta^{kl} F_{kilj} = \eta^{kl} F_{ikjl} , \quad F = \eta^{ij} F_{ij} . \quad (1.6)$$

Заметим, что и R_{ijkl} , и F_{ijkl} антисимметричны относительно замены $i \leftrightarrow j$ и $k \leftrightarrow l$. Однако, в отличие от R_{ijkl} , тензор F_{ijkl} не симметричен относительно замены $ij \leftrightarrow kl$, так что F_{ij} по умолчанию отличается F_{ji} .

Для краткости мы иногда будем сворачивать лоренцевы индексы без явного указания метрики Минковского: например, выражение типа $\eta^{mn} A_{im\mu} A_{nj\nu}$ мы будем записывать просто как $A_{im\mu} A_{mj\nu}$ или как $A_{im\mu} A^m{}_{j\nu}$, что следует считать одним и тем же.

Компоненты Римановой связности $\omega_{ij\mu}$ выражаются через компоненты тетрад в следующем виде:

$$\omega_{ij\mu} = \omega_{ijk} e_\mu^k = \frac{1}{2} (C_{ijk} + C_{jki} - C_{kij}) e_\mu^k , \quad (1.7)$$

где

$$C_{ijk} \equiv (\partial_\mu e_{i\nu} - \partial_\nu e_{i\mu}) e_j{}^\mu e_k{}^\nu \quad (1.8)$$

симметричен по индексам j, k . Тензор кручения определяется как

$$T_{ijk} = A_{ijk} - A_{ikj} - C_{ijk}, \quad (1.9)$$

он также симметричен по последним двум индексам. Можно разрешить последнее уравнение относительно A_{ijk} и получить его выражение в терминах $T_{ijk} + C_{ijk}$; оно выглядит следующим образом:

$$A_{ijk} = \omega_{ijk} + K_{ijk}, \quad (1.10)$$

где ω_{ijk} выражена через C_{ijk} как в уравнении (1.7), а $K_{ijk} = -K_{jik}$ — так называемый тензор *ко-кручения*. Он определен следующим образом:

$$K_{ijk} = \frac{1}{2}(T_{ijk} + T_{jki} - T_{kij}), \quad (1.11)$$

обратное выражение выглядит так:

$$T_{ijk} = K_{ijk} - K_{ikj}. \quad (1.12)$$

Приведем также выражение $K_{ij\mu} \equiv K_{ijk}e^k{}_{\mu}$ в терминах $\omega_{ij\mu}$ и $A_{ij\mu}$:

$$K_{ij\mu} = A_{ij\mu} - \omega_{ij\mu}. \quad (1.13)$$

Заметим, что тензор T_{ijk} может быть разложен по неприводимым представлениям группы $O(1, 3)$ следующим образом:

$$T_{ijk} = \frac{2}{3}(t_{ijk} - t_{ikj}) + \frac{1}{3}(\eta_{ij}v_k - \eta_{ik}v_j) + \epsilon_{ijkl}a^l, \quad (1.14)$$

где тензор t_{ijk} симметричен по индексам i и j и удовлетворяет следующим равенствам:

$$t_{ijk} + t_{jki} + t_{kij} = 0, \quad \eta^{ij}t_{ijk} = 0, \quad \eta^{ik}t_{ijk} = 0.$$

Можно показать, что действие (1.3) можно эквивалентно переписать в следующей форме:

$$\begin{aligned} L_{ALT} = & c_2 + \frac{3}{2}(\tilde{\alpha} - \alpha)F + \alpha(t_{ijk}t^{ijk} - v_i v^i + \frac{9}{4}a_i a^i) \\ & + c_3 F^{ij} F_{ij} + c_4 F^{ij} F_{ji} + c_5 F^2 + c_6 (\epsilon \cdot F)^2. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Нам будет удобно использовать лагранжиан в форме (1.15) с главе 2.

Рассматриваемый здесь шестипараметрический (не считая c_2) лагранжиан (1.15) исследовался ранее в работах [31, 32, 27, 28, 29, 30], где было исследовано поведение теории на фоне пространства Минковского. Было показано, что теория имеет непатологические степени свободы в большой области параметрического пространства. А именно, при следующих ограничениях на параметры:

$$\tilde{\alpha} > 0, \quad \bar{\alpha} > 0, \quad c_5 < 0, \quad c_6 > 0, \quad (1.16)$$

а также при наличии связи

$$c_3 + c_4 = -3c_5. \quad (1.17)$$

в теории присутствует, помимо безмассового гравитона, также массивное поле спина 2 и массивное псевдоскалярное поле с массами, соответственно:

$$m_2^2 = \frac{\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha} - \alpha)}{2\alpha c_5} > 0, \quad (1.18)$$

$$m_0^2 = \frac{\tilde{\alpha}}{16c_6} > 0, \quad (1.19)$$

и все перечисленные возмущения стабильны и не являются ни духами, ни тахионами. В нашей работе мы рассматриваем модель, реализующуюся в области параметрического пространства (1.16)–(1.17).

В работах [36, 37, 38] было доказано, что в исследуемой модели возникают стабильные возмущения на фоне максимально-симметричных пространств, а также на фоне произвольного многообразия Эйнштейна достаточно малой кривизны. Спектр возмущений, как и в случае пространства Минковского, содержит безмассовое поле спина два, а также массивные поля спинов два и ноль, причем массы последних при стремлении $c_2 \rightarrow 0$ совпадают с массами соответствующих возмущений на фоне пространства Минковского.

1.2. Уравнения поля

В уравнении (1.3) мы явно указали зависимость обоих тензоров кривизны от связности, тетрады и производных тетрады. Все слагаемые, содержащие F_{ij} или F_{ijkl} , точно так же, как и слагаемое $\frac{3}{2}\tilde{\alpha} F[e, A, \partial A]$, зависят от e , A и ∂A . Замечая, что вторая производная тетрады, содержащаяся в $R[e, \partial e, \partial^2 e]$, входит в действие исключительно линейно, мы видим, что действие содержит производные полей e и A не старше второго порядка. Таким образом, уравнения поля будут содержать производные не более чем второго порядка по e и A .

Уравнения поля, вытекающие из действия (1.3), удобно записать в виде:

$$\frac{\delta S}{\delta e^i{}_\mu} = -2|e|e^{j\mu}\widehat{\mathcal{G}}_{ji}; \quad \frac{\delta S}{\delta A_{ij\mu}} = |e|\widehat{\mathcal{T}}^{ijk}e_k{}^\mu. \quad (1.20)$$

Уравнение $\widehat{\mathcal{G}}_{ij}$, возникающее при варьирование по тетраде, выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{G}}_{ij} \equiv & \frac{3}{2}\tilde{\alpha} \left(F_{ij} - \frac{1}{2}\eta_{ij}F \right) + \frac{3}{2}\bar{\alpha} \left(R_{ij} - \frac{1}{2}\eta_{ij}R \right) \\ & - \frac{1}{2}c_2\eta_{ij} + c_3(F_{ki}F_{kj} + F_{kl}F_{kilj}) \\ & + c_4(F_{ik}F_{kj} + F_{lk}F_{kilj}) + 2c_5FF_{ij} \\ & + 2c_6\epsilon_{klmi}F_{klmj}(\epsilon \cdot F) - \frac{1}{2}\eta_{ij}L^{(2)} = 0, \end{aligned} \quad (1.21)$$

где

$$L^{(2)} = c_3F_{ij}F_{ij} + c_4F_{ij}F_{ji} + c_5F^2 + c_6(\epsilon \cdot F)^2 \quad (1.22)$$

— часть лагранжиана, квадратичная по F_{ijkl} . Заметим, что $\widehat{\mathcal{G}}_{ij}$ не симметрично по индексам ij . Уравнение (1.21) содержит производные второго порядка от тетрады e и только первого порядка — по связности A .

Следующие величины потребуются нам, чтобы выписать уравнение $\widehat{\mathcal{T}}_{ijk}$:

$$H_{ijk} \equiv \frac{3\tilde{\alpha}}{2} (K_{ikj} - K_{jki} - K_{ill}\eta_{jk} + K_{jll}\eta_{ik}), \quad (1.23)$$

$$P_{ij} \equiv c_3 F_{ij} + c_4 F_{ji} ; P \equiv \eta^{ij} P_{ij} , \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} S_{ijk} &= \frac{2}{3\tilde{\alpha}} H_{mnk} \left(\eta_{im} P_{jn} - \eta_{jm} P_{in} - \frac{2}{3} \eta_{im} \eta_{jn} P \right. \\ &\quad \left. + 2c_6 \epsilon_{ijmn} (\epsilon \cdot F) \right) . \end{aligned} \quad (1.25)$$

В терминах этих величин уравнение, полученное варьированием действия (1.3) по $A_{ij\mu}$, запишется в виде:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{T}}_{ijk} &\equiv \left[\eta_{ik} \left(D_m P_{jm} - \frac{2}{3} D_j P \right) - D_i P_{jk} \right] \\ &\quad - \left[\eta_{jk} \left(D_m P_{im} - \frac{2}{3} D_i P \right) - D_j P_{ik} \right] \\ &\quad + 4c_6 \epsilon_{ijkm} D_m (\epsilon \cdot F) + H_{ijk} + S_{ijk} = 0 . \end{aligned} \quad (1.26)$$

Используемая здесь и далее производная D_i определена с помощью связности $A_{ij\mu}$:

$$D_i B_j \equiv e_i^\mu D_\mu B_j = e_i^\mu (\partial_\mu B_j + A_{jk\mu} B_k) . \quad (1.27)$$

Заметим, что уравнение (1.26) содержит производные второго порядка по A и производные первого порядка по e .

Глава 2

Взаимодействие источников на фоне пространства Минковского

Рассмотрим теперь линеаризованную теорию на фоне пространства Минковского и изучим взаимодействие между источниками. Здесь мы преследуем несколько целей. Во-первых, мы подтвердим, что все моды в линеаризованной относительно плоского пространства-времени теории стабильны и не являются ни духами, ни тахионами. Во-вторых, мы увидим, что взаимодействие между источниками, связанными с тетрадами и не связанными непосредственно со связностью, происходит посредством как безмассового, так и массивного полей спина-2. Поэтому наша модель действительно является инфракрасной модификацией гравитации. Наконец, мы увидим, что ненулевое кручение генерируется даже в отсутствие источников кручения. Иными словами, масса создает кручение пространства-времени.

Обозначим источники, взаимодействующие с тетрадами и со связностью, как J_i^μ и $S^{ij\mu}$ соответственно, и введем в действие дополнительное слагаемое, описывающее взаимодействие:

$$S_{source} = \int d^4x \left(2h_\mu^i J_i^\mu - \frac{1}{2} A_{ij\mu} S^{ij\mu} \right), \quad (2.1)$$

где h_μ^i определено как

$$e_\mu^i = \delta_\mu^i + h_\mu^i.$$

Мы также будем работать с объектами J^{ij} , S^{ijk} , определенными как $J^{ij} = J^{i\mu} \delta_\mu^j$, $S^{ijk} = S^{ij\mu} \delta_\mu^k$. Заметим, что источник J^{ij} в общем случае не симметричен.

Рассматриваемая теория инвариантна относительно локальных лоренцевых преобразований и глобальных координатных преобразований (мы подробно остановимся на этом в разделе 4.1). Требование того, что взаимодействие

(2.1) должно быть инвариантным относительно этих преобразований, дает следующие два закона сохранения:

$$\partial^j J_{ij} = 0 \quad (2.2)$$

и

$$\partial_l S^{ijl} = 4J^{[ij]} . \quad (2.3)$$

Заметим, что из уравнения (2.2) следует

$$\partial^j J_{(ij)} = -\partial^j J_{[ij]} . \quad (2.4)$$

Также мы можем использовать калибровочную симметрию для того, чтобы сделать h_{ij} симметричным (мы обсудим это подробнее в разделе 4.3.2). Так что в дальнейшем мы будем полагать, что выполнено равенство $h_{ij} = h_{ji}$.

Выпишем линеаризованные на фоне пространства Минковского уравнения поля с учетом взаимодействия. Нам будет удобно вывести их из действия в форме (1.3). Уравнение, полученное варьированием по тетраде, имеет вид:

$$c_1 \left(F_{ji} - \frac{1}{2} \eta_{ij} F \right) + \alpha \partial^k \left[(t_{ijk} - t_{ikj}) - (\eta_{ij} v_k - \eta_{ik} v_j) - \frac{3}{4} \varepsilon_{ijkl} a^l \right] = J_{ij} \quad (2.5)$$

Заметим, что антисимметричная часть этого уравнения имеет вид

$$F_{[ij]} = -\frac{2}{3\alpha} J_{[ij]} , \quad (2.6)$$

то есть $F_{[ij]}$ является константой. Таким образом, динамической частью является симметричная часть уравнения (2.5), а именно:

$$c_1 \left(F_{(ji)} - \frac{1}{2} \eta_{ij} F \right) + \partial^k F_{(ij)k} = J_{(ij)} \quad (2.7)$$

Уравнение, полученное варьированием по связности, при наличии взаимодей-

ствия принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
& c_3 (\eta^{ik} \partial_m F^{jm} - \eta^{jk} \partial_m F^{im} - \partial^i F^{jk} + \partial^j F^{ik}) \\
& + c_4 (\eta^{ik} \partial_m F^{mj} - \eta^{jk} \partial_m F^{mi} - \partial^i F^{kj} + \partial^j F^{ki}) \\
& + 2c_5 (\eta^{ik} \partial^j F - \eta^{jk} \partial^i F) + 4c_6 \varepsilon^{ijkm} \partial_m (\varepsilon \cdot F) \\
& - \tilde{\alpha} (t_{kij} - t_{kji}) + \tilde{\alpha} (\eta_{ki} v_j - \eta_{kj} v_i) - \frac{3\tilde{\alpha}}{2} \varepsilon_{ijkl} a^l = \frac{1}{2} S^{ijk}. \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Используя соотношения (1.10), (1.11) и (1.14), можно переписать член с взаимодействием (2.1) в терминах h_{ij} и компонент кручения следующим образом:

$$S_{source} = \int d^4x \left(2h_{ij} \tau^{ij} + \frac{2}{3} t_{k[ij]} S^{ijk} + \frac{1}{3} v_j S^{ij}_i - \frac{1}{4} \varepsilon_{ijkm} a^m S^{ijk} \right), \quad (2.9)$$

где τ^{ij} определено как

$$\tau^{ij} = J^{(ij)} - \frac{1}{2} \partial_m S^{m(ij)}. \quad (2.10)$$

Из уравнений (2.3) и (2.4) видно, что источник τ_{ij} сохраняется, как ему и следует.

Определим также следующие комбинации источников:

$$S = \varepsilon_{ijkl} \partial_l S^{ijk}$$

и

$$\sigma_{ij} = J_{(ij)} - \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha} \frac{1}{2} \partial^m S_{m(ij)}. \quad (2.11)$$

Далее, несложное, но утомительное вычисление позволяет найти решение урав-

нений (2.5) и (2.8). Результат выглядит следующим образом:

$$h_{ij} = \frac{1}{c_1} \frac{1}{k^2} \left(\tau_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} \tau \right) - \frac{\tilde{\alpha}}{c_1 \alpha} \frac{1}{k^2 + m^2} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \eta_{ij} \sigma \right) \quad (2.12)$$

$$v^i = - \frac{1}{6\tilde{\alpha}} \left(S^{ij}{}_j + 8 \frac{c_3}{c_1} i k_m \sigma^{mi} \right) \quad (2.13)$$

$$a_l = - \frac{1}{288 m_0^2 c_6} \frac{k_l S}{k^2 + m_0^2} + \frac{1}{18\tilde{\alpha}} \varepsilon_{ijkl} \left\{ S^{ijk} + \frac{2(c_3 - c_4)}{3\tilde{\alpha}} k^i k_m S^{jkm} \right\} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} t_{k[ij]} = & \frac{i}{2\alpha} \frac{1}{k^2 + m^2} \left\{ k_i \left(\sigma_{jk} - \frac{1}{3} \eta_{jk} \sigma \right) - k_j \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \eta_{ik} \sigma \right) \right. \\ & \left. + \frac{k_k k^m}{m^2} (k_i \sigma_{mj} - k_j \sigma_{mi}) \right\} \\ & - \frac{c_3 - c_4}{36\tilde{\alpha}^2} k^m (k_i S_{jkm} - k_j S_{ikm} - 2k_k S_{ijm}) - \frac{1}{12\tilde{\alpha}} (\eta_{ik} S_{jm}{}^m - \eta_{jk} S_{im}{}^m) \\ & - \frac{1}{6\tilde{\alpha}} \left\{ S_{ijk} + \frac{1}{2} (S_{ikj} - S_{jki}) \right\} + \frac{ic_3}{3c_1 \tilde{\alpha}} k^m (\eta_{ik} \sigma_{mj} - \eta_{jk} \sigma_{mi}), \end{aligned} \quad (2.15)$$

где m_0 — масса псевдоскалярного поля:

$$m_0^2 = \frac{\tilde{\alpha}}{16c_6}, \quad (2.16)$$

а m — масса возмущения спина 2:

$$m_2^2 = \frac{\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha} - \alpha)}{2\alpha c_5}. \quad (2.17)$$

Подставляя эти выражения обратно в действие (что сводится к вычислению (1/2) части члена с взаимодействием (2.9)), мы получаем действие, описывающее взаимодействие источников. Опуская слагаемые, отвечающие за ультра-локальное взаимодействие, получаем:

$$\begin{aligned} S_{int} = & \int d^4 k \left\{ \frac{1}{144\tilde{\alpha}} \frac{\bar{S} S}{k^2 + m_0^2} + \frac{1}{c_1} \frac{1}{k^2} \bar{\tau}_{ij} \left(\tau^{ij} - \frac{1}{2} \eta^{ij} \tau \right) \right. \\ & \left. - \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha c_1} \frac{1}{k^2 + m^2} \left[\bar{\sigma}_{ij} \left(\sigma^{ij} - \frac{1}{3} \eta^{ij} \sigma \right) + 2 \frac{k^i k_m}{m^2} \bar{\sigma}_{ij} \left(\sigma^{jm} - \frac{1}{3} \eta^{jm} \sigma \right) \right] \right\}; \end{aligned} \quad (2.18)$$

черта здесь обозначает комплексное сопряжение. Три слагаемых здесь соответствуют обмену массивной частицей спина 0, безмассовой частицей спина 2 и

массивной частицей спина 2 соответственно. Ясно, что с учетом ограничений на параметры (1.16), (1.17), ни одна из мод не является ни духом, ни тахионом.

Третье слагаемое в (2.18) (соответствующее обмену массивной частицей спина 2) является причиной разрыва ван Дама-Вельтмана-Захарова [53, 54], который обыкновенно возникает в модифицированных теориях гравитации. Его смысл заключается в том, что при расчете отклонения света, идущего от массивного источника, например, от Солнца, прогнозируемое отклонение не совпадает с наблюдаемым (которое, в свою очередь, совпадает с предсказанием ОТО). Возможно, разрыв ван Дама-Вельтмана-Захарова может быть устранен благодаря действию механизма Вайнштейна [55], связанного с необходимостью учета нелинейности взаимодействия с массивными объектами на близком расстоянии, но этот вопрос требует отдельного исследования.

Особый интерес представляет возмущение метрики, порожденное симметричным тензором энергии-импульса $\tau_{ij} = \tau_{(ij)}$, взаимодействующим с тетрадой и не взаимодействующим непосредственно с кручением. В этом случае мы имеем $J_{ij} = \sigma_{ij} = \tau_{ij}$, $S_{ijk} = 0$, $\partial_i \tau^{ij} = 0$, а выражение (2.12) принимает вид

$$h_{ij} = \frac{1}{c_1} \frac{1}{k^2} \left(\tau_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} \tau \right) - \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha c_1} \frac{1}{k^2 + m^2} \left(\tau_{ij} - \frac{1}{3} \eta_{ij} \tau \right). \quad (2.19)$$

Таким образом, в этом случае взаимодействие также реализуется как безмассовым, так и массивным полями спина 2, причем относительная сила обоих взаимодействий определяется параметрами модели. Для полноты описания выпишем выражение для линеаризованной связности:

$$A_{ijk} = -\frac{i}{c_1} \frac{1}{k^2} \left\{ k_i \left(\tau_{jk} - \frac{1}{2} \eta_{jk} \tau \right) - k_j \left(\tau_{ik} - \frac{1}{2} \eta_{ik} \tau \right) \right\} + \frac{i}{c_1} \frac{1}{k^2 + m^2} \left\{ k_i \left(\tau_{jk} - \frac{1}{3} \eta_{jk} \tau \right) - k_j \left(\tau_{ik} - \frac{1}{3} \eta_{ik} \tau \right) \right\}.$$

Важно отметить, что последнее выражение демонстрирует смешивание полей метрики и кручения в нашей модели. То есть, ненулевое кручение возникает даже в отсутствие источников кручения. Иными словами, масса может гене-

рировать кручение.

Видно, что рассматриваемая теория предлагает альтернативный способ генерации массивного поля спина два по сравнению со стандартным путем, основанным на уравнении Фирца-Паули. Хотя остается неясным, является ли этот путь лучшей или худшей альтернативой с точки зрения самосогласованности теории, у него есть как минимум одно преимущество — на основе результатов работ [36, 37, 38], а также учитывая результаты последующих глав 5 и 6, можно заключить, что моды Бульвара-Дезера не возникают ни на одном из изученных искривленных гравитационных фонов, даже при наличии ненулевого фонового кручения.

Глава 3

Самоускоряющееся решение

В данной главе мы покажем, что уравнения рассматриваемой модели имеют в качестве решения однородную изотропную самоускоряющуюся Вселенную с ненулевым фоновым кручением.

В этой и последующих главах мы будем явно выделять у тензоров временную и пространственные компоненты, например:

$$k_i = \{k_0, k_a\} .$$

При этом иногда необходимо отличать индексы касательного пространства от пространственно-временных, поэтому мы будем помечать индексы касательного пространства тильдой в тех случаях, когда есть риск спутать их с пространственно-временными индексами:

$$i = (\tilde{0}, \tilde{a}) , \quad \mu = (0, a) .$$

3.1. Космологические решения

Данный раздел посвящен поиску однородных изотропных космологических решений наиболее общего вида.

С этой целью рассмотрим наиболее общий анзац, удовлетворяющий условиям однородности и изотропии:

$$e_{\tilde{0}}^{\tilde{0}} = N(t) , \quad e_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} = a(t)\delta_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} , \quad A_{\tilde{0}\tilde{a}\tilde{b}} = f(t)\delta_{\tilde{a}\tilde{b}} , \quad A_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} = g(t)\varepsilon_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} ; \quad (3.1)$$

Используя формулу (1.13), можно записать тензор ко-кручения K_{ijk} , соответствующий этому анзаццу:

$$K_{\tilde{0}\tilde{a}\tilde{b}} = (f(t) + \lambda(t)) \delta_{ab} ; \quad K_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} = g(t) \varepsilon_{abc} . \quad (3.2)$$

Заметим, что, в силу антисимметричности A_{ijk} по индексам i, j , остальные компоненты связности обращаются в ноль. Этот анзац мы можем подставить в лангранжиан (1.3).

Мы интересуемся ускоряющимися космологическими решениями вида:

$$a(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda = \text{const}. \quad (3.3)$$

Покажем, что для таких решений необходимо

$$f = \text{const}, \quad g = \text{const}.$$

Вычислим величины, входящие в действие. Ненулевые компоненты тензора кривизны F_{ijkl} для анзаца (3.1) выглядят следующим образом: F_{ijkl} ,

$$F_{\tilde{0}\tilde{a}\tilde{0}\tilde{b}} = \frac{1}{Na} \partial_0(af) \delta_{ab}, \quad F_{\tilde{0}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} = -2fg \varepsilon_{abc},$$

$$F_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{0}\tilde{c}} = \frac{1}{Na} \partial_0(ag) \varepsilon_{abc}, \quad F_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}\tilde{d}} = (f^2 - g^2)(\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}).$$

Ненулевые компоненты тензора F_{ij} :

$$F_{\tilde{0}\tilde{0}} = \frac{3}{Na} \partial_0(af), \quad F_{\tilde{a}\tilde{b}} = \left[2(f^2 - g^2) - \frac{1}{Na} \partial_0(af) \right] \delta_{ab}.$$

Заметим, что тензор F_{ij} — симметричный, как и требует условие однородности.

Наконец, величины $F = \eta_{ij} F_{ij}$, $\epsilon \cdot F$ и $R \equiv R_{ijkl} \eta^{ik} \eta^{jl}$ имеют вид:

$$F = 6 \left[f^2 - g^2 - \frac{1}{Na} \partial_0(af) \right], \quad \epsilon \cdot F = 12 \left[-2fg + \frac{1}{Na} \partial_0(ag) \right],$$

$$R = 6 \left[\frac{1}{Na} \partial_0 \left(\frac{\dot{a}}{N} \right) + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\dot{a}}{N} \right)^2 \right].$$

Действие (1.3), записанное в терминах однородных и изотропных полей $N(t)$, $a(t)$, $f(t)$ и $g(t)$, выглядит следующим образом:

$$eL = c_2 Na^3 + 9\tilde{\alpha} [Na^3(f^2 - g^2) - a^2 \partial_0(af)] - 9\alpha \left[a^2 \partial_0 \left(\frac{\dot{a}}{N} \right) + \frac{a}{N} (\dot{a})^2 \right]$$

$$- 36c_5 a^2 (f^2 - g^2) \partial_0(af) + 144c_6 \left\{ 4Na^3 f^2 g^2 - 4a^2 fg \partial_0(ag) + \frac{a}{N} [\partial_0(ag)]^2 \right\},$$

где $\dot{a} \equiv \partial_0 a$. Заметим, что, вследствие симметрии F_{ij} , это выражение содержит только c_5 , c_6 , α и $\tilde{\alpha}$, но не c_3 и c_4 по отдельности. Слагаемые с $(f^2 - g^2)^2$ и $[\partial_0(af)]^2$ сокращаются благодаря условию (1.17). После интегрирования по частям мы получаем действие в следующем виде:

$$eL = c_2 N a^3 + 9\tilde{\alpha} [(f^2 - g^2) N a^3 + 2a^2 \dot{a} f] + 9\alpha \frac{a}{N} (\dot{a})^2 + 36c_5 g^2 a^2 \partial_0(af) + 144c_6 \left\{ 4f^2 g^2 N a^3 - 4a^2 f g \partial_0(ag) + \frac{a}{N} [\partial_0(ag)]^2 \right\}. \quad (3.4)$$

Варьируя действие (3.4) по f , g и N , мы получаем три независимых уравнения движения. Разделив эти уравнения на a^3 и положив в них $N = 1$, мы приходим к следующей системе:

$$\frac{\delta}{\delta N} : \quad d_2 + \tilde{\alpha}(f^2 - g^2) - \alpha \frac{\dot{a}^2}{a^2} - d_6 \frac{[\partial_0(ag)]^2}{a^2} + 4d_6 f^2 g^2 = 0, \quad (3.5a)$$

$$\frac{\delta}{\delta f} : \quad \tilde{\alpha} \left(f + \frac{\dot{a}}{a} \right) - d_5 g \frac{\partial_0(ag)}{a} + 4d_6 f g^2 = 0, \quad (3.5b)$$

$$\frac{\delta}{\delta g} : \quad -\tilde{\alpha} g + d_5 g \frac{\partial_0(af)}{a} - d_6 \frac{\partial_0[a\partial_0(ag)]}{a^2} + 4d_6 f^2 g = 0, \quad (3.5c)$$

где для удобства мы ввели обозначения

$$d_2 \equiv \frac{c_2}{9}, \quad d_6 \equiv 16c_6, \quad d_5 \equiv 4c_5 + 32c_6.$$

Покажем, что для космологического решения с масштабным фактором (3.3) параметры f и g обязательно не зависят от времени. Для этого заметим, что (3.5b) может быть решено для $\partial_0 g$ как функции от f and g . С учетом этого (3.5a) превращается в алгебраическое уравнение, из которого можно выразить $f = f(g)$. Таким образом, мы можем выразить $\partial_0 g$, $\partial_0^2 g$ и $\partial_0 f$ как функции g . Подставляя затем все это в уравнение (3.5c), получаем алгебраическое уравнение на g с постоянными коэффициентами. Мы убедились, что последнее уравнение (представляющее из себя уравнение 8 степени на g^2) может быть разрешено относительно g , и это решение, очевидно, не зависит от времени.

Для не зависящих от времени f , g и λ система (3.5a) - (3.5c) превращается

в систему алгебраических уравнений:

$$d_2 + \tilde{\alpha} (f^2 - g^2) - \alpha \lambda^2 - d_6 g^2 \lambda^2 + 4d_6 f^2 g^2 = 0, \quad (3.6a)$$

$$\tilde{\alpha}(f + \lambda) - d_5 g^2 \lambda + 4d_6 g^2 f = 0, \quad (3.6b)$$

$$g(-\tilde{\alpha} + d_5 \lambda f - 2d_6 \lambda^2 + 4d_6 f^2) = 0. \quad (3.6c)$$

3.1.1. Две ветви решений

Уравнение (3.6c) допускает два возможных типа решений: либо $g = 0$, либо $-\tilde{\alpha} + d_5 \lambda f - 2d_6 \lambda^2 + 4d_6 f^2 = 0$. Это разделение создает *две различные ветви решений* системы (3.6a) – (3.6c). Первая ветвь соответствует $g = 0$ в уравнении (3.6c), тогда из уравнений (3.6a) и (3.6b) получаем

$$f = -\lambda. \quad (3.7)$$

Подставляя (5.29) в уравнение (3.6a), получаем значение λ , соответствующее определенной величине параметра c_2 в лагранжиане:

$$\lambda_{\text{first branch}}^2 = -\frac{c_2}{9(\tilde{\alpha} - \alpha)}. \quad (3.8)$$

Используя формулу (3.2), легко заметить, что в этом случае кручение, то есть тензор T_{ijk} , равен нулю. Таким образом, первая ветвь с $g = 0$ соответствует пространству де Ситтера без кручения, а это — частный случай пространства Эйнштейна без кручения, детально изученный и описанный в работах [36, 37, 38]. Таким образом, первая ветвь решения уже изучена. Мы, однако, будем обращаться к ней в дальнейшем для сравнения.

Вторая ветвь соответствует $g \neq 0$, и система (3.6a) - (3.6c) принимает вид:

$$d_2 + \tilde{\alpha}(f^2 - g^2) - \alpha \lambda^2 - d_6 g^2 \lambda^2 + 4d_6 f^2 g^2 = 0, \quad (3.9a)$$

$$\tilde{\alpha}(f + \lambda) - d_5 g^2 \lambda + 4d_6 g^2 f = 0, \quad (3.9b)$$

$$-\tilde{\alpha} + d_5 \lambda f - 2d_6 \lambda^2 + 4d_6 f^2 = 0. \quad (3.9c)$$

Эта ветвь представляет собой семейство космологических решений, в общем случае с ненулевой космологической постоянной. Частным случаем этого семейства является самоускоряющееся решение, реализующееся при $c_2 = 0$.

3.2. Самоускоряющееся решение

Рассмотрим случай $c_2 = 0$ подробнее. Система уравнений имеет вид:

$$\tilde{\alpha}(f^2 - g^2) - \alpha\lambda^2 - d_6g^2\lambda^2 + 4d_6f^2g^2 = 0, \quad (3.10a)$$

$$\tilde{\alpha}(f + \lambda) - d_5g^2\lambda + 4d_6g^2f = 0, \quad (3.10b)$$

$$-\tilde{\alpha} + d_5\lambda f - 2d_6\lambda^2 + 4d_6f^2 = 0. \quad (3.10c)$$

Из уравнений (3.10a) - (3.10c) следует:

$$\tilde{\alpha}(f^2 - g^2 - \lambda f) - 2\alpha\lambda^2 = 0. \quad (3.11)$$

Разрешаем уравнение (3.11) относительно f :

$$f = -\frac{\tilde{\alpha} - d_5g^2}{\tilde{\alpha} + 4d_6g^2}\lambda. \quad (3.12)$$

Подставляем это в уравнение (3.10a) и выражаем из него λ^2 . Получаем:

$$\lambda^2 = \frac{\tilde{\alpha}g^2(\tilde{\alpha} + 4d_6g^2)}{(d_5^2 - 4d_6^2)g^4 - [\tilde{\alpha}(2d_5 + d_6) + 4\alpha d_6]g^2 + \tilde{\alpha}(\tilde{\alpha} - \alpha)}. \quad (3.13)$$

Наконец, подставляем (3.12) и (3.13) в (3.11), вводим обозначение

$$x = g^2,$$

и получаем уравнение на x :

$$4d_6(d_5^2 - 4d_6^2)x^3 - 4(2\tilde{\alpha}d_6^2 - 4\alpha d_6^2 + \tilde{\alpha}d_5d_6)x^2 + \tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}d_5 - \tilde{\alpha}d_6 + 8\alpha d_6)x - \tilde{\alpha}^2(\tilde{\alpha} - \alpha) = 0. \quad (3.14)$$

Это кубическое уравнение на x . Произведение трех корней этого уравнения равно

$$\frac{\tilde{\alpha}^2(\tilde{\alpha} - \alpha)}{4d_6(d_5^2 - 4d_6^2)}, \quad (3.15)$$

и оно положительно при выполнении условия $d_5^2 - 4d_6^2 \equiv 4c_5(d_5 + 2d_6) > 0$, что с учетом (1.17) дает следующее условие существования самоускоряющегося решения:

$$c_5 + 16c_6 < 0 . \quad (3.16)$$

Положительность (3.15) гарантирует существование одного положительного корня x_1 для g^2 . Два других корня отрицательны: действительно, легко видеть, что билинейная комбинация корней отрицательна:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}d_5 - \tilde{\alpha}d_6 + 8\alpha d_6)}{4d_6(d_5^2 - 4d_6^2)} < 0 .$$

Рассмотрим (3.13). Используя неравенство (3.16), мы можем написать следующее:

$$2d_5 + d_6 = 2(d_5 + 2d_6) - 3d_6 \equiv 8(c_5 + 16c_6) - 48c_6 < 0 ,$$

и, следовательно,

$$\tilde{\alpha}(2d_5 + d_6) + 4\alpha d_6 < 0 .$$

С учетом последнего неравенства видим, что знаменатель в (3.13) положителен. Следовательно, (3.13) дает положительную величину λ^2 . А для положительного значения λ мы находим отрицательное значение f из (3.12).

Суммируя, получаем, что, если наряду с условиями (1.17) выполнено условие (3.16), то существует самоускоряющееся решение вида

$$\begin{aligned} e_0^{\tilde{0}} = 1 , \quad e_b^{\tilde{a}} = e^{\lambda t} \delta_b^{\tilde{a}} , \quad A_{\tilde{0}\tilde{a}\tilde{b}} = f \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} , \quad A_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} = g \varepsilon_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} , \\ A_{\tilde{0}\tilde{a}\tilde{b}} = e^{\lambda t} f \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} , \quad A_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} = e^{\lambda t} g \varepsilon_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

с постоянными значениями λ , f и g , причем $f < 0$ для $\lambda > 0$. Знак g может быть любым, так как g нарушает четность. Величина $g^2 \equiv x$ определяется из уравнения (3.14), в то время как скорость де-ситтеровского расширения находится из (3.13), а f — с помощью уравнения (3.12).

Используя систему уравнений (3.10a)–(3.10c), можно выразить параметры лагранжиана α , $\tilde{\alpha}$, c_5 , c_6 через параметры самоускоряющегося решения f , g , λ следующим образом:

$$\begin{aligned} c_6 &= \frac{\tilde{\alpha}\lambda(\tilde{\alpha}f + \alpha\lambda)}{16(\lambda^2 - 4f^2)(\tilde{\alpha}f^2 - \tilde{\alpha}\lambda f - 2\alpha\lambda^2)} , \\ c_5 &= \frac{\tilde{\alpha}[2\tilde{\alpha}f^2 + \lambda f\tilde{\alpha} + \lambda^2(\tilde{\alpha} - 2\alpha)]}{4\lambda(\lambda + 2f)(f^2\tilde{\alpha} - \lambda f\tilde{\alpha} - 2\alpha\lambda^2)} , \\ \tilde{\alpha} &= -\frac{2\alpha\lambda^2 - \tilde{\alpha}f^2 + \tilde{\alpha}\lambda f}{g^2} . \end{aligned} \quad (3.18)$$

Соотношения можно переписать в более удобном виде, если ввести новые переменные. Для этого сделаем следующее замечание. Из результатов главы 2 логично предположить, что соотношение $|\alpha|/\tilde{\alpha}$ — порядка единицы, так что

$$\tilde{\alpha} \sim |\alpha| \sim (16\pi G_{\text{Newton}})^{-1} \sim M_{\text{Planck}}^2 . \quad (3.19)$$

Введем параметр

$$\Xi \equiv \frac{\tilde{\alpha}}{|\alpha|} ,$$

тогда имеем $\Xi \sim 1$. Мы также будем использовать ξ , определенное как $\xi \equiv \Xi^{-1}$.

Также введем новые параметры δ и h , определенные как

$$\delta \equiv -\frac{f}{\lambda} , \quad h \equiv \frac{g}{\lambda} . \quad (3.20)$$

Используя определенные выше параметры, можно переписать соотношения (3.18) в виде:

$$\xi = \frac{1}{2}(h^2 - \delta^2 - \delta) , \quad (3.21)$$

$$c_6 = \frac{\tilde{\alpha}}{\lambda^2} \frac{h^2 + \delta - \delta^2}{32 h^2 (4\delta^2 - 1)} , \quad (3.22)$$

$$c_5 = -\frac{\tilde{\alpha}}{\lambda^2} \frac{h^2 + (\delta - 1)^2}{4 h^2 (2\delta - 1)} . \quad (3.23)$$

Из последней системы можно извлечь несколько полезных ограничений на параметры решения, используя ограничения на параметры лагранжиана

(1.16). Во-первых, из (1.16) следует, что c_6 должно быть положительным, тогда как c_5 должно быть отрицательным. Из уравнения (3.22) следует что c_6 положительно когда $1 - 4\delta^2 < 0$, то есть при

$$\delta > \frac{1}{2}. \quad (3.24)$$

Далее, из уравнения (3.22) вместе с необходимым условием $c_6 > 0$ (неравенства (1.16)) следует, что должно выполняться условие:

$$h^2 > \delta^2 - \delta. \quad (3.25)$$

С другой стороны, (3.21) можно переписать в виде

$$h^2 = \delta^2 + \delta + 2\xi, \quad (3.26)$$

откуда можно получить следующее ограничение на величину $h = g/\lambda$:

$$h^2 > \delta + \delta^2 > \frac{3}{4}. \quad (3.27)$$

Для получения последнего неравенство было использовано $\delta > \frac{1}{2}$.

Глава 4

Малые возмущения на фоне самоускоряющегося решения. Общие положения

После того, как самоускоряющееся решение найдено, следующим шагом является исследование стабильности этого решения, как минимум, на линеаризованном уровне. В этой и последующих главах мы всесторонне изучим вопрос стабильности для малых возмущений. В настоящей главе мы получим тождества Бьянки, связывающие уравнения поля между собой, для удобства выполним конформные преобразования, а также определим параметризующие возмущения переменные и зафиксируем калибровку.

В этой и последующих главах нам будет удобно работать с уравнениями (1.21), (1.26), полученными варьированием действия в форме (1.3).

4.1. Общие положения. Обобщенные тождества Бьянки

Действие (1.3) инвариантно как относительно общекоординатных калибровочных преобразований, так и относительно локальных инфинитезимальных лоренцевых преобразований. Поэтому не все уравнения движения (1.21), (1.26) являются независимыми. В этом разделе мы получим тождества, связывающие уравнения движения между собой, наподобие тождеств Бьянки в общей теории относительности.

Первая пара тождеств следует из инвариантности относительно общекоординатных преобразований. Выполним инфинитезимальное калибровочное преобразование

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu} , \quad (4.1)$$

тогда вариация тетарды e_μ^i и связности $A_{ij\mu}$ запишется в виде:

$$\delta e_\mu^i = -\xi^\lambda \partial_\lambda e_\mu^i - e_\lambda^i \partial_\mu \xi^\lambda = -\xi^\lambda \nabla_\lambda e_\mu^i - e_\lambda^i \nabla_\mu \xi^\lambda, \quad (4.2)$$

$$\delta A_{ij\mu} = -A_{ij\lambda} \nabla_\mu \xi^\lambda - \xi^\lambda \nabla_\lambda A_{ij\mu}, \quad (4.3)$$

где ∇_μ — ковариантная производная, определенная с помощью символов Кристоффеля,

$$\nabla_\mu e_\nu^i = \partial_\mu e_\nu^i - \Gamma_{\cdot\mu\nu}^\lambda e_\lambda^i.$$

Далее, варьируя действие по e_μ^i и $A_{ij\mu}$, записанным в форме (4.2), (4.3) и выполняя интегрирование по частям, мы получаем следующее равенство:

$$-2\hat{\mathcal{G}}_{ik} e_{k\nu} \nabla_\mu e^{i\nu} - 2\nabla_\nu (\hat{\mathcal{G}}_{ik} e_{k\mu} e^{i\nu}) - e^{k\nu} \nabla_\mu A_{ij\nu} \hat{\mathcal{T}}_{ijk} + \nabla_\nu (e^{k\nu} A_{ij\mu} \hat{\mathcal{T}}_{ijk}) \equiv 0. \quad (4.4)$$

Левая часть тождества (4.4) содержит один свободный индекс μ . Таким образом, имеется два тождества: для $\mu = 0$ и для $\mu = a$.

Два других тождества следуют из инвариантности относительно локальных лоренцевых преобразований. Вариация тетарды e_μ^i и связности $A_{ij\mu}$ под действием инфинитезимальных лоренцевых преобразований выглядит следующим образом:

$$\delta e_i^\mu = \omega_{ij} e_j^\mu, \quad (4.5)$$

$$\delta A_{ij\mu} = -\partial_\mu \omega_{ij} + \omega_{ip} A_{pj\mu} - \omega_{jp} A_{pi\mu}, \quad (4.6)$$

где $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ — антисимметричные параметры преобразования. Инвариантность действия относительно этих преобразований приводит к следующему тождеству,

$$(\hat{\mathcal{G}}_{ij} - \hat{\mathcal{G}}_{ji}) + \nabla_\nu (\hat{\mathcal{T}}_{ijk} e^{k\nu}) + 2e^{k\nu} (\hat{\mathcal{T}}_{ipk} A_{jp\nu} - \hat{\mathcal{T}}_{jpk} A_{ip\nu}) \equiv 0. \quad (4.7)$$

Левая часть (4.7) содержит два свободных индекса, i and j , и антисимметрична по ним. Следовательно, имеется два тождества: для $i = 0, j = a$ и для $i = a, j = b$.

Таким образом, мы имеем два набора обобщенных тождеств Бьянки, которые связывают уравнения (1.21) - (1.26) между собой.

4.2. Конформное время и конформное преобразование метрики

Поскольку целью данного исследования является изучение малых возмущений на фоне самоускоряющегося решения, удобно перейти к конформному времени, определенному следующим образом:

$$\eta = \int e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} .$$

Далее мы будем работать с конформным временем; с этого момента оператором ∂_0 , а также просто штрихом $'$, мы будем обозначать дифференцирование по конформному времени.

Далее удобно сменить обозначения. Обозначим компоненты тетрады, использованные до настоящего момента, за \hat{e}_μ^i , и введем новые тетрады, определяемые следующими соотношениями:

$$\hat{e}_\mu^i = e^\phi e_\mu^i , \quad \hat{e}_j^\nu = e^{-\phi} e_j^\nu , \quad (4.8)$$

где

$$e^\phi = e^{\lambda t} = a(\eta) = -\frac{1}{\lambda \eta} , \quad (4.9)$$

а также

$$\phi' = \lambda e^\phi .$$

Переход к тетрадам e_μ^i соответствуют конформному преобразованию метрики. Связность $A_{ij\mu}$ (с греческим индексом!) во время этого преобразования мы оставляем неизменной. Тогда связность A_{ijk} , записанная с тремя лоренцевыми индексами, после конформного преобразования выражается через $A_{ij\mu}$

следующим образом:

$$A_{ijk} \equiv A_{ij\mu} e_k^\mu \quad (\text{с новыми тетрадами!}), \quad (4.10)$$

тогда как самоускоряющееся решение (3.17) запишется в виде:

$$e_\mu^i = \delta_\mu^i, \quad A_{\tilde{0}\tilde{a}\tilde{b}} = e^\phi f \delta_{\tilde{a}\tilde{b}}, \quad A_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} = e^\phi g \varepsilon_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}}. \quad (4.11)$$

Тензор и скаляр Ричи \hat{R}_{ij} и \hat{R} , построенные с помощью тетрад \hat{e}_μ^i , при преобразовании (4.8) трансформируются следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ij} &= e^{-2\phi} \left(R_{ij} - 2e_i^\mu e_j^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \eta_{ij} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \right. \\ &\quad \left. + 2e_i^\mu e_j^\nu \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - 2\eta_{ij} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right), \\ \hat{R} &= e^{-2\phi} \left(R - 6g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - 6g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right), \end{aligned}$$

где R_{ij} , R , ∇_μ и $g_{\mu\nu} = e_\mu^i e_{i\nu}$ — величины, построенные с помощью новых тетрад e_μ^i .

Кривизна \hat{F}_{ijkl} , построенная с помощью \hat{e}_μ^i и $\hat{A}_{ij\mu}$, выражается через новую кривизну F_{ijkl} , построенную с помощью e_μ^i и $A_{ij\mu}$, следующим образом:

$$\hat{F}_{ijkl} = e^{-2\phi} F_{ijkl}.$$

Уравнения поля (1.21) и (1.26) также перепишем в терминах новых переменных. Уравнение (1.21) теперь выглядит так:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ij} &\equiv \frac{3}{2} \tilde{\alpha} e^{-2\phi} \left(F_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} F \right) - \frac{3}{2} \alpha e^{-2\phi} \left(R_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} R \right) \\ &\quad + e^{-4\phi} c_3 (F_{ki} F_{kj} + F_{kl} F_{kilj}) + e^{-4\phi} c_4 (F_{ik} F_{kj} + F_{lk} F_{kilj}) + 2e^{-4\phi} c_5 F F_{ij} \\ &\quad + 2e^{-4\phi} c_6 \epsilon_{klmi} F_{klmj} (\epsilon \cdot F) - e^{-4\phi} \frac{1}{2} \eta_{ij} L^{(2)} + \Delta_{ij}^{(G)} = 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{ij}^{(G)} &= -\frac{3}{2} \alpha e^{-2\phi} \left[-2e_i^\mu e_j^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \eta_{ij} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + 2e_i^\mu e_j^\nu \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - 2\eta_{ij} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right. \\ &\quad \left. - \eta_{ij} (-3g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - 3g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) \right]. \end{aligned}$$

Уравнение (1.26) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{ijk} \equiv e^{-3\phi} \left\{ \left[\eta_{ik} \left(D_m P_{jm} - \frac{2}{3} D_j P \right) - D_i P_{jk} \right] - \left[\eta_{jk} \left(D_m P_{im} - \frac{2}{3} D_i P \right) - D_j P_{ik} \right] \right\} \\ + 4e^{-3\phi} c_6 \epsilon_{ijkm} D_m (\epsilon \cdot F) + e^{-3\phi} S_{ijk} + e^{-\phi} H_{ijk} + \Delta_{ijk}^{(T)} = 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где

$$\Delta_{ijk}^{(T)} = 3\tilde{\alpha} e^{-\phi} (\eta_{ik} e_j^\mu \partial_\mu \phi - \eta_{jk} e_i^\mu \partial_\mu \phi) .$$

4.3. Параметризация космологическим возмущений: преобразование Фурье и разложение по спиральностям

Поскольку фоновое пространство (4.11) не инвариантно относительно глобальных преобразований Лоренца, но инвариантно относительно пространственных вращений, мы будем использовать $(3 + 1)$ -разложение возмущений, то есть будем разделять пространственные и временные индексы. Также мы выполним разложение по компонентам спиральности. Это значит, что мы раскладываем всякий трехмерный тензор на неприводимые представления по малой группе $SO(2)$ вращений относительно трехмерного импульса \mathbf{k} . Эти неприводимые компоненты формируют секторы с определенной спиральностью: скалярный сектор (спиральность 0), векторный сектор (спиральность 1) и тензорный сектор (спиральность 2). Поскольку мы работаем с линеаризованными уравнениями поля, каждый из секторов можно рассматривать по отдельности.

Сделаем следующее замечание. После конформных преобразований фоновые величины тетрад в (4.11) тривиальны, поэтому мы не будем различать эйнштейновские и лоренцевы индексы в величинах, характеризующих возмущения (речь идет именно о величинах первого порядка, но не нулевого). Эти индексы будут подниматься и опускаться при помощи метрики Минковского.

Будем параметризовать возмущения следующим образом:

$$K_{ij\mu} = K_{ij\mu}^{(0)} + k_{ijk}\delta_{\mu}^k, \quad (4.14)$$

$$e^i_{\mu} = \delta^i_{\mu} + \epsilon^i_{\mu}, \quad (4.15)$$

где $K_{ij\mu}^{(0)} = A_{ij\mu}^{(0)} - \omega_{ij\mu}^{(0)} = A_{ij\mu}^{(0)}$ — величина нулевого порядка по возмущениям, взятая из (4.11), а k_{ijk} — линейное возмущение.

4.3.1. Возмущения связности

Разложим величину первого порядка — тензор k_{ijk} — по его компонентам спиральности. Тензор $k_{ijk} = -k_{jik}$ разлагается на неприводимые компоненты со спиральностями 0, 1, 2.

$$k_{ijk} = k_{ijk}^{\text{scalar}} + k_{ijk}^{\text{vector}} + k_{ijk}^{\text{tensor}}, \quad (4.16)$$

Компоненты со спиральностью 2 формируют тензорный сектор:

$$k_{0ab} = -k_{a0b} = \tau_{ab}, \quad (4.17)$$

$$k_{abc} = k_a N_{bc} - k_b N_{ac}, \quad (4.18)$$

где τ_{ab} и N_{ab} — симметричные, поперечные и бесследовые тензоры. Другие компоненты k_{ijk} в тензорном секторе обращаются в ноль.

Компоненты со спиральностью 1 формируют векторный сектор:

$$\begin{aligned} k_{0a0} &= -k_{a00} = \zeta_a, \\ k_{0ab} &= -k_{a0b} = k_a \nu_b + k_b \mu_a, \\ k_{ab0} &= k_a \kappa_b - k_b \kappa_a, \\ k_{abc} &= k_a k_c \alpha_b - k_b k_c \alpha_a + \eta_{ac} L_b - \eta_{bc} L_a. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Все 3-векторы здесь — поперечные. Величины со спиральностью 0 формируют

скалярный сектор:

$$k_{0a0} = -k_{a00} = k_a \tilde{\xi} ,$$

$$k_{0ab} = -k_{a0b} = k_a k_b \chi + \delta_{ab} \sigma + \epsilon_{abc} k_c \rho ,$$

$$k_{ab0} = \epsilon_{abc} k_c \theta ,$$

$$k_{abc} = \epsilon_{abd} k_c k_d Q + (k_a \epsilon_{bcd} - k_b \epsilon_{acd}) k_d u + (k_a \delta_{bc} - k_b \delta_{ac}) M .$$

Всего тензор k_{ijk} содержит 24 компоненты. Это число складывается из 4 тензорных компонент (по две компоненты содержит каждый из тензоров τ_{ab} и N_{ab}), 12 компонент в векторном секторе (по две компоненты содержит каждый из поперечных векторов $\zeta_a, \nu_a, \mu_a, \kappa_a, \alpha_a$ и L_a) и 8 скалярных компонент ($\tilde{\xi}, \chi, \sigma, \rho, \theta, Q, u$ и M).

4.3.2. Возмущения метрики: выбор калибровки

Возмущения тетрады параметризуются следующим образом:

$$e_{\mu}^i = \delta_{\mu}^i + \epsilon_{\mu}^i ,$$

где ϵ_{μ}^i — линейное возмущение, которое мы разложим на скалярную, векторную и тензорную компоненты. Так как свертка тетрад дает метрику Минковского, т.е.

$$e_{i\mu} e_j^{\mu} = \eta_{ij} ,$$

то для e_j^{μ} получается следующее выражение :

$$e_j^{\mu} = \delta_j^{\mu} - \epsilon_{i\nu} \delta_j^{\nu} \delta^{i\mu} . \quad (4.20)$$

Можно использовать локальную лоренцеву инвариантность, детально описанную в разделе 4.1, чтобы сделать тензор $\epsilon_{i\nu}$ симметричным: действительно, локальное лоренцево преобразование (4.5) добавляет к величине $\epsilon_{i\nu}$ антисимметричный параметр $\omega_{i\nu}$. Поэтому здесь и далее мы будем использовать калибровку

$$e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu} . \quad (4.21)$$

Тогда выражение (4.20) может быть переписано в виде

$$e_j^\mu = \delta_j^\mu - \epsilon_j^\mu, \quad \text{где } \epsilon_j^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} \epsilon_{j\nu},$$

а возмущения метрики выглядят следующим образом:

$$h_{\mu\nu} = e_\mu^i e_{i\nu} - \eta_{\mu\nu} = 2\epsilon_{\mu\nu}$$

Далее, можно использовать инвариантность относительно общекоординатных преобразований (4.1) для выбора калибровки

$$e_{0a} = 0 \tag{4.22}$$

и наложения конформной ньютоновой калибровки. С этого момента мы будем работать в описанной калибровке.

Тогда возмущения $\epsilon_{\mu\nu}$ разлагаются на компоненты спиральности следующим образом:

$$\epsilon_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu}^{\text{scalar}} + \epsilon_{\mu\nu}^{\text{vector}} + \epsilon_{\mu\nu}^{\text{tensor}}, \tag{4.23}$$

где

$$\epsilon_{00}^{\text{scalar}} = -\Phi, \tag{4.24}$$

$$\epsilon_{ab}^{\text{scalar}} = \Psi \delta_{ab}, \tag{4.25}$$

$$\epsilon_{ab}^{\text{vector}} = \partial_a W_b + \partial_b W_a, \tag{4.26}$$

$$\epsilon_{ab}^{\text{tensor}} = \pi_{ab}. \tag{4.27}$$

Здесь, как и ранее, индексы из начала латинского алфавита обозначают пространственные (евклидовы) индексы ($a, b, c = 1, 2, 3$). W_a — поперечный вектор (т.е. $\partial_a W_a = 0$), а π_{ab} — симметричный, бесследовый и поперечный тензор ($\partial_a \pi_{ab} = 0$, $\delta_{ab} \pi_{ab} = 0$). Иными словами, после фиксации калибровки возмущения тетрады $\epsilon_{i\mu}$ содержат 6 независимых компонент: два скаляра (Φ, Ψ), две независимые компоненты у поперечного вектора (W_a) и две независимые компоненты у симметричного, поперечного, бесследового тензора (π_{ab}).

Используя симметрию фонового пространства относительно пространственных сдвигов, для исследования малых возмущений на фоне космологического решения (3.17) удобно сделать трехмерное преобразование Фурье:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \int d^3k \Phi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\ \Psi(\mathbf{x}) &= \int d^3k \Psi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\ W_a(\mathbf{x}) &= \int d^3k W_a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\ \pi_{ab}(\mathbf{x}) &= \int d^3k \pi_{ab}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},\end{aligned}\tag{4.28}$$

и так далее для всех полевых переменных. Для преобразованных величин мы используем те же обозначения и заменяем пространственные производные $\partial_{\tilde{a}} \equiv e_{\tilde{a}}^\mu \partial_\mu$ на $ik_{\tilde{a}}$, где \mathbf{k} — трехмерный импульс. Например, векторная составляющая возмущения тетрады теперь будет выглядеть так:

$$\epsilon_{ab}^{\text{vector}}(\mathbf{k}) = ik_a W_b(\mathbf{k}) + ik_b W_a(\mathbf{k}).\tag{4.29}$$

4.3.3. Свободные параметры в уравнениях поля

В данном разделе мы изучим области изменения некоторых параметров при рассмотрении самоускоряющегося решения.

Уравнения поля, полученные путем подстановки возмущений в величины F_{ijkl} , R и т.д., входящие в уравнения (4.12) – (4.13), содержат следующие свободные параметры:

$$c_3, c_4, c_5, c_6, \alpha, \tilde{\alpha}, f, g, \lambda.$$

Исходя из связи параметров c_3, c_4, c_5 , данной уравнением (1.17), будем полагать, что

$$c_3 \sim c_4 \sim c_5.\tag{4.30}$$

Далее, мы можем использовать соотношения (3.18), связывающие параметры лагранжиана с параметрами самоускоряющегося решения, чтобы выразить c_5 и c_6 через $\tilde{\alpha}, \lambda, f, g$. Легко заметить, что каждое слагаемое в уравнениях

поля содержит константу лагранжиана в качестве множителя. Поэтому, учитывая (4.30), получаем, что после подстановки двух последних соотношений из (3.18) вместо c_5 и c_6 , каждое слагаемое в уравнениях поля пропорционально либо α , либо $\tilde{\alpha}$. Отсюда следует, что параметры α и $\tilde{\alpha}$ факторизуются из уравнений поля, то есть они не входят сами по себе, а только в качестве общего множителя. Не считая общего множителя, на который можно сократить, уравнения поля содержат только параметр ξ , но не α или $\tilde{\alpha}$ по отдельности.

Учитывая вышесказанное, выражая c_4 через c_3 и c_5 и вводя параметр $c_{35} \equiv c_3/c_5 \sim 1$, можно переписать список параметров, входящих в уравнения поля, следующим образом:

$$c_{35}, \xi, f, g, \lambda,$$

или

$$c_{35}, \xi, \delta, h, \lambda.$$

Далее, можно выразить h через δ , ξ , после чего список параметров сократится до

$$c_{35} \sim 1, \quad \xi \sim 1, \quad \delta, \quad \lambda \sim H \text{ (Hubble constant)}.$$

Видно, что единственным параметром, величина которого может варьироваться в больших пределах, является параметр $\delta = -f/\lambda$. Значение δ может находиться в пределах

$$\frac{1}{2} < \delta \ll \frac{M_{UV}}{H} < \frac{M_{Pl}}{H} \sim \frac{\sqrt{\tilde{\alpha}}}{\lambda}, \quad (4.31)$$

где H - параметр Хаббла, M_{UV} - масштаб ультрафиолетового обрезания, необходимо присутствующий в любой низкоэнергетической теории, в том числе, и в исследуемой в настоящей работе. Действительно, так как мы рассматриваем фоновое решение (4.11), то его параметры много меньше масштаба ультрафиолетового обрезания: $|f| \ll M_{UV}$, то есть $\delta = -f/\lambda \ll M_{UV}/\lambda = M_{UV}/H$.

Для удобства вычислений (которые в общем случае представляются весьма громоздкими), имеет смысл рассмотреть две области значений δ . В первой

области $\delta \sim 1$, или $|f| \sim \lambda$. Тогда из первого соотношения (3.18) следует $g \sim \lambda$. Эта область значений соответствует малой величине фонового кручения, по порядку величины равной параметру Хаббла. Подробному исследованию этого случая посвящена глава 6.

Во второй области выполнено $\delta \gg 1$, то есть $|f|, g \gg \lambda$. Это соответствует большой величине фонового кручения. Этот случай подробно рассмотрен в главе 5.

В заключение заметим, что, подставив соотношение (3.21) в соотношения (3.22)–(3.23), можно получить следующие приближенные соотношения:

$$c_6 \sim \frac{\tilde{\alpha}}{\lambda^2 \delta^3}, \quad c_5 \sim -\frac{\tilde{\alpha}}{\lambda^2 \delta}. \quad (4.32)$$

Из (4.32) и (4.31) видно, что $|c_5| \gg 1$ всегда, тогда как c_6 может принимать различные значения.

Малые возмущения на фоне самоускоряющегося решения. Случай большого фонового кручения. Скалярный сектор

Мы начинаем исследование возмущений со случая большого фонового кручения,

$$|f| \gg \lambda. \quad (5.1)$$

Как известно на примере изучения других теорий, нестабильности, если таковые имеются, часто проявляют себя именно в скалярном секторе, так что прежде всего наше внимание было направлено на изучение этого сектора. Как мы и предполагали, в этом секторе были найдены экспоненциально растущие нестабильности, вследствие чего дальнейшее исследование векторного и тензорного секторов проведено не было. Поэтому данный раздел содержит исследование только скалярного сектора, с подробным описанием нестабильностей, возникающих в нем.

Заметим, что мы не используем какие-либо соотношения между параметрами теории, в том числе малость λ по сравнению с f в разделе 5.1, поэтому его выводы справедливы как для случая большого, так и для случая малого фонового кручения. В разделе 5.1.5, напротив, мы используем факт (5.1) и рассматриваем предел малых λ .

5.1. Приведение системы уравнений скалярного сектора к системе четырех дифференциальных уравнений первого порядка

5.1.1. Уравнения поля в скалярном секторе

В целом, уравнения поля в скалярном секторе весьма громоздки. Для их получения, а также для последующих манипуляций с ними, нами был разработан код для системы компьютерной алгебры Maple, доступный по ссылке [56].

После того, как определена параметризация возмущений, можно вычислить величины F_{ijkl} , P_{ij} , S_{ijk} и др., входящие в уравнения (4.12), (4.13). Используя их, далее можно получить линеаризованные уравнения. При записи уравнений в этой главе удобно использовать следующие обозначения:

$$\beta = \alpha e^{2\phi}, \quad \tilde{\beta} = \tilde{\alpha} e^{2\phi}, \quad \mathbf{f} = f e^{\phi}, \quad \mathbf{g} = g e^{\phi}, \quad \Lambda = \lambda e^{\phi}, \quad (5.2)$$

где $\phi(\eta)$ определено в (4.9). Начнем с уравнения (4.12), которое имеет два свободных индекса, i и j . Общая форма левой части уравнения (4.12) в скалярном секторе имеет вид:

$$\mathcal{G}_{ij} = \begin{cases} \mathcal{G}^{(00)}, & i = j = 0 \\ ik_a \mathcal{G}^{(a0)}, & i = a, j = 0 \\ ik_a \mathcal{G}^{(0a)}, & i = 0, j = a \\ \delta_{ab} \mathcal{G}^{(\delta)} - k_a k_b \mathcal{G}^{(k \otimes k)} + i \epsilon_{abc} k_c \mathcal{G}^{(\epsilon k)}, & i = a, j = b \end{cases} \quad (5.3)$$

где $\mathcal{G}^{(00)}$, ..., $\mathcal{G}^{(\epsilon k)}$ — скалярные функции. Их явные выражения приведены в уравнениях (с1) – (с6) Приложения В.2.

Уравнение (4.13) имеет три свободных индекса, i , j , k , а также оно антисимметрично по индексам i , j . Таким образом, оно разбивается на компоненты

$(0a0)$, $(ab0)$, $(0ab)$ и (abc) . В терминах скалярных функций имеем следующее:

$$\mathcal{T}_{ijk} = \begin{cases} ik_a \mathcal{T}^{(0a0)}, & i = 0, j = a, k = 0 \\ i\epsilon_{abc} k_c \mathcal{T}^{(ab0)}, & i = a, j = b, k = 0 \\ \delta_{ab} \mathcal{T}^{(\delta)} - k_a k_b \mathcal{T}^{(k \otimes k)} + i\epsilon_{abc} k_c \mathcal{T}^{(\epsilon k)}, & i = 0, j = a, k = b \\ \epsilon_{abc} \mathcal{T}^{(\epsilon)} - \epsilon_{abd} k_c k_d \mathcal{T}^{(\epsilon k \otimes k)} + i(\delta_{ac} k_b - \delta_{bc} k_a) \mathcal{T}^{(\delta \otimes k)}, & i = a, j = b, k = c \end{cases} \quad (5.4)$$

При получении этого разложения было использовано следующее свойство:

$$\epsilon_{abc} = \epsilon_{abd} \frac{k_c k_d}{k^2} + (k_a \epsilon_{bcd} - k_b \epsilon_{acd}) \frac{k_d}{k^2}.$$

Таким образом, уравнение (4.13) распадается на 8 скалярных уравнений, явная форма которых дается в (с7) – (с14) Приложения В.2.

В итоге имется 14 уравнений: 6 из них представляют из себя дифференциальные уравнения второго порядка по производным по времени, а оставшиеся 8 – только первого порядка, см. Приложение В.2. Производные второго порядка по времени содержат следующие уравнения: (с5), (с9), (с10), (с11), (с13) и (с14), тогда как уравнения (с1) – (с4), (с6) – (с8) и (с12) содержат производные только первого порядка.

5.1.2. Использование обобщенных тождеств Бьянки

Как следует из наличия обобщенных тождеств Бьянки, не все уравнения поля являются независимыми. Чтобы понять, какие уравнения можно исключить из рассмотрения (а заодно и для того, чтобы проверить самосогласованность полученной системы уравнений) распишем подробно тождества Бьянки после выделения конформного фактора, в проекции на скалярный сектор.

Тождество (4.4) в скалярном секторе дает два нетривиальных соотношения между уравнениями поля: для $\mu = 0$ и для $\mu = a$ (последнее пропорционально k_a). Тождество (4.7) дает два других соотношения, одно для

$(i, j) = (0, a)$ и другое — для $(i, j) = (a, b)$, причем они пропорциональны k_a и $\epsilon_{abc}k_c$ соответственно.

Напомним, что мы сделали конформное преобразование, тогда как тождества Бьянки (4.4), (4.7) написаны для уравнений до конформного преобразования. В частности, уравнения $\hat{\mathcal{G}}_{ij}$ и $\hat{\mathcal{T}}_{ij}$ в (4.4), (4.7) являются левыми частями общих уравнений (1.21) и (1.26), тогда как мы работаем с уравнениями (4.12), (4.13), которые были получены после выделения конформного фактора.

Итак, после конформного преобразования тождество (4.4) для $\mu = 0$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & 2\mathcal{G}^{(a0)}k^2 - 2\Lambda\mathcal{G}^{(00)} + 6\Lambda\mathcal{G}^{(\delta)} + 2(\mathcal{G}^{(00)})' - 2\Lambda\mathcal{G}^{(k\otimes k)}k^2 + 6\Lambda\mathfrak{f}\mathcal{T}^{(\delta)} \\ & - 6\Lambda\mathfrak{g}\mathcal{T}^{(\epsilon)} - 2\Lambda\mathfrak{f}k^2\mathcal{T}^{(k\otimes k)} + 2\Lambda\mathfrak{g}k^2\mathcal{T}^{(\epsilon k\otimes k)} \equiv 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

а для $\mu = a$ оно выглядит так:

$$\begin{aligned} & -2\mathcal{G}^{(\delta)} + 2(\mathcal{G}^{(0a)})' + 2\mathfrak{g}\mathcal{T}^{(\epsilon)} - 2\mathfrak{f}\mathcal{T}^{(\delta)} + 2\mathfrak{f}(\mathcal{T}^{(0a0)})' - 2\mathfrak{g}(\mathcal{T}^{(ab0)})' \\ & + 2\mathcal{G}^{(k\otimes k)}k^2 + 2\mathfrak{f}k^2\mathcal{T}^{(k\otimes k)} - 2\mathfrak{g}k^2\mathcal{T}^{(\epsilon k\otimes k)} - 2\Lambda\mathfrak{g}\mathcal{T}^{(ab0)} + 2\Lambda\mathfrak{f}\mathcal{T}^{(0a0)} \equiv 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Тождество (4.7) разбивается на 2 скалярных тождества: для $i = a, j = 0$:

$$\mathcal{G}^{(0a)} - \mathcal{G}^{(a0)} - \mathcal{T}^{(k\otimes k)}k^2 + 2\mathfrak{f}\mathcal{T}^{(\delta\otimes k)} + 2\mathfrak{g}\mathcal{T}^{(\epsilon k)} - (\mathcal{T}^{(0a0)})' + \mathcal{T}^{(\delta)} \equiv 0, \quad (5.7)$$

и для $i = a, j = b$:

$$\mathcal{T}^{(\epsilon k\otimes k)}k^2 + 2\mathfrak{f}\mathcal{T}^{(\epsilon k)} - 2\mathfrak{g}\mathcal{T}^{(\delta\otimes k)} - 2\mathcal{G}^{(\epsilon k)} - \mathcal{T}^{(\epsilon)} + (\mathcal{T}^{(ab0)})' \equiv 0. \quad (5.8)$$

Напомним еще раз, что здесь $\mathcal{G}^{(\dots)}$ и $\mathcal{T}^{(\dots)}$ это левые части уравнений поля, определенные в (5.3) and (5.4), а их явный вид приведен в Приложении В.2.

Итак, мы имеем четыре скалярных тождества. Рассмотренные как система уравнений, тождества (5.5)-(5.8) могут быть разрешены относительно $\mathcal{G}^{(\delta)}$, $\mathcal{T}^{(k\otimes k)}$, $\mathcal{T}^{(\delta\otimes k)}$ и $\mathcal{T}^{(\epsilon)}$ (уравнения (с5), (с9), (с13) и (с14) соответственно). Таким образом, мы можем выразить эти уравнения через оставшиеся 10 скалярных поля и исключить их из рассмотрения.

5.1.3. Число динамических мод

На фоне пространства Минковского скалярный сектор содержит две динамические моды. Одной из них является скаляр с массой (2.16), а другая мода представляет из себя часть (спиральности 0) массивного возмущения спина 2 с массой (2.17). Цель этого раздела — показать, что на фоне самоускоряющегося решения в скалярном секторе также содержится только две моды, то есть явление Бульвара-Дезера не наблюдается.

Сразу заметим, что случай $c_3 = c_4 = -\frac{3}{2}c_5$ является особенным для скалярного сектора, и мы его не рассматривали (рассмотрение этого специфического случая не является действительно актуальной задачей, поскольку в векторном секторе найдена неустранимая неустойчивость). Мы будем использовать в этой главе переменную

$$b \equiv c_{35} = \frac{c_3}{c_5} .$$

Как можно заметить из формул этой главы, соотношение $c_3 - c_4$ (или $2c_3 + 3c_5$, что то же самое с учетом условия (1.17)) нередко встречается в знаменателях выражений, и мы будем предполагать его не равным нулю:

$$2c_3 \neq -3c_5 . \tag{5.9}$$

Рассмотрим систему 10 уравнений, оставшихся после учета тождеств Бьянки: (c1) – (c4), (c6) – (c8), (c10) – (c12). Два уравнения, (c10) и (c11), содержат вторую производную по времени. Однако, их можно заменить уравнениями первого порядка. С этой целью мы рассматриваем комбинацию уравнения $\mathcal{T}^{(\delta)}$, т.е. (c10), и уравнения $\mathcal{T}^{(\epsilon k)}$, т.е. (c11), с оставшимися восемью уравнениями и их производными по времени, которые в результате дают уравнения

первого порядка. Эти комбинации записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(1)} \equiv & 3\mathcal{T}^{(\delta)} - \frac{1}{2\Lambda\mathfrak{f}} \left[\Lambda\mathcal{G}^{(00)} - 3\Lambda(\mathcal{G}^{(0a)})' - 3\Lambda^2\mathfrak{f}\mathcal{T}^{(0a0)} - 3\Lambda\mathfrak{f}(\mathcal{T}^{(0a0)})' \right. \\ & - k^2\mathcal{G}^{(a0)} - 2\Lambda k^2\mathcal{G}^{(k\otimes k)} - (\mathcal{G}^{(00)})' + 3\Lambda^2\mathfrak{g}\mathcal{T}^{(ab0)} \\ & \left. + 2\Lambda\mathfrak{g}k^2\mathcal{T}^{(\epsilon k\otimes k)} + 3\Lambda\mathfrak{g}(\mathcal{T}^{(ab0)})' \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(2)} \equiv & 2\mathcal{T}^{(\epsilon k)} - \frac{1}{\Lambda\mathfrak{f}k^2} \left[2\Lambda\mathfrak{f}k^2\mathcal{T}^{(ab0)} - 2\mathfrak{f}^2\Lambda k^2\mathcal{T}^{(\epsilon k\otimes k)} - 2\Lambda\mathfrak{f}k^2(\mathcal{T}^{(\epsilon k\otimes k)})' + \mathfrak{g}\Lambda\mathcal{G}^{(00)} \right. \\ & - 3\mathfrak{g}\Lambda(\mathcal{G}^{(0a)})' - \mathfrak{g}(\mathcal{G}^{(00)})' - 3\mathfrak{g}\Lambda^2\mathfrak{f}\mathcal{T}^{(0a0)} - 3\mathfrak{g}\Lambda\mathfrak{f}(\mathcal{T}^{(0a0)})' - \mathfrak{g}k^2\mathcal{G}^{(a0)} \\ & \left. - 2\mathfrak{g}\Lambda k^2\mathcal{G}^{(k\otimes k)} + 3\Lambda^2\mathfrak{g}^2\mathcal{T}^{(ab0)} + 2\Lambda\mathfrak{g}^2k^2\mathcal{T}^{(\epsilon k\otimes k)} + 3\Lambda\mathfrak{g}^2(\mathcal{T}^{(ab0)})' \right] . \end{aligned} \quad (5.11)$$

Эти уравнения — первого порядка. Их явные выражения даются уравнениями (d1) и (d2) Приложения В.2. Таким образом, на этой стадии мы имеем систему 10 уравнений первого порядка, (с1) – (с4), (с6) – (с8), (с12), (d1), (d2), для 10 переменных, описывающих скалярные возмущения.

Важным наблюдением является следующее. Переменные, входящие в уравнения системы, разбиваются на две группы. Переменные первой группы,

$$\sigma, \Phi, \tilde{\xi}, \theta, \quad (5.12)$$

входят в уравнения без своих производных по времени, тогда как переменные второй группы,

$$\Psi, \chi, \rho, Q, u, M, \quad (5.13)$$

входят в уравнения со своими первыми производными по времени.

Также примечательно то, что можно составить две линейные комбинации 10 уравнений так, чтобы они были представляли из себя алгебраические уравнения на переменные (6.32). Одна из таких комбинаций получается следующим

образом:

$$\begin{aligned}
AE_1 &= \mathcal{A}[2(3c_5 + 2c_3) + 96c_6]\mathfrak{g}(\Lambda - 2\mathfrak{f})2\mathfrak{f}c_3 \\
&- (3c_5 + 2c_3) \left\{ \left(\frac{k^2}{3}\mathcal{G}^{(00)} - \mathcal{T}^{(ab0)}\Lambda\mathfrak{g}k^2 + \mathcal{G}^{(0a)}\Lambda k^2 - \mathfrak{g}A \right) [4c_3(\mathfrak{f}^2 - \mathfrak{g}^2 - \Lambda\mathfrak{f}) - 3\tilde{\beta}] \right. \\
&\left. - 4\Lambda\mathfrak{f}^2c_3k^2(\mathcal{G}^{(0a)} - \mathcal{G}^{(a0)}) \right\} = 0, \tag{5.14}
\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{A} \equiv 2k^2\Lambda\mathfrak{f}\mathcal{T}^{(\epsilon k \otimes k)} + 3\mathfrak{g} \left(\mathcal{T}^{(0a0)}\Lambda\mathfrak{f} + \frac{1}{3}\mathcal{G}^{(00)} - \mathcal{T}^{(ab0)}\Lambda\mathfrak{g} + \mathcal{G}^{(0a)}\Lambda \right).$$

Заметим, что в силу условия (5.9), второе слагаемое в уравнении (5.14) не обращается в ноль.

Другое алгебраическое уравнение получается путем комбинации уравнений (c1) - (c4), (c6) - (c8), (c12), (d1):

$$\begin{aligned}
AE_2 &= \left\{ \frac{4\mathfrak{f}c_3}{3\tilde{\beta}(3\mathfrak{g}^2 - k^2)} [(2c_3 + 3c_5)(6\mathfrak{f}\mathfrak{g}^2 - \Lambda k^2) - 144\mathfrak{g}^2c_6(\Lambda - 2\mathfrak{f})] \right. \\
&\left. - \frac{3\tilde{\beta} - 4(\mathfrak{f}^2 - \mathfrak{g}^2)c_3}{3\tilde{\beta}}(2c_3 + 3c_5) \right\} (\mathcal{D} - \mathcal{B}\Omega) \\
&+ \left\{ \Omega \left[-4c_3k^2 + \frac{12\tilde{\beta}(\mathfrak{f}^2 - \mathfrak{g}^2)c_3}{\beta} - \frac{(3c_5 + 24c_6)\mathfrak{g}^2c_3}{c_6} \right. \right. \\
&\left. \left. - \left(\frac{6\tilde{\beta}}{\beta} + \frac{3c_5 + 24c_6}{4c_6} \right) \frac{12c_3\mathfrak{f}^2\mathfrak{g}^2}{(3\mathfrak{g}^2 - k^2)} \right] \right. \\
&\left. + 2(3c_5 + 2c_3)[24c_5\mathfrak{f} - (96c_6 + 4c_3)(\Lambda - 2\mathfrak{f})] \right. \\
&\left. - \frac{12\mathfrak{f}c_3[3\tilde{\beta} + 6c_5(\mathfrak{f}^2 + \mathfrak{f}\Lambda - \mathfrak{g}^2) - 4c_3(\mathfrak{f}^2 - \mathfrak{f}\Lambda - \mathfrak{g}^2)]}{3\mathfrak{g}^2 - k^2} \right\} \mathcal{E}\mathfrak{g} = 0, \tag{5.15}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Omega &\equiv \frac{24c_5(3c_3 + 2c_5)(\Lambda + 2f)}{576c_6\mathbf{g}^2 - (3c_5 + 24c_6)^2\mathbf{g}^2/(4c_6) + 9\tilde{\beta}(\beta - \tilde{\beta})/\beta}, \\
\mathcal{E} &\equiv \frac{1}{3} \frac{8fc_3 + 12fc_5 + 192fc_6 - 4\Lambda c_3 - 6\Lambda c_5 - 96\Lambda c_6}{\tilde{\beta}(3\mathbf{g}^2 - k^2)} \left(-\mathbf{g}\mathcal{T}^{(\epsilon k \otimes k)} + \frac{2k^2}{3}\mathcal{T}^{(0a0)} \right) \\
&\quad + \frac{1}{3} \frac{6\mathbf{g}^2c_3 + 9\mathbf{g}^2c_5 - 2k^2c_3 - 3k^2c_5}{\tilde{\beta}(3\mathbf{g}^2 - k^2)} (\mathcal{G}^{(a0)} - \mathcal{G}^{(0a)}), \\
\mathcal{D} &\equiv \frac{-12f^2\mathbf{g}c_3 + 18f^2\mathbf{g}c_5 + 12f\mathbf{g}\Lambda c_3 + 18f\mathbf{g}\Lambda c_5 + 12\mathbf{g}^3c_3 - 18\mathbf{g}^3c_5 + 9\mathbf{g}\tilde{\beta}}{3\mathbf{g}^2 - k^2} \\
&\quad \times \left(\mathcal{T}^{(0a0)} - \frac{3}{2k^2}\mathbf{g}\mathcal{T}^{(\epsilon k \otimes k)} \right) \\
&\quad - \frac{24\mathbf{g}^2c_3 + 36\mathbf{g}^2c_5 - 8k^2c_3 - 12k^2c_5}{3\mathbf{g}^2 - k^2} \mathcal{G}^{(\epsilon k)}, \\
\mathcal{B} &\equiv -\frac{1}{2f\beta} \left(+3\beta\Lambda f\mathcal{T}^{(0a0)} - 3\beta\Lambda\mathbf{g}\mathcal{T}^{(ab0)} - 2\beta\mathbf{g}k^2\mathcal{T}^{(\epsilon k \otimes k)} \right. \\
&\quad \left. - 2\beta f\mathcal{D}^{(1)} - 6f\tilde{\beta}\mathcal{G}^{(0a)} \right) + \frac{3\mathbf{g}}{c_6f} (fc_5 + 8fc_6 + 2\Lambda c_6)\mathcal{T}^{(ab0)} \\
&\quad + \frac{1}{4} \frac{6\beta f^2\mathbf{g}k^2c_5 + 48\beta f^2\mathbf{g}k^2c_6 - 12\beta\mathbf{g}^3k^2c_6 + 4\beta\mathbf{g}k^4c_6 + 48f^2\mathbf{g}k^2\tilde{\beta}c_6}{c_6f\beta(3\mathbf{g}^2 - k^2)} \mathcal{T}^{(\epsilon k \otimes k)} \\
&\quad + \frac{1}{4} \frac{9\beta f\mathbf{g}^2c_5 + 72\beta f\mathbf{g}^2c_6 + 18\beta\mathbf{g}^2\Lambda c_6 - 6\beta k^2\Lambda c_6 + 72f\mathbf{g}^2\tilde{\beta}c_6}{c_6\beta(3\mathbf{g}^2 - k^2)} \mathcal{T}^{(0a0)}.
\end{aligned}$$

Итак, мы имеем 2 уравнения (5.14), (5.15), которые содержат только полевые переменные (6.32). Таким образом, можно использовать уравнения (5.14) и (5.15) для того, чтобы выразить 2 переменные из набора (6.32) (например, M и ρ) через остальные переменные этого набора (Ψ , χ , Q , u); важно, что получившиеся выражения для M и ρ — алгебраические, то есть они не содержат производных. Далее, 4 из оставшихся 8 уравнений можно использовать, чтобы выразить σ , Φ , $\tilde{\xi}$, θ (переменные, которые входят в уравнения без своих производных) через Ψ , χ , Q , u и их первые производные по времени. В результате имеется 4 уравнения первого порядка для 4 переменных (Ψ , χ , Q , u). Таким образом, в скалярном секторе имеется 2 степени свободы — то же самое число степеней свободы, как и на фоне пространства Минковского. Мы заключаем,

что скалярный сектор на фоне самоускоряющегося решения не содержит мод Бульвара-Дезера. Напомним еще раз, что в этом разделе мы не делали никаких предположений о величине f — они будут сделаны позже, поэтому всё, описанное в настоящем разделе, справедливо независимо от величины параметра f .

На практике, в нашем случае удобно выразить σ , $\tilde{\xi}$, Φ , θ из уравнений (с3), (с4), (с7) и (с8) соответственно, и подставить это в уравнения

$$\mathcal{E}^{(1)} \equiv (\text{с6}), \quad \mathcal{E}^{(2)} \equiv (\text{d1}), \quad (5.16)$$

а также в следующие линейные комбинации уравнений:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(3)} &\equiv \frac{-k^2 f}{\Lambda} (\text{с2}) - \frac{(5\Lambda + 2f)k^2}{\Lambda} (\text{с6}) + 2f(\text{d1}), \\ \mathcal{E}^{(4)} &\equiv \frac{-2(-4k^2 f c_{35} - 6k^2 f + 3\Lambda f^2 c_{35} - 6\Lambda k^2 c_{35} - 9\Lambda k^2)}{\Lambda} (\text{с6}) \\ &\quad - 2f(2c_{35} + 3)(\text{d1}) + \frac{(2c_{35} + 3)k^2}{\Lambda} (\text{d2}), \end{aligned} \quad (5.17)$$

где

$$c_{35} \equiv \frac{c_3}{c_5},$$

(с2) обозначает левую часть уравнения (с2) из Приложения В.2 и т.д.. После этого мы выражаем M , ρ , M' и ρ' из алгебраических уравнений (5.14), (5.15) и их производных по времени, и подставляем это в уравнения $\mathcal{E}^{(1)}$, $\mathcal{E}^{(2)}$, $\mathcal{E}^{(3)}$, $\mathcal{E}^{(4)}$. После этого система сводится к системе дифференциальных уравнений первого порядка $\mathcal{E}^{(1)}$, $\mathcal{E}^{(2)}$, $\mathcal{E}^{(3)}$, $\mathcal{E}^{(4)}$ для переменных Ψ , χ , Q , U :

$$y'_i(\eta) = m_{ij} y_j(\eta). \quad (5.18)$$

5.1.4. ВКБ-приближение

В нашем исследовании мы будем интересоваться пределом малых λ . А именно: мы будем интересоваться модами с большими импульсами:

$$\frac{k}{\Lambda} \gg 1. \quad (5.19)$$

Напомним, что k — это конформный импульс,

$$k = k_{phys}a(\eta) ,$$

а Λ и \mathbf{f} конформно связаны с настоящими физическими параметрами космологического решения. Уравнение (5.19), записанное через физический импульс и оригинальные переменные, выглядит так:

$$\frac{k_{phys}}{\lambda} \gg 1 .$$

Параметры c_{35} и $\Xi \equiv \frac{\tilde{\alpha}}{|\alpha|}$ имеют порядок 1,

$$c_{35} \sim 1 , \quad \Xi \sim 1 . \quad (5.20)$$

Параметр f , характеризующий величину фонового кручения, в данной главе принимает большие значения:

$$|f| \gg \lambda . \quad (5.21)$$

В условиях (5.19) - (5.21) параметр λ (или Λ , что не важно) можно считать наименьшим параметром модели. В таком пределе масштабированные величины \mathbf{f} , \mathbf{g} , Λ , β , $\tilde{\beta}$ слабо зависят от времени, и этой зависимостью можно пренебречь. На этом этапе мы можем применить ВКБ-метод, представляя (в первом приближении) общее решение системы (5.18) в виде

$$y_i(\eta) = v_i e^{i\omega\eta} . \quad (5.22)$$

Выражаясь технически, мы делаем замену

$$\partial_0 \equiv i\omega .$$

Заметим, что нас интересуют высокие частоты, т.е.

$$\omega \gg \Lambda . \quad (5.23)$$

Подчеркнем еще раз, что для применимости ВКБ приближения нам необходимо выполнение обоих условий

$$\frac{\omega}{\Lambda} \simeq \frac{\omega}{\lambda} = \frac{\omega}{H} \ll 1, \quad |z| \equiv \frac{k}{\Lambda} \simeq \frac{k}{\lambda} = \frac{k}{H} \ll 1, \quad (5.24)$$

где мы ввели новую величину

$$z \equiv k\eta = -\frac{k}{\Lambda}. \quad (5.25)$$

Эта величина будет использоваться нами в следующей главе.

Чтобы получить дисперсионное соотношение, мы вычисляем характеристический полином матрицы (5.18), представляющий из себя полином четвертой степени по ω , и собственные значения

$$\omega_i = \omega_i(k), i = 1, \dots, 4$$

дают искомые частоты. Мы будем интересоваться первым приближением по Λ и, после вычисления характеристического полинома, оставлять в нем только старшие порядки по Λ для каждой степени ω .

5.1.5. Предел малых λ . Нестабильность в скалярном секторе.

Напомним, что здесь мы исследуем случай, когда фоновое кручение не мало (5.1), а именно, оно много больше параметра Хаббла,

$$|f| \gg \lambda.$$

При этом связь величины параметра f с константами α , $\tilde{\alpha}$ может быть любой в силу того, что в уравнения для возмущений входит только отношение $\Xi \equiv \frac{\tilde{\alpha}}{|\alpha|}$, но не сами параметры α , $\tilde{\alpha}$.

Чтобы продемонстрировать наличие экспоненциально растущих мод, мы рассмотрим две области значений импульсов:

$$k^2 \ll \Lambda f \quad (5.26)$$

и

$$f^3 \Lambda \ll k^4 \ll \frac{f^5}{\Lambda}. \quad (5.27)$$

Мы собираемся показать, что в области импульсов (5.26) имеются неустойчивости вида

$$\omega \sim -i \frac{f^2}{\Lambda} \quad \text{и} \quad \omega \sim -i \sqrt{\frac{\Lambda^3 f}{k^2}},$$

а в области (5.27) — неустойчивость вида

$$\omega \sim -i \frac{f^2}{\Lambda}.$$

Сначала рассмотрим случай (5.27). Уравнение четвертой степени на ω (получающееся приравниванием характеристического многочлена к нулю), в главном порядке по Λ для случая (5.27) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & - (108f^4b + 72f^4b^2 + 45f^2k^2 + 18f^2b^2k^2 + 51f^2bk^2 - 2bk^4 - 3k^4)(6f^2 + k^2)\omega^4\Lambda^2 \\ & - i(-3k^4 + 27f^2k^2 - 2bk^4 + 33f^2bk^2 + 36f^4b + 14f^2b^2k^2 + 24f^4b^2)(6f^2 + k^2)f^2\omega^3\Lambda \\ & - 2f^6(6f^2 + k^2)(2b + 3)(12f^2b + bk^2 + 3k^2)\omega^2 + 8i(12f^2b + bk^2 + 3k^2)(2b + 3)k^2f^6\omega\Lambda \\ & - 8f^6(18f^2 - k^2)(2b + 3)(12f^2b + bk^2 + 3k^2)\Lambda^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Это выражение получено с помощью программы (написанной для среды Maple), доступной по ссылке [56]. Уравнение (5.28) — четвертой степени по ω , поэтому имеет четыре решения. Некоторые из этих решений не удовлетворяют условию $\omega \gg \Lambda$, которое мы изначально предполагаем (см. (5.23)). Поэтому мы найдем все 4 решения характеристического уравнения, а после отбросим не удовлетворяющие условию (5.23). Для этого рассмотрим несколько предельных случаев.

- $\omega \ll \Lambda$. Все слагаемые, содержащие ω , малы, а уравнение (5.28) сводится к следующему:

$$- 8f^6(18f^2 - k^2)(2b + 3)(12f^2b + bk^2 + 3k^2)\Lambda^2 = 0 \quad (5.29)$$

Уравнение (5.29) не содержит ω , у него нет решений.

- $\omega \sim \Lambda$. В этом случае уравнение (5.28) превращается в квадратное,

$$\begin{aligned} & - 2f^6(6f^2 + k^2)(2b + 3)(12f^2b + bk^2 + 3k^2)\omega^2 \\ & + 8i(12f^2b + bk^2 + 3k^2)(2b + 3)k^2f^6\omega\Lambda \\ & - 8f^6(18f^2 - k^2)(2b + 3)(12f^2b + bk^2 + 3k^2)\Lambda^2 = 0 , \end{aligned}$$

и имеет два корня:

$$\omega_{1,2} = 2i \frac{k^2 \pm 2\sqrt{27f^4 + 3f^2k^2}}{6f^2 + k^2} \Lambda .$$

Эти корни, однако, не удовлетворяют условию $\omega \gg \Lambda$ и поэтому не важны.

- $\Lambda \ll \omega \ll \frac{f^2}{\Lambda}$. В этом случае $\omega\Lambda \ll f^2$ и

$$\omega^3\Lambda \ll \omega^2f^2 , \quad \omega^4\Lambda^2 \ll \omega^2f^4 .$$

В уравнении (5.28) выживает только третье слагаемое, и мы имеем следующее:

$$- 2f^6(6f^2 + k^2)(2b + 3)(12f^2b + bk^2 + 3k^2)\omega^2 = 0 .$$

Решений нет.

- $\omega \sim \frac{f^2}{\Lambda}$. Слагаемые, пропорциональные $\omega\Lambda$ и Λ^2 , много меньше всех остальных, и уравнение (5.28) принимает вид:

$$\begin{aligned} & - (108f^4b + 72f^4b^2 + 45f^2k^2 + 18f^2b^2k^2 \\ & + 51f^2bk^2 - 2bk^4 - 3k^4)(6f^2 + k^2)\omega^4\Lambda^2 \\ & - i(-3k^4 + 27f^2k^2 - 2bk^4 + 33f^2bk^2 \\ & + 36f^4b + 14f^2b^2k^2 + 24f^4b^2)(6f^2 + k^2)f^2\omega^3\Lambda \\ & - 2f^6(6f^2 + k^2)(2b + 3)(12f^2b + bk^2 + 3k^2)\omega^2 = 0 . \end{aligned} \quad (5.30)$$

Уравнение (5.30) имеет два корня:

$$\omega_3 = -i \frac{f^2}{\Lambda}, \quad (5.31)$$

$$\omega_4 = 2i \frac{(12f^2b + bk^2 + 3k^2)(2b + 3)f^4}{\Lambda(108f^4b + 72f^4b^2 + 45f^2k^2 + 18f^2b^2k^2 + 51f^2bk^2 - 2bk^4 - 3k^4)}. \quad (5.32)$$

- $\omega \gg \frac{f^2}{\Lambda}$. В этом случае слагаемые с ω много больше остальных слагаемых.

Уравнение (5.28) имеет вид:

$$-(108f^4b + 72f^4b^2 + 45f^2k^2 + 18f^2b^2k^2 + 51f^2bk^2 - 2bk^4 - 3k^4)(6f^2 + k^2)\omega^4\Lambda^2 = 0.$$

Решений нет.

Мы видим, что частоты (5.31) и (5.32) в соответствующей области значений k^2 (5.27) имеют следующий порядок величины:

$$\omega_{3,4} \sim -i \frac{f^2}{\Lambda}.$$

Они чисто мнимые и соответствуют неустойчивостям.

Теперь рассмотрим случай $k^2 \ll \Lambda f$, уравнение (5.26). В главном порядке по Λ уравнение четвертой степени на ω выглядит следующим образом:

$$6b\beta k^2 \omega^4 \Lambda^2 + (5b\beta k^4 + 3\beta k^4) \Lambda^2 \omega^3 + 24b\beta k^2 \omega^2 f^4 + 8\Lambda f^3 \tilde{\beta} k^4 \omega + 864b\tilde{\beta} \Lambda^3 f^5 = 0. \quad (5.33)$$

Как и раньше, рассмотрим предельные случаи.

- $\omega \lesssim \Lambda$. В этом случае в уравнении доминируют слагаемые нулевого порядка по ω , и (5.33) принимает вид

$$864b\tilde{\beta} \Lambda^3 f^5 = 0.$$

Корней нет.

- $\Lambda \ll \omega \ll \frac{f^2}{\Lambda}$. Доминируют слагаемые с ω^2 and ω^0 , уравнение (5.33) трансформируется в уравнение второго порядка:

$$24b\beta k^2 \omega^2 f^4 + 864b\tilde{\beta}\Lambda^3 f^5 = 0 .$$

Есть два решения:

$$\omega_5 = -6\sqrt{\frac{\tilde{\beta}f\Lambda}{\beta k^2}}i\Lambda , \quad \omega_6 = 6\sqrt{\frac{\tilde{\beta}f\Lambda}{\beta k^2}}i\Lambda . \quad (5.34)$$

- $\omega \sim \frac{f^2}{\Lambda}$. В уравнении (5.33) доминируют первый и третий слагаемые, и в итоге получается следующее уравнение:

$$6b\beta k^2 \omega^4 \Lambda^2 + 24b\beta k^2 \omega^2 f^4 = 0 .$$

Оно имеет два корня:

$$\omega_7 = -\frac{2if^2}{\Lambda} , \quad \omega_8 = \frac{2if^2}{\Lambda} .$$

- $\omega \gg \frac{f^2}{\Lambda}$. В уравнении (5.33) первое слагаемое много больше всех остальных, так что мы имеем

$$6b\beta k^2 \omega^4 \Lambda^2 = 0 .$$

Решений нет.

Частоты ω_5 и ω_7 соответствуют неустойчивостям. На этом заканчивается наш анализ дисперсионных соотношений в областях значений импульсов (5.26), (5.27).

Неустойчивости ω_3 , ω_4 и ω_7 не обязательно приводят к катастрофическим последствиям. Соответствующим подбором значений параметров:

$$\omega \sim \frac{f^2}{\Lambda} \gtrsim M_{UV} ,$$

можно сделать частоту этих мод выше ультрафиолетового обрезания модели M_{UV} , которая обязательно присутствует в любой низкоэнергетической теории, каковой и является рассматриваемая нами теория гравитации.

С другой стороны, избавиться от неустойчивости ω_5 никак не получится. Действительно, мы изучаем фоновое решение (4.11), поэтому его параметры много меньше масштаба ультрафиолетового обрезания, $f \ll M_{UV}$. Отсюда с учетом (5.19) получается:

$$\omega = \frac{\Lambda}{k} \sqrt{\Lambda f} \ll M_{UV} .$$

Таким образом, мы не можем вытеснить эту моду за рамки ультрафиолетового обрезания. Поэтому для достаточно малых k (при этом таких, что $k \gg \Lambda$) эта неустойчивость развивается быстро. При рассматриваемых нами значениях f

$$f \gg \lambda ,$$

экспоненциальный рост возмущения делает его большим (и нелинейным) за Хаббловское время.

Итак, анализ скалярных возмущений в пределе большого фонового кручения (5.1) показал, что в этом пределе самоускоряющееся решение неустойчиво из-за присутствия экспоненциально растущих мод.

Глава 6

Малые возмущения на фоне самоускоряющегося решения. Случай малого фонового кручения

6.1. Общие положения. Разложение по степеням z .

6.1.1. Переменная z

Помимо разложения по степеням малого параметра λ , использованного в предыдущей главе, есть и другой способ посмотреть на ВКБ приближение. В (5.25) мы ввели величину z ,

$$z \equiv k\eta = -\frac{k}{\Lambda} = -\frac{k}{a(\eta)\lambda}. \quad (6.1)$$

Будем явно работать с этой переменной и использовать ее как параметр разложения. Действительно, как обычно в космологической теории возмущений, величина (сохраняющегося) пространственного импульса $k = |\mathbf{k}|$ (возможно, ценой нормализации некоторых полевых переменных фактором k для того, чтобы они имели одну и ту же размерность) может быть всюду объединена с конформным временем η , так что уравнения возмущения включают только переменную

$$z \equiv k\eta \equiv -\frac{k_{\text{phys}}}{\lambda}. \quad (6.2)$$

Здесь $k_{\text{phys}} = k/a$ — физический импульс, так что $|z| = |k\eta|$ равно отношению физического импульса (волнового числа) к скорости расширения Хаббла. [z отрицательно (как и η), и растет во времени.] Другими словами, $1/|z|$ — отношение длины волны рассматриваемого возмущения к радиусу горизонта Хаббла. Ниже мы сосредоточимся на изучении мод под горизонтом, то есть таких, для которых $|z| \gg 1$. Действительно, эти моды — важнейшие в вопросе изучения стабильности, так как моды за горизонтом ($|z| \lesssim 1$) эволюционируют

в течение характерного времени, равного Хаббловскому времени. Нас же интересуют неустойчивости, развивающиеся за время, параметрически меньшее чем время Хаббла.

Важно отметить следующее. Из соотношения (6.1) следует, что предел малых λ , использованный нами в предыдущей главе, эквивалентен пределу больших z . Действительно, нами было проверено, что результаты, полученные в пределе малых λ , совпадают с аналогичными результатами, полученными в пределе больших z (см. последний параграф раздела 6.2.1 для дополнительных пояснений).

В данной главе мы будем использовать другую параметризацию возмущений по сравнению с описанной в разделе 4.3.1. А именно, вместо возмущения кручения k_{ijk} (так называемая K –параметризация, см. формулу (4.14)) мы будем рассматривать возмущения связности a_{ijk} (так называемая A –параметризация), определяемые следующим образом:

$$A_{ij\mu} = A_{ij\mu(0)} + a_{ij\mu}, \quad (6.3)$$

где $A_{ij\mu(0)}$ — фоновая величина связности, данная в (4.11). Различие в этих двух параметризациях сводится к концептуально несущественному переопределению полевых переменных, включающему смешивание между возмущениями метрики и связности (мы убедились, что использование разных параметризаций дает один и тот же результат). Например, в скалярном секторе переход от K –параметризации к A –параметризации осуществляется путем следующей замены:

$$\sigma^A = \sigma^K - \partial_\eta \Psi; \quad M^A = M^K - i\Psi; \quad \tilde{\xi}^A = \tilde{\xi}^K - i\Phi. \quad (6.4)$$

Мы не будем вводить новых обозначений для полевых переменных в A –параметризации, и будем обозначать их также, как и переменные в K –параметризации.

6.1.2. Факторизация параметров α и λ из линейной части уравнений поля

В этом разделе мы покажем, что уравнения поля, после нормализации их на некоторую величину, содержат z в качестве единственного большого параметра, при этом остальные параметры являются величинами порядка 1. Для этого нам будет удобно анализировать уравнения поля (1.21) и (1.26) еще до конформного преобразования метрики.

Обратимся к соотношениям (3.21) – (3.23). При $\delta \sim 1$ мы имеем

$$g \sim 1, \quad c_5 \sim c_6 \sim \frac{\tilde{\alpha}}{\lambda^2} \sim c_3 \sim c_4 \quad (\text{последнее верно в силу (1.17)}).$$

Поэтому, если мы определим следующие приведенные параметры:

$$\hat{c}_n \equiv \frac{\lambda^2 c_n}{\tilde{\alpha}} \quad (\text{для } n = 3, 4, 5, 6), \quad (6.5)$$

то будем иметь

$$\hat{c}_n \sim 1.$$

Зададимся целью отследить параметры α и λ в структуре уравнений поля. Рассмотрим структуру тетрад и связности. Учитывая, что $e^{\phi(\eta)} = -1/(\lambda\eta)$, компоненты тетрад (до конформного преобразования) будут иметь следующий вид:

$$\hat{e}_\mu^i \sim \lambda^{-1} \left(\frac{1}{\eta} + \frac{\epsilon}{\eta} \right), \quad (6.6)$$

где ϵ обозначает различные компоненты тензора $\epsilon_{i\mu}$. Обратные величины имеют вид

$$\hat{e}_i^\mu \sim \lambda^{+1} (\eta + \eta\epsilon). \quad (6.7)$$

Структура связности будет иметь следующий вид:

$$A_{ij\mu} \sim \frac{\delta + h}{\eta} + a, \quad (6.8)$$

где a обозначает различные компоненты $a_{ij\mu}$.

Далее, будем обозначать величины нулевого порядка по возмущениям (такие как η, δ, h) как $O_0(1)$, а величины первого порядка по возмущениям $\epsilon^i{}_\mu$ и $a_{ij\mu}$ — как $O_1(1)$. Также введем параметр γ , характеризующий принадлежность к первому порядку по возмущениям. Тогда мы имеем следующие структуры для (6.6)–(6.8):

$$\hat{e}^i{}_\mu \sim \lambda^{-1}(O_0(1) + \gamma O_1(1)); \hat{e}^\mu{}_i \sim \lambda^{+1}(O_0(1) + \gamma O_1(1)), \quad (6.9)$$

$$A_{ij\mu} \sim O_0(1) + \gamma O_1(1). \quad (6.10)$$

Далее, отслеживая наличие или отсутствие тетрады в качестве множителя, мы получаем структуры вида

$$\hat{\omega}_{ij\mu} \sim O_0(1) + \gamma O_1(1), \quad (6.11)$$

$$\hat{\omega}_{ijk} \sim \hat{K}_{ijk} \sim \lambda(O_0(1) + \gamma O_1(1)), \quad (6.12)$$

$$\hat{R}_{ijkl} \sim \hat{R}_{ij} \sim \lambda^2(O_0(1) + \gamma O_1(1)), \quad (6.13)$$

$$\hat{F}_{ijkl} \sim \hat{F}_{ij} \sim \lambda^2(O_0(1) + \gamma O_1(1)). \quad (6.14)$$

Подставляя приведенные выше формулы в уравнения (1.21) и (1.26), нетрудно увидеть, что при использовании приведенных параметров (6.5) структура уравнений поля выглядит следующим образом:

$$\tilde{\mathcal{G}}_{ij} \equiv \frac{\mathcal{G}_{ij}}{\lambda^2 \tilde{\alpha}} \sim \sum_{n=2}^6 \hat{c}_n (O_0^n(1) + \gamma O_1^n(1)), \quad (6.15)$$

где для единообразия мы ввели обозначение $\hat{c}_2 \equiv \xi = |\alpha|/\tilde{\alpha}$, и

$$\tilde{\mathcal{T}}_{ijk} \equiv \frac{\mathcal{T}_{ijk}}{\lambda \tilde{\alpha}} \sim \sum_{n=3}^6 \hat{c}_n (O_0^n(1) + \gamma O_1^n(1)). \quad (6.16)$$

Таким образом, из уравнений (6.15), (6.16) следует, что в итоге мы имеем нормализованные и линеаризованные уравнения поля вида

$$\gamma \sum_n \hat{c}_n O_1^n(\eta, k, \delta, h; \epsilon, \partial_\eta \epsilon, \partial_\eta^2 \epsilon, a, \partial_\eta a, \partial_\eta^2 a). \quad (6.17)$$

Наконец, параметры k и η связываются в один параметр $z = k\eta$, и тогда мы имеем уравнения поля со следующей структурой:

$$\sum_n \hat{c}_n O_1^n(z, \delta, h; \epsilon, \partial_z \epsilon, \partial_z^2 \epsilon, a, \partial_z a, \partial_z^2 a), \quad (6.18)$$

где $z \gg 1$, $(\delta, h, c_n) \sim 1$ — параметры, а ϵ, a — полевые переменные. Уравнения поля $\tilde{\mathcal{G}}_{ij}, \tilde{\mathcal{T}}_{ijk}$ в виде (6.18), описывающие возмущения скалярного, векторного и тензорного секторов, приведены в Приложениях А, Б, В.1.

6.1.3. Метод получения дисперсионных соотношений

Мы будем обсуждать отдельно и последовательно тензорные, векторные и скалярные возмущения на фоне самоускоряющегося решения. Для каждой спиральности h , где $h = \pm 2, \pm 1$ или 0 , мы будем начинать с изначальной системы линеаризованных уравнений поля, содержащей N_h систем обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной z для N_h неизвестных. Значения N_h будут следующими: $N_{+2} = N_{-2} = 3$, $N_{+1} = N_{-1} = 7$, and $N_0 = 10$. Эта начальная система уравнений включает в себя производные по z (бывшие до введения параметра z производными по времени η) не старше второго порядка. Мы покажем для каждой спиральности h , как преобразовать эту начальную систему (путем исключения некоторых переменных) в эквивалентную систему n_h дифференциальных уравнений *первого порядка* для n_h переменных, которую мы будем записывать в матричной форме, т.е.

$$\frac{dy_i^{(h)}(z)}{dz} = m_{ij}^{(h)}(z)y_j^{(h)}(z), \quad i = 1, 2, \dots, n_h. \quad (6.19)$$

Значения n_h будут следующими: $n_{+2} = n_{-2} = 4$, $n_{+1} = n_{-1} = 3$, и $n_0 = 4$, а переменные $y_i^{(h)}(z)$ являются комбинациями (с некоторыми, возможно, z -зависимыми коэффициентами) исходных переменных. Остальные исключенные переменные выражаются в виде комбинаций этих переменных $y_i^{(h)}$ и их первых производных.

Во всех трех секторах матрица дифференциальных коэффициентов $m_{ij}^{(h)}(z)$ имеет конечный предел $m_{ij}^{(h),\infty} = \lim_{z \rightarrow \infty} m_{ij}^{(h)}(z)$ при $z \rightarrow \infty$. Опираясь на теорию дифференциальных уравнений, можно показать, что общее решение системы (6.19) в пределе $z \rightarrow \infty$ представляет собой линейную комбинацию частных решений следующей системы с постоянными (то есть независимыми от z) коэффициентами:

$$y_i'(z) = m_{ij}^{\infty} y_j(z), \quad (6.20)$$

где $m_{ij}^{\infty} = \lim_{z \rightarrow \infty} m_{ij}(z)$. Другими словами, общее решение системы (6.19) в главном порядке по $z \rightarrow \infty$ ведет себя как линейная комбинация частных решений вида:

$$y_i(z) = v_i e^{\sigma z}, \quad (6.21)$$

где σ — одно из собственных значений матрицы m_{ij}^{∞} , а v_i — соответствующие им собственные векторы:

$$m_{ij}^{\infty} v_j = \sigma v_i. \quad (6.22)$$

Тогда высокочастотный закон дисперсии для возмущений спиральности h получается из характеристического многочлена $m_{ij}^{(h),\infty}$:

$$P_{n_h}^{(h)}(\sigma) \equiv \det \left(m_{ij}^{(h),\infty} - \sigma \delta_{ij} \right). \quad (6.23)$$

Далее, каждое решение типа (6.89) имеет вид простой плоской волны относительно конформного времени η и пространственных координат \mathbf{x} (учитывая, что мы делали преобразование Фурье (4.28)):

$$e^{\sigma z + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = e^{+i\omega\eta + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (6.24)$$

где частота ω связана (вспоминая определение $z \equiv k\eta$) с частотой σ как

$$\omega = -i\sigma k ; \quad \sigma = i\omega/k. \quad (6.25)$$

Оказывается, что значения σ всегда встречаются парами: $\sigma_{\pm\alpha} = \pm\sigma_{\alpha}$, где индекс α принимает $2j$ разных значений, $\alpha = \pm 1, \dots, \pm j$. Далее мы покажем,

что $j = 2$ для спиральностей $+2$ и 0 , и $j = 1$ (не считая моды с $\omega = 0$) для спиральности $+1$. Вдобавок к этому мы имеем $j = 2$ для спиральности -2 и $j = 1$ (не считая моды с $\omega = 0$) для спиральности -1 .

Ввиду связи (6.25), каждая такая пара подразумевает закон дисперсии вида

$$\omega^2 = -\sigma_\alpha^2 \mathbf{k}^2, \quad (6.26)$$

и полный закон дисперсии будет многочленом вида

$$\prod_{\alpha=-n}^n (\omega + i\sigma_\alpha k) = \prod_{\alpha=1}^n (\omega^2 + \sigma_\alpha^2 \mathbf{k}^2). \quad (6.27)$$

В плоском пространстве-времени каждая свободное бозонное возмущение имело бы закон дисперсии вида $\omega^2 = +\mathbf{k}^2 + m^2$, где m — масса возмущения. В пределе высокочастотных мод под горизонтом массовый член пренебрежимо мал¹, и мы получаем закон дисперсии вида $\omega^2 = +\mathbf{k}^2$ для каждой степени свободы. Заметим, что такое высокочастотное дисперсионное соотношение соответствует $\sigma = \pm i$ в уравнении (6.24) (скорость света в нашей системе единиц равна 1).

Значение σ , которое является чисто мнимым, но отличается от $\pm i$, скажем, $\sigma = \pm i c_s$, будет соответствовать скорости распространения c_s , отличной от скорости света. Если мы не беспокоимся о возможных последствиях сверхсветового распространения, то все случаи, когда собственные значения σ чисто мнимые, демонстрируют отсутствие экспоненциальных неустойчивостей. Поскольку мы в конечном итоге находим сильные нестабильности, то здесь мы не будем волноваться о том, распространяются ли моды, не имеющие экспоненциальных неустойчивостей, со скоростью, большей скорости света или меньшей. Мы также не будем исследовать вопрос о том, являются ли эти моды духовыми.

¹ Мы рассматриваем область значения параметров, для которой массовые члены сравнимы с Хаббловской величиной, см. (2.16), (2.17)

Нас будут волновать те случаи, когда σ принимает действительные значения, или комплексные с ненулевой действительной частью. Действительно, значение $\sigma = \sigma_r$, где $\sigma_r > 0$, соответствует распространению с действительной экспонентой

$$e^{\sigma_r k \eta}. \quad (6.28)$$

Такие экспоненциальные неустойчивости, со скоростью роста, пропорциональной пространственному импульсу, называются «градиентными неустойчивостями» или «неустойчивостями Лапласа». Это сильнейший тип неустойчивостей, означающий, что возмущения с более короткими длинами волн растут с более быстрыми скоростями (см, например, [23]). В частности, мы найдем, что векторные возмущения содержат пару действительных значений σ : $\sigma = \pm c_s$. Это соответствует мнимой скорости распространения, т.е. закону дисперсии, который мог бы существовать в четырехмерном евклидовом пространстве-времени ($\omega^2 + c_s^2 \mathbf{k}^2 = 0$).

Наконец, заметим, что учет следующего порядка в разложении матрицы $m_{ij}^{(h)}(z)$ по обратным степеням z ,

$$m_{ij}^{(h)}(z) = m_{ij}^{(h),\infty} + \frac{n_{ij}^{(h)}}{z} + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad (6.29)$$

приводит к тому, что общее решение системы уравнений поля записывается в виде суперпозиции частных решений вида:

$$z^\beta e^{\sigma z} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right) \quad (6.30)$$

(с различными σ и β). Однако, такие степенные поправки были бы важны в том случае, если бы мы интересовались описанием выхода возмущений из-под горизонта, например, для сшивания с соответствующими возмущениями за горизонтом. Однако, временные шкалы этих процессов сравнимы со временем Хаббла, и поэтому не интересуют нас. Наша цель — исследовать модель на

наличие неустойчивостей, развивающихся в течение коротких промежутков времени.

Заметим, что вычисления, производящиеся в этой главе, выполнены с помощью разработанных программных кодов для систем компьютерной алгебры Mathematica и Maple, доступных по ссылке [57].

6.2. Скалярный сектор

6.2.1. Дисперсионное соотношение для мод под горизонтом

В данном разделе мы будем использовать факты и результаты из раздела 5.1.3 главы 5.

Изначально мы имеем 14 уравнений на 10 скалярных переменных. Однако, с учетом 4 тождеств Бьянки, число независимых уравнений сокращается до 10. Эти 10 уравнений приведены в Приложении В.1. Они записаны с использованием приведенных параметров \widehat{c}_n (6.5) и нормализованы в соответствие с (6.15) и (6.16).

Работая с 10 скалярными уравнениями из Приложения В.1, можно выполнить рассуждения и манипуляции, аналогичные тем, что описаны в разделе 5.1.3. Как видно, два из десяти уравнений, приведенных в Приложении В.1, содержат производные второго порядка по времени (а именно, восьмое и девятое уравнения). Однако, как и раньше, существует две линейные комбинации этих уравнений с оставшимися восемью уравнениями и их производными, которые содержат только первые производные по времени. Таким образом, на этой стадии мы имеем 10 дифференциальных уравнений первого порядка на 10 переменных. На втором этапе мы используем алгебраические уравнения AE_1 (5.14) и AE_2 (5.15) (переписанные в A -параметризации путем замены (6.4)). После этого мы имеем 8 дифференциальных уравнений первого порядка и 2 алгебраических уравнения. Далее мы поступаем с описанной системой 10 уравнений следующим образом.

Введем для удобства новые переменные для обозначения скалярных переменных (6.32), входящих в уравнения поля вместе со своими вторыми производными:

$$\begin{aligned} \{y_I\}_{I=1,\dots,6} : y_1 &= \Psi; y_2 = z^{-1}\chi; y_3 = Q; \\ y_4 &= u; y_5 = M; y_6 = \rho; \end{aligned} \quad (6.31)$$

а также переобозначим переменные (6.31), входящие в уравнения поля только алгебраически:

$$\{y_A\}_{A=7,\dots,10} : y_7 = \sigma ; y_8 = \tilde{\xi} ; y_9 = \Phi ; y_{10} = \theta . \quad (6.32)$$

Рассмотрим следующую систему *двенадцати уравнений*

$$\begin{aligned} E_1(y_A, y_I, y'_I) &= 0 ; \dots ; E_8(y_A, y_I, y'_I) = 0 ; \\ AE_1(y_I) &= 0 ; AE_2(y_I) = 0 ; \\ \left(\frac{d}{d\eta} AE_1 \right) (y_I, y'_I) &= 0 ; \left(\frac{d}{d\eta} AE_2 \right) (y_I, y'_I) = 0 . \end{aligned} \quad (6.33)$$

Эти двенадцать уравнений определяют алгебраическую систему для следующих двенадцати переменных:

$$\{y'_1, y'_2, y'_3, y'_4, y'_5, y'_6, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}\} . \quad (6.34)$$

Мы установили, что данная система разрешима однозначным образом, позволяющим выразить 12 переменных (6.34) через оставшиеся переменные $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Иными словами, выражаем $\{y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}\}$ через $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ (и таким образом показываем, что эти 6 переменных не являются динамическими), а также выражаем $\{y'_1, y'_2, y'_3, y'_4\}$ через $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, то есть, получаем искомую систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка в виде

$$y'_i(\eta) = m_{ij} y_j(\eta) . \quad (6.35)$$

Благодаря определению переменной y_2 как $z^{-1}\chi$, мы находим, что матрица 4×4 коэффициентов $m_{ij}(z)$, входящая в систему (6.35), имеет конечный предел при $z \rightarrow \infty$. Мы делаем вывод, что закон дисперсии для скалярных возмущений задается характеристическим многочленом матрицы $m_{ij}^\infty = \lim_{z \rightarrow \infty} m_{ij}(z)$, т.е.

$$P_4^{\text{tensor}}(\sigma) \equiv \det (m_{ij}^\infty - \sigma \delta_{ij}) ; i, j = 1, 2, 3, 4 . \quad (6.36)$$

В явном виде этот закон дисперсии выглядит следующим образом:

$$P_4^{\text{scalar}}(\sigma) = \sigma^2 (\sigma^2 + c^{\text{scalar}}(\delta, h, c_{35})) , \quad (6.37)$$

т.е., в терминах ω и k ,

$$\omega^2 (\omega^2 - c^{\text{scalar}} \mathbf{k}^2) = 0 . \quad (6.38)$$

Величина c^{scalar} задается следующим выражением:

$$c^{\text{scalar}}(\delta, h, c_{35}) = \frac{N^{\text{scalar}}}{D^{\text{scalar}}} , \quad (6.39)$$

где

$$\begin{aligned} N^{\text{scalar}} = & - \left\{ 9(1 - 2\delta)^2 h^2 (-5 + 4\delta + 4\delta^2 + 4h^2) \right. \\ & + 3c_{35}(-1 + 2\delta) [-3\delta^5 + 3\delta^6 + 17h^2 + 2h^4 - 3h^6 \\ & + 3\delta^4(-2 + h^2) + \delta^3(6 + 26h^2) \\ & + \delta^2(3 + 4h^2 - 3h^4) + \delta(-3 - 38h^2 + 29h^4)] \\ & + 2c_{35}^2 [-13\delta^6 + 6\delta^7 + 21\delta^4 h^2 + \delta^5(7 + 6h^2) \\ & + \delta^3(4 - 34h^2 - 6h^4) - h^2(7 + 8h^2 + h^4) \\ & \left. + \delta^2(-7 - 8h^2 + 33h^4) + \delta(3 + 28h^2 + 7h^4 - 6h^6) \right\} , \quad (6.40) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} D^{\text{scalar}} = & (-3 + 2\delta^2 + 2h^2) \left\{ 9(1 - 2\delta)^2 h^2 \right. \\ & + 12c_{35}(1 - 2\delta)^2 h^2 + 4c_{35}^2 [-2\delta^3 \\ & \left. + \delta^4 + h^2 - 2\delta h^2 + h^4 + \delta^2(1 + 2h^2)] \right\} . \quad (6.41) \end{aligned}$$

Заметим, что закон дисперсии зависит от параметра $c_{35} \equiv c_3/c_5$.

Подчеркнем существенную разницу между законом дисперсии (6.38) и аналогичным законом, справедливым вдоль первой ветви космологических решений с нулевым фоновым кручением (то есть, что то же самое, на фоне пространства де Ситтера с нулевым кручением, изученным в работах [36, 37, 38]).

Для последнего случая закон дисперсии записывается в виде

$$(\omega^2 - \mathbf{k}^2) (\omega^2 - \mathbf{k}^2) = 0, \quad (6.42)$$

где два сомножителя $\omega^2 - \mathbf{k}^2$ описывают распространение двух степеней свободы спиральности 0 (одна является составляющей массивного поля спина-2, другая — составляющей массивного псевдоскалярного поля, связанного с кручением). Сравнивая с уравнением (6.38), видим, что две моды, распространяющиеся со скоростью света на фоне пространства без кручения, теперь распространяются с измененной скоростью $\sqrt{c^{\text{scalar}}}$ (когда эта величина действительна), а две другие моды, которые также распространялись со скоростью света, теперь имеют нулевую скорость (фактор ω^2 вместо $\omega^2 - \mathbf{k}^2$).

В заключение, сделаем замечание касательно результатов, описанных в работах [51] и [52]. В работе [51] были получены дисперсионные соотношения для мод скалярного сектора, для случая малого фонового кручения, с использованием приближения малых λ . В работе [52] были получены те же дисперсионные соотношения, но с использованием приближения больших z . Можно видеть, что принципиальные выводы обеих работ совпадают, однако конкретные значения частот различаются. Действительно, в работе [51] дисперсионное соотношение для скалярных мод под горизонтом выглядит следующим образом (см. формулу (40) из [51]):

$$\omega^2 [\omega^2 - (2\delta + 1)k^2] = 0,$$

тогда как в [52] соответствующее дисперсионное соотношение дается формулами (6.38)–(6.41) данной диссертации. Причина описанного различия — в опечатке в программном коде, использованном для получения дисперсионного соотношения в работе [51]. Эта опечатка была найдена и исправлена, после чего было подтверждено совпадение результатов, получаемых методами разложения по z и по λ .

6.2.2. Область параметрического пространства, в которой скалярные возмущения стабильны

Ввиду закона дисперсии (6.38), условием устойчивости скалярных возмущений является

$$c^{\text{scalar}}(\delta, h, c_{35}) > 0. \quad (6.43)$$

Для каждого заданного значения c_{35} существует бесконечная область плоскости δ, h , где нет экспоненциальных скалярных неустойчивостей. При изменении c_{35} форма области стабильности остается качественно подобной, хотя она претерпевает очень значительные количественные изменения. Приведем только один конкретный пример области устойчивости в плоскости δ, h , а именно тот, который соответствует значению $c_{35} = -2$. Соответствующая область на плоскости δ, h закрашена бежевым на рисунке 6.1.

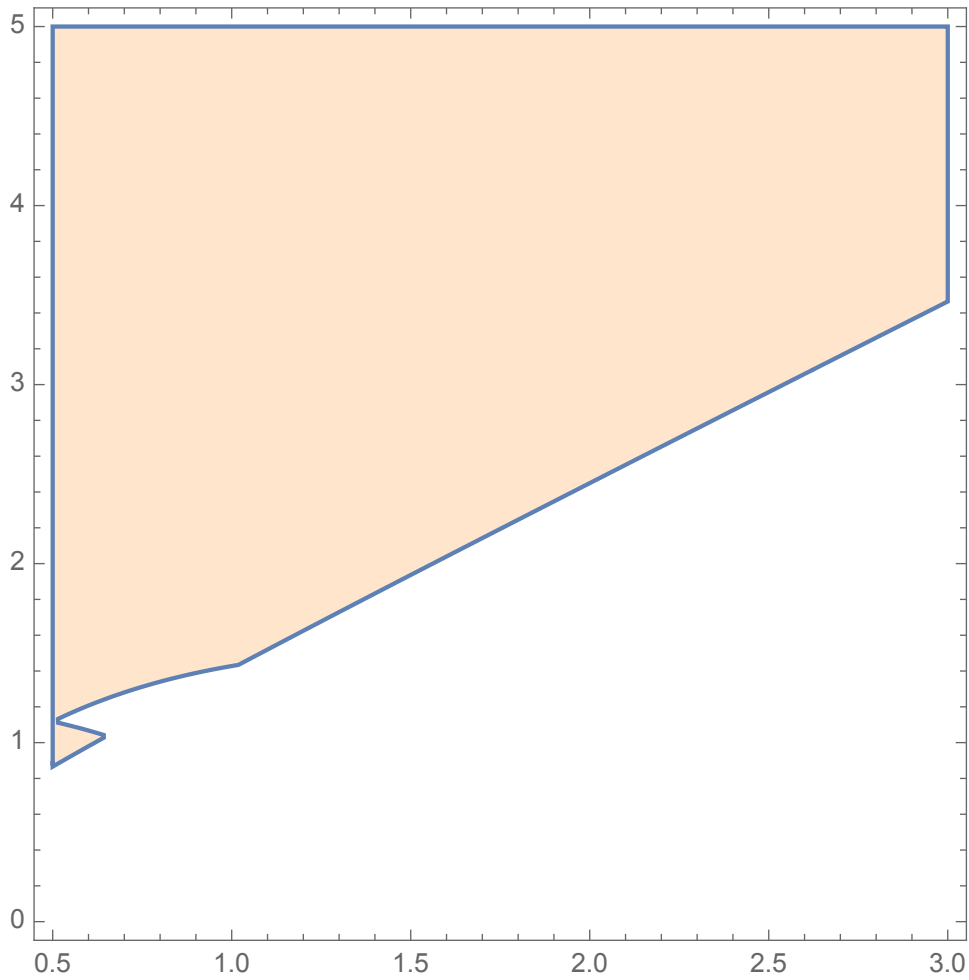


Рис. 6.1. Область стабильности скалярного сектора (для частного случая $c_{35} = -2$) на плоскости $(x, y) = (\delta, h)$ (для $h > 0$).

6.3. Тензорный сектор

В этом разделе мы исследуем малые возмущения в тензорном секторе.

Для того, чтобы получить систему уравнений, описывающую тензорные возмущения, сначала нужно понять, какие из уравнений (4.12) и (4.13) нетривиальны. Обозначив, как обычно, пространственные индексы через $a, b, c = 1, 2, 3$, легко видеть, что уравнения \mathcal{G}_{00} , \mathcal{G}_{a0} , \mathcal{G}_{0a} , \mathcal{T}_{ab0} и \mathcal{T}_{a00} дают нетривиальные уравнения движения для скалярного и векторного, но не для тензорного секторов. Таким образом, у нас есть \mathcal{G}_{ab} , \mathcal{T}_{0ab} и \mathcal{T}_{abc} (последнее эквивалентно $\mathcal{T}_{dc}^* \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{abd}\mathcal{T}_{abc}$) — три уравнения для трех тензорных полей π_{ab} , τ_{ab} и N_{ab} . Заметим, что тождества Бьянки (4.4) и (4.7) не дают никакой связи между уравнениями тензорного сектора в силу того, что параметры преобразований (4.2), (4.3) и (4.5), (4.6) не содержат в себе компоненты спиральности 2.

Три уравнения \mathcal{G}_{ab} , \mathcal{T}_{0ab} и $\varepsilon_{abd}\mathcal{T}_{abc}$ можно переписать через скалярные представления K_1 , F_n , N_r тензорных переменных π_{ab} , τ_{ab} и N_{ab} соответственно, если разложить тензорные переменные по базисным тензорам спиральности ± 2 . Из трех уравнений \mathcal{G}_{ab} , \mathcal{T}_{0ab} и $\varepsilon_{abd}\mathcal{T}_{abc}$ получается 6 уравнений — по 3 для каждой из спиральностей $+2$ и -2 , но достаточно рассмотреть только 3 уравнения, соответствующие одному знаку спиральности, например, положительному (см. Приложение А для подробного объяснения). В полном виде результирующие уравнения приведены в Приложении А. Здесь же мы выпишем их общий вид:

$$\begin{aligned}
\widehat{E}_1 &\equiv A_{1F}(z)F_n'' + B_{1N}(z)N_n' + B_{1K}(z)K_1' \\
&+ C_{1F}(z)F_n + C_{1N}(z)N_n + C_{1K}(z)K_1 = 0, \\
\widehat{E}_3 &\equiv B_{3K}(z)K_1' + B_{3F}(z)F_n' \\
&+ C_{3F}(z)F_n + C_{3N}(z)N_n + C_{3K}(z)K_1 = 0, \\
\widehat{E}_5 &\equiv A_{5K}(z)K_1'' + B_{5K}(z)K_1' + B_{5F}(z)F_n' + B_{5N}(z)N_n' \\
&+ C_{5F}(z)F_n + C_{5N}(z)N_n + C_{5K}(z)K_1 = 0,
\end{aligned} \tag{6.44}$$

где A, B, C — полиномы от z .

Общее решение системы дифференциальных уравнений (6.44) можно найти следующим образом. Видно, что переменная $N_n(z)$ входит в уравнение \widehat{E}_3 только алгебраически, тогда как переменные $F_n(z)$ и $K_1(z)$ входят вместе со своими производные только первого порядка. Поэтому мы можем разрешить уравнение \widehat{E}_3 относительно $N_n(z)$, то есть:

$$\begin{aligned} N_n(z) &= \overline{B}_{NK}(z)K_1' + \overline{B}_{NF}(z)F_n' \\ &+ \overline{C}_{NK}(z)K_1 + \overline{C}_{NF}(z)F_n. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Здесь B, C — рациональные функции z и параметров.

Так как оставшиеся два уравнения содержат максимально первую производную от $N_n(z)$, подстановка (6.45) в систему (6.44) дает систему двух дифференциальных уравнений второго порядка для $F_n(z)$ и $K_1(z)$. Чтобы лучше понять поведение этой системы, разрешим ее относительно старших производных:

$$\begin{aligned} K_1'' &= \overline{B}_{KK}(z)K_1' + \overline{B}_{KF}(z)F_n' \\ &+ \overline{C}_{KK}(z)K_1 + \overline{C}_{KF}(z)F_n, \\ F_n'' &= \overline{B}_{FK}(z)K_1' + \overline{B}_{FF}(z)F_n' \\ &+ \overline{C}_{FK}(z)K_1 + \overline{C}_{FF}(z)F_n. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Такая система эквивалентна системе 4 уравнений первого порядка для 4 переменных $y_1 = K_1, y_2 = K_1', y_3 = F_n, y_4 = F_n'$, которую можно записать в матричном виде следующим образом:

$$y_i'(z) = m_{ij}(z)y_j(z) \quad (6.47)$$

6.3.1. Высокочастотное дисперсионное соотношение для мод под горизонтом

Как мы уже обсуждали в предыдущих разделах, мы интересуемся решениями матричной системы (6.47) в пределе больших z , описывающих высокочастотные моды, находящиеся под горизонтом.

Четыре собственных значения σ_α (где $\alpha = 1, \dots, 4$), описывающие поведение тензорных мод с $h = +2$ при больших z , являются корнями характеристического полинома m_{ij}^∞ , то есть

$$P_4^{(h=+2)}(\sigma) \equiv \det(m_{ij}^\infty - \sigma\delta_{ij}) . \quad (6.48)$$

Как оказывается, m_{ij}^∞ зависит как от $\widehat{c}_5, \widehat{c}_6$, так и от δ, h . Вследствие этого дисперсионное соотношение (т.е. характеристический полином матрицы m_{ij}^∞) также зависит от этих параметров. Мы выяснили, что дисперсионное соотношение (6.48) для тензорного сектора на фоне самоускоряющегося решения является биквадратным полиномом четвертого порядка по σ , имеющим следующую структуру:

$$P_4^{(h=+2)}(\sigma) = \sigma^4 + 2b'_{\text{tensor}}\sigma^2 + 1 = 0 , \quad (6.49)$$

где

$$b'_{\text{tensor}} = 1 + \frac{8\widehat{c}_5^2(\delta - \delta^2 + h^2)^2}{-1024\widehat{c}_6^2(h + 2\delta h)^2 + \xi + 4\widehat{c}_5\delta\xi} . \quad (6.50)$$

Ранее, в уравнениях (с6), (с5) мы получили связь между параметрами лагранжиана $\xi, \widehat{c}_5, \widehat{c}_6$ и параметрами решения δ, h . Используя это, мы можем подставить $\widehat{c}_5, \widehat{c}_6$ как функции δ, h и получить дисперсионное соотношение, зависящее от δ, h . Итак, мы получаем следующее выражение:

$$b'_{\text{tensor}}(\delta, h) - 1 = \frac{(\delta - \delta^2 + h^2)(1 - 2\delta + \delta^2 + h^2)^2}{h^2((2\delta^2 - 3\delta - 1)h^2 - 2\delta^4 + \delta^3 + 4\delta^2 - 3\delta)} . \quad (6.51)$$

Заметим, что все множители в числителе последнего выражения положительны (учитывая нижний предел (3.25) по h^2). Таким образом, знак величины $b'_{\text{tensor}}(\delta, h) - 1$, а, следовательно, и стабильность, определяется знаком

последнего множителя в знаменателе, то есть

$$\begin{aligned} \text{sign}[b'_{\text{tensor}}(\delta, h) - 1] = \\ \text{sign}[(2\delta^2 - 3\delta - 1)h^2 - 2\delta^4 + \delta^3 + 4\delta^2 - 3\delta]. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Стабильность требует положительного знака, что дает верхний предел на h^2 .

Так как мы будем встречаться с подобными законами дисперсии дальше, обсудим условия стабильности возмущений, развивающихся в соответствие с законом (6.49), то есть

$$\omega^4 - 2b'\omega^2\mathbf{k}^2 + \mathbf{k}^4 = 0. \quad (6.53)$$

Решением этого биквадратного уравнения является

$$\omega^2 = C_{\pm}\mathbf{k}^2, \quad (6.54)$$

где

$$C_+ = b' + \sqrt{b'^2 - 1}; \quad C_- = b' - \sqrt{b'^2 - 1} = \frac{1}{C_+}. \quad (6.55)$$

Для стабильности необходимо, чтобы C_{\pm} было действительным и положительным. Легко видеть, что для этого требуется выполнение следующего неравенства:

$$b' > 1 \quad (\text{для стабильности}). \quad (6.56)$$

Заметим, что в таком случае в спектре будет присутствовать одна мода, распространяющаяся со сверхсветовой скоростью, и другая мода, распространяющаяся со скоростью, меньшей скорости света. Однако, как мы уже говорили, в данном исследовании мы не будем беспокоиться о физических следствиях сверхсветового распространения, а сосредоточимся на поиске экспоненциальных нестабильностей.

В заключение заметим, что тензорные возмущения на фоне пространства де-Ситтера с нулевым кручением (первая ветвь решений системы (3.6a)–(3.6c)) описываются следующим высокочастотным дисперсионным соотношением:

$$(\omega^2 - \mathbf{k}^2)^2 = \omega^4 - 2\omega^2\mathbf{k}^2 + \mathbf{k}^4 = 0. \quad (6.57)$$

Заметим, что это дисперсионное соотношение имеет ту же структуру, что и (6.49), однако значение коэффициента b^{tensor} равно 1.

6.3.2. Область стабильности тензорных возмущений

Очертим область параметров, внутри которой самоускоряющееся решение стабильно относительно малых возмущений. Показатель стабильности для тензорных возмущений b'_{tensor} зависит от параметров δ, h . Из уравнения (6.52) следует, что необходимое условие стабильности $b'_{\text{tensor}} - 1 > 0$ дает следующую верхнюю границу на h^2 :

$$(2\delta^2 - 3\delta - 1)h^2 - 2\delta^4 + \delta^3 + 4\delta^2 - 3\delta > 0. \quad (6.58)$$

Можно показать, что это неравенство может быть выполнено только тогда, когда δ больше, чем наибольший корень многочлена $2\delta^2 - 3\delta - 1$, а именно

$$\delta > \delta_{\min} \equiv \frac{1}{4} (3 + \sqrt{17}) \approx 1.78078. \quad (6.59)$$

При $\delta > \delta_{\min}$ стабильный домен на плоскости δ, h определяется одним неравенством (закрашен на рисунке бежевым цветом):

$$h^2 > \frac{2\delta^4 - \delta^3 - 4\delta^2 + 3\delta}{2\delta^2 - 3\delta - 1}, \quad (6.60)$$

которое также автоматически удовлетворяет неравенству для нижней границы (3.25).

На рисунке 6.2 изображен регион стабильности для тензорного сектора. Заметим, что вдоль границы области (определяемой неравенством (6.60)) *знаменатель* $b'_{\text{tensor}} - 1 > 0$ меняет знак, то есть эта крива сингулярна.

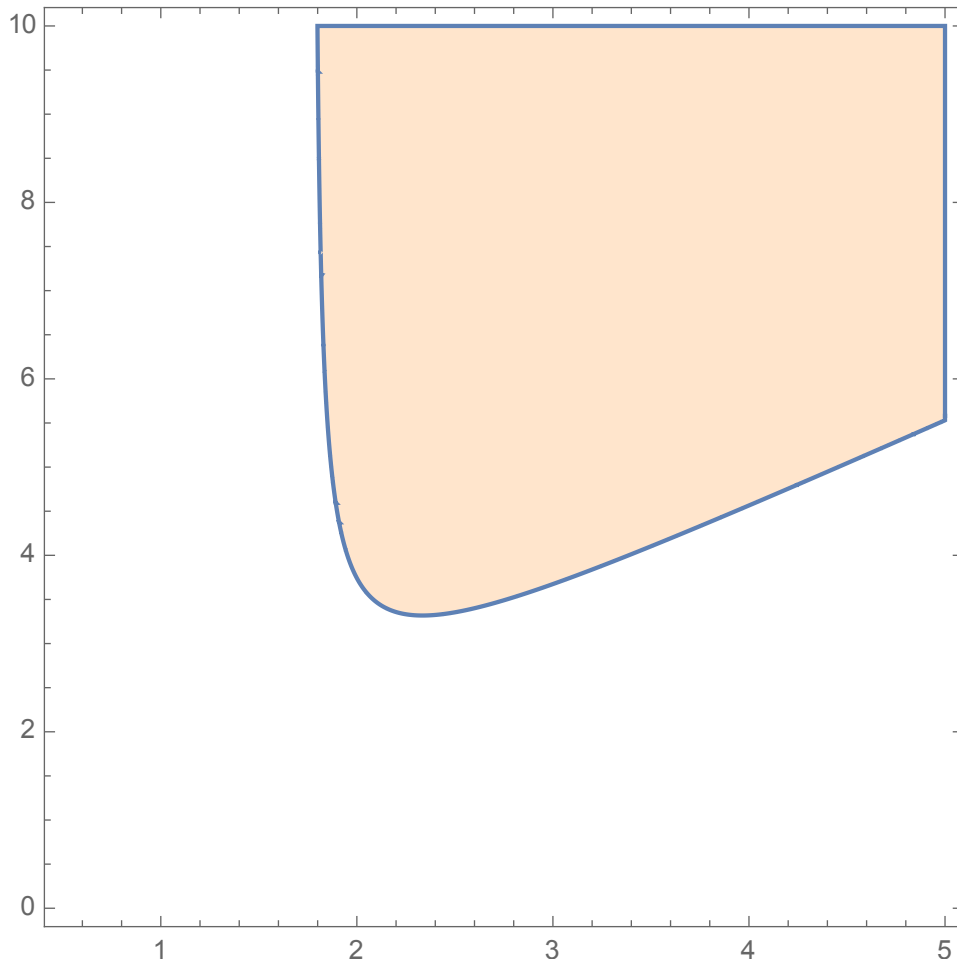


Рис. 6.2. Область на плоскости $(x, y) = (\delta, h)$ (для $h > 0$), внутри которой возмущения тензорного сектора стабильны.

6.4. Векторный сектор

6.4.1. Остаточная калибровочная симметрия в векторном секторе возмущений

Мы продолжаем исследование космологических возмущений на фоне экспоненциально расширяющихся решений рассмотрением векторного сектора. Как видно из (4.19) (напомним, однако, что в этой главе мы пользуемся A -параметризацией, см. раздел 6.1.1 и формулу (6.3)), векторные возмущения описываются семью полевыми переменными, представляющими из себя поперечные векторы: вектор (W_a) , описывающий возмущение метрики, и шесть других векторов $(\zeta_a, \nu_a, \mu_a, \kappa_a, A_a$ and $L_a)$, описывающий возмущения связности.

В этой главе мы покажем, что система уравнений в векторном секторе имеет остаточную калибровочную симметрию, которую мы использовали для проверки полученных уравнений. Эта симметрия остается после (неполной) фиксации калибровки, которая была описана в разделе 4.3.2, где мы наложили калибровочное условие (4.22). Это условие по-прежнему будет выполняться, если мы совершим *независящее от времени* инфинитезимальное пространственное координатное преобразование $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$, где ξ^{μ} - вектор спиральности 1, такой, что $\xi^0 = 0$ и $\xi_C^a = -C_a e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ (с $k^a C_a = 0$). Такой диффеоморфизм будет действовать на тетрады и связность следующим образом:

$$- \delta_{\xi} e_{\mu}^i = \xi^{\lambda} \partial_{\lambda} e_{\mu}^i + \partial_{\mu} \xi^{\lambda} e_{\lambda}^i, \quad (6.61)$$

$$- \delta_{\xi} A_{ij\mu} = \xi^{\lambda} \partial_{\lambda} A_{ij\mu} + \partial_{\mu} \xi^{\lambda} A_{ij\lambda}. \quad (6.62)$$

Но, как следствие, после такого преобразования пространственные компоненты тетрады больше не будут симметричными, как требует другое калибровочное условие (4.21). Чтобы исправить это, сделаем компенсирующее инфините-

зимальное Лоренцево вращение ω_{ab}^C , такое, что

$$\omega_{ab}^C = ik_{[a}C_{b]}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}; \quad (6.63)$$

(напомним, что, по нашему соглашению, $T_{[ab]} \equiv \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{ba})$, а $T_{(ab)} \equiv \frac{1}{2}(T_{ab} + T_{ba})$). Наконец, комбинируя оба инфинитезимальных преобразования, получаем диффеоморфизм δ^{tot} , сохраняющий выбранную ранее калибровку и преобразующий компоненты тетрады и связности по следующим законам:

$$\delta^{\text{tot}} e_a^i = ik_{(a}C_{i)}, \quad (6.64)$$

$$\delta^{\text{tot}} A_{\tilde{0}\tilde{a}b} = ife^\phi ik_{(b}C_{a)}, \quad (6.65)$$

$$\begin{aligned} \delta^{\text{tot}} A_{\tilde{a}\tilde{b}c} &= k_c k_{[a}C_{b]} \\ &+ ig e^\phi (k_c \varepsilon_{abs} C^s + k_{[a}C_{p]}\varepsilon_{pbc} - k_{[b}C_{p]}\varepsilon_{pac}) \end{aligned} \quad (6.66)$$

(мы опустили здесь фактор $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$). Используя эти формулы, можно получить закон преобразования различных векторных переменных, параметризующих возмущения тетрад и метрики и входящих в уравнения, например: $\delta^{\text{tot}} W_a = \frac{1}{2}C_a$. После этого мы можем разложить вектор C_a по компонентам спиральности ± 1 : $C^a = C_{(+1)}e_+^a + C_{(-1)}e_-^a$, и получить законы преобразований отдельно для объектов со спиральностями $+1$ и -1 :

$$\begin{aligned} \delta^{\text{tot}} W_{(+1)} &= \frac{1}{2}C_{(+1)}; \quad \delta^{\text{tot}} \nu_{(+1)} = \delta^{\text{tot}} \mu_{(+1)} = \frac{i}{2}f e^\phi C_{(+1)}; \\ \delta^{\text{tot}} L_{(+1)} &= \frac{1}{2}g k e^\phi C_{(+1)}; \quad \delta^{\text{tot}} \zeta_{(+1)} = \delta^{\text{tot}} \kappa_{(+1)} = 0; \\ \delta^{\text{tot}} A_{(+1)} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{g}{k} e^\phi \right) C_{(+1)}. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Мы проверили, что уравнения поля, описывающие векторные возмущения, остаются инвариантными при вышеописанном преобразовании векторных переменных.

6.4.2. Сведение системы полевых уравнений векторного сектора к системе трех дифференциальных уравнений первого порядка

Получение дисперсионного соотношения в векторном секторе – более громоздкий процесс, нежели в тензорном секторе. Количество переменных в векторном секторе больше, ровно как и количество нетривиальных компонент уравнений поля (4.12) и (4.13). Как и в случае тензорного сектора, укомпоненты спиральности $+1$ и -1 описываются независимыми уравнениями.

Всего мы можем написать 10 векторных уравнений, используя различные компоненты уравнений (4.3.2), (4.3.2). Однако эти уравнения не являются независимыми. Выписывая векторные компоненты тождеств Бьянки (см. раздел 4.1), получаем три тождества, связывающие уравнения между собой. Поэтому достаточно использовать только семь из десяти уравнений. Как и в случае тензорного сектора, компоненты спиральности $+1$ и -1 описываются независимыми уравнениями, поэтому достаточно работать только с уравнениями для спиральности $+1$.

Эти семь уравнений для спиральности $+1$ приведены в Приложении Б. Как и в случае тензорного сектора, мы используем приведенные уравнения $\tilde{\mathcal{G}}_{ij}$, Eq. (6.15), и $\tilde{\mathcal{T}}_{ijk}$, Eq. (6.16). К тому же, мы используем переменную $z = k\eta$. Мы используем следующие обозначения в Приложении Б: четыре уравнения $\tilde{\mathcal{T}}_{ijk}$, обозначенные V_1, V_2, V_3, V_4 , и три уравнения $\tilde{\mathcal{G}}_{ij}$, обозначенные V_5, V_6 и V_7 . Переменные спиральности $+1$, входящие в эти уравнения, обозначены W_1 (\equiv компонента спиральности $+1$ вектора W_a), $\zeta_1, \mu_1, \nu_1, \kappa_1, A_1$, и L_1 .

Во-первых, мы упрощаем эти уравнения, заменяя переменные A_1 и μ_1 на A_3 и μ_3 по следующему закону:

$$A_1 \equiv A_3 - 2L_1; \mu_1 \equiv \mu_3 + \nu_1. \quad (6.68)$$

После этого мы видим, что четыре уравнения V_2, V_5, V_6 и V_7 являются алгебраическими относительно переменных ζ_1, ν_1, κ_1 и L_1 , а именно, содержат

только следующие переменные:

$$\zeta_1(z), \nu_1(z), \kappa_1(z), L_1(z); \quad (6.69)$$

$$W_1(z), A_3(z), \mu_3(z); W'_1(z), A'_3(z), \mu'_3(z). \quad (6.70)$$

При $h = g/\lambda \neq 0$ подсистему уравнений $\{V_2 = 0, V_5 = 0, V_6 = 0, V_7 = 0\}$ можно разрешить относительно переменных $\{\zeta_1(z), \nu_1(z), \kappa_1(z), L_1(z)\}$, при этом получаются следующие соотношения:

$$\zeta_1 = R_\zeta(z; W_1, A_3, \mu_3; W'_1, A'_3, \mu'_3), \quad (6.71)$$

$$\nu_1 = R_\nu(z; W_1, A_3, \mu_3; W'_1, A'_3, \mu'_3), \quad (6.72)$$

$$\kappa_1 = R_\kappa(z; W_1, A_3, \mu_3; W'_1, A'_3, \mu'_3), \quad (6.73)$$

$$L_1 = R_L(z; W_1, A_3, \mu_3; W'_1, A'_3, \mu'_3), \quad (6.74)$$

где R_ζ и т.д. – линейные функции переменных $W_1, A_3, \mu_3; W'_1, A'_3, \mu'_3$ и рациональные функции z и других параметров.

Оставшиеся четыре уравнения V_1, V_3, V_4 изначально зависят от следующих полевых переменных:

$$V_1 : \zeta_1, \nu_1, \kappa_1, L_1; \nu'_1 \quad (6.75)$$

$$W_1, A_3, \mu_3; W'_1, A'_3, \mu'_3; \quad (6.76)$$

$$V_3 : \zeta_1, \nu_1, \kappa_1, L_1; \zeta'_1, \kappa'_1, L'_1 \quad (6.77)$$

$$W_1, A_3, \mu_3; A'_3; \mu''_3; \quad (6.78)$$

$$V_4 : \zeta_1, \nu_1, \kappa_1, L_1; \nu'_1 \quad (6.79)$$

$$W_1, A_3, \mu_3; A'_3, \mu'_3; A''_3. \quad (6.80)$$

После подстановки (6.71) в вышеупомянутые уравнения V_1, V_3, V_4 мы получаем уравнения $\bar{V}_1, \bar{V}_3, \bar{V}_4$, которые зависят от следующего набора полевых переменных:

$$\{\bar{V}_1, \bar{V}_3, \bar{V}_4\} : W_1, A_3, \mu_3; W'_1, A'_3, \mu'_3; W''_1. \quad (6.81)$$

Можно исключить W_1'' из двух из этих трех уравнений, комбинируя их (алгебраически) между собой; так мы получаем систему $\bar{V}_1, \bar{V}_3^{\text{new}}, \bar{V}_4^{\text{new}}$. Далее, мы обнаружили, что

$$\bar{V}_4^{\text{new}} \equiv \bar{V}_4 - C_{43}(z)\bar{V}_3, \quad (6.82)$$

зависит только от $W_1, A_3, \mu_3; W_1'$, и при этом не зависит от A_3', μ_3' . Поэтому, скомбинировав \bar{V}_1 с *производной* от \bar{V}_4^{new} :

$$\bar{V}_1^{\text{new}} \equiv \bar{V}_4' - C_{14}(z)\bar{V}_1, \quad (6.83)$$

мы исключаем W_1'' из системы уравнений. После всех этих операций получается система трех дифференциальных уравнений первого порядка, содержащая переменные

$$W_1, A_3, \mu_3; W_1', A_3', \mu_3'. \quad (6.84)$$

Матрица этой системы не имеет конечного предела при $z \rightarrow \infty$, но после замены переменной

$$\mu_4(z) \equiv \frac{\mu_3(z)}{z}, \quad (6.85)$$

мы приходим к системе трех дифференциальных уравнений первого порядка для трех переменных

$$\{y_1, y_2, y_3\} \equiv \{W_1, A_3, \mu_4\}, \quad (6.86)$$

которая, после разрешения относительно старших производных, принимает вид

$$y_i'(z) = m_{ij}(z)y_j(z); \quad i = 1, 2, 3, \quad (6.87)$$

где матрица $m_{ij}(z)$ имеет конечный предел при $z \rightarrow \infty$.

6.4.3. Закон дисперсии для векторного сектора: неизбежная градиентная неустойчивость

Мы можем применить тот же математический прием, который был использован в тензорном секторе. Предельная система

$$y'_i(z) = m_{ij}^{\infty} y_j(z), \quad (6.88)$$

где $m_{ij}^{\infty} = \lim_{z \rightarrow \infty} m_{ij}(z)$, описывает асимптотику нашего решения при больших z (без учета степенных поправок). Таким образом, искомое решение при больших z ведет себя как линейная комбинация частных решений вида:

$$y_i(z) = v_i e^{\sigma z}, \quad (6.89)$$

где σ — одно из трех собственных значений 3×3 матрицы m_{ij}^{∞} , а v_i — соответствующие собственные векторы.

Таким образом, задача о стабильности векторного сектора сводится к чисто алгебраической задаче составления характеристического полинома матрицы $m_{ij}^{\infty} = \lim_{z \rightarrow \infty} m_{ij}(z)$. Приравнивая характеристический полином к нулю, получаем закон дисперсии для высокочастотных мод:

$$P_3^{(h=+1)}(\sigma) = \det(m_{ij}^{\infty} - \sigma \delta_{ij}). \quad (6.90)$$

Вычисление характеристического полинома приводит к кубическому дисперсионному уравнению в форме

$$\sigma(\sigma^2 + c^{\text{vector}}) = 0, \quad (6.91)$$

или, в терминах ω и k ,

$$\omega(\omega^2 - c^{\text{vector}} \mathbf{k}^2) = 0, \quad (6.92)$$

где

$$c^{\text{vector}} = -\frac{(\delta^2 + h^2 - 1)^2}{4h^2}. \quad (6.93)$$

Заметим, что этот закон дисперсии не зависит от параметра c_{35} (который входит в уравнения поля для векторных возмущений).

Кубическое дисперсионное уравнение (6.91) имеет три корня: $\sigma = 0$ и $\sigma = \pm\sqrt{-c^{\text{vector}}}$. Нулевой корень соответствует калибровочной моде, связанной с симметрией относительно сдвигового преобразования (6.61) – (6.62), описанного ранее; эта мода также присутствует на фоне пространства Минковского и пространства де-Ситтера с нулевым кривизнением. Для обеспечения стабильности оставшиеся два корня $\sigma = i\omega/k$ должны быть чисто мнимыми. Для этого требуется выполнение неравенства $c^{\text{vector}} \geq 0$, что невозможно, поскольку $-c^{\text{vector}}$ является квадратом. Таким образом, мы имеем два действительных корня

$$\sigma = \pm \frac{(\delta^2 + h^2 - 1)}{2h}. \quad (6.94)$$

Эти действительные корни соответствуют *градиентной неустойчивости* (в секторе со спиральностью $+1$). Те же самые корни присутствуют в секторе со спиральностью -1 (разумеется, вместе с калибровочной модой $\sigma = 0$).

Единственный способ обойти эту сильную нестабильность — подобрать параметры лагранжиана так, чтобы выполнялось равенство

$$\delta^2 + h^2 = 1; \quad \text{т.е. } f^2 + g^2 = \lambda^2. \quad (6.95)$$

Это возможно сделать. Действительно, если наложить следующую связь:

$$c_5 = -16 c_6, \quad (6.96)$$

то из уравнений (3.22), (3.23) будет следовать условие (6.95). Можно убедиться, что существует однопараметрическое семейство таких решений, причем δ для них варьируется между $\frac{1}{2}$ и 1 (а h^2 , соответственно, между $\frac{3}{4}$ и 0). Однако, проблема в том, что, так как вдоль этого семейства решений мы всегда будем иметь $\delta < 1$, тензорные возмущения при этом обязательно будут нестабильны. Действительно, для стабильности самоускоряющегося решения требуется

условие: $\delta > 1.78078$ (см. уравнение (6.59)). Это демонстрирует наличие неизбежной неустойчивости на фоне самоускоряющегося решения.

Мы также для сравнения получили тем же методом высокочастотное дисперсионное соотношение для векторных возмущений на фоне пространства де Ситтера с нулевым кручением (первая ветвь решений системы уравнений (3.6a)–(3.6c)). Для этого требуется отдельное вычисление, поскольку в случае самоускоряющегося решения в знаменателе c^{vector} стоит h^2 , который для первой ветви решений обращается в нуль. Мы выразили переменные $\{\zeta_1(z), \nu_1(z), \kappa_1(z)\}$ через остальные переменные, и таким образом получили четыре уравнения на четыре переменные L_1, W_1, A_3, μ_3 . Далее, одно из этих четырех уравнений содержит L_1 без производной по времени. Поэтому можно исключить переменную L_1 , и после этого мы имеем систему трех дифференциальных уравнений на три переменные W_1, A_3, μ_3 , причем эта система может быть записана в той же форме, что и (6.88). Результирующее дисперсионное соотношение выглядит следующим образом:

$$\sigma(\sigma^2 + 1) = 0. \quad (6.97)$$

Заметим, что последнее дисперсионное соотношение описывает стабильные возмущения и совпадает с высокочастотным дисперсионным соотношением на фоне плоского пространства-времени:

$$\omega(\omega^2 - \mathbf{k}^2) = 0. \quad (6.98)$$

Заключение

В диссертационной работе исследована одна из моделей модифицированной гравитации с динамическим кручением. Особенность моделей этого класса заключается в том, что аффинная связность, рассматриваемая как независимая полевая переменная, приобретает собственные степени свободы благодаря наличию в лагранжиане квадратичных по тензорам кривизны и кручения инвариантов. Целью работы являлось исследование описанной модели в качестве кандидата на роль инфракрасной модификации гравитации и изучение ее самосогласованности.

Перечислим основные результаты, представленные в диссертации.

1. Исследовано взаимодействие источников на фоне пространства Минковского. Показано, что в спектре, помимо безмассового возмущения спина 2, присутствует также массивное возмущение спина 2 и массивное возмущение спина 0. Отдельно рассмотрен частный случай — взаимодействие двух симметричных источников, связанных с тетрадами и не связанных напрямую со связностью (то есть случай, когда источники кручения отсутствуют). Показано, что такое взаимодействие осуществляется с помощью безмассового и массивного возмущений, причем относительный вклад массивного возмущения определяется параметрами теории. Таким образом, изучаемая модель является инфракрасной модификацией гравитации. Связность в этом случае не сводится к римановой, что говорит о смешивании возмущений полей метрики и связности. Иначе говоря, нетривиальные возмущения связности генерируются даже в отсутствие источников кручения.
2. Показано, что, в отсутствие космологической постоянной в лагранжиане в модели имеется самоускоряющееся решение с метрикой де-Ситтера и ненулевым кручением. Ускоренное расширение обусловлено наличием

ненулевого кручения.

3. Исследованы малые возмущения на фоне самоускоряющегося решения. Показано, что число степеней свободы линейных возмущений, распространяющихся на фоне самоускоряющегося решения, равно числу степеней свободы линейных возмущений на фоне пространства Минковского. Таким образом, гравитация с динамическим кручением не демонстрирует явления Бульвара-Дезера, что выделяет ее среди прочих теорий, содержащих массивные возмущения спина 2.
 4. Разработаны методы аналитического исследования поведения малых возмущений в теории гравитации с динамическим кручением. Эти методы могут быть применены для дальнейшего исследования как рассмотренной здесь модели, так и других моделей класса гравитации с динамическим кручением. Разработаны алгоритмы и коды для соответствующих аналитических вычислений в системах компьютерной алгебры Maple и Mathematica.
 5. Для дальнейшего исследования спектра линейных возмущений рассмотрены два параметрических случая, отличающиеся величиной фонового кручения — случай большого (много больше параметра Хаббла) и малого (порядка параметра Хаббла) фонового кручения. В случае, когда величина кручения, характеризующего космологическое решение, много больше параметра Хаббла (параметра самоускоряющегося расширения), получено дисперсионное соотношение для распространения линейных скалярных возмущений, найдены неустраняемые экспоненциальные неустойчивости.
- Рассмотрен случай, когда величина кручения, характеризующего космологическое решение, порядка параметра Хаббла. Получено дисперсион-

ное соотношение для распространения линейных возмущений в скалярном, векторном и тензорном секторах. Найдена градиентная неустойчивость в векторном секторе, которую не удается устранить подбором параметров модели. Последний результат является весьма неожиданным, так как неустойчивости, если таковые имеются, как правило, проявляются в скалярном секторе возмущений; здесь же, наоборот, скалярный сектор возмущений стабилен в достаточной большой параметрической области.

Итак, исследование малых возмущений на фоне самоускоряющегося решения показывает наличие неустойчивостей. При этом необычно то, что феномен Будьвара-Дезера все же не наблюдается. В дальнейшем необходимо изучить поведение возмущений на фоне более общих искривленных гравитационных фонов с нетривиальным кручением, чтобы установить, являются ли неустойчивости неотъемлемой частью данной гравитационной модели, или же их наличие связано с самоускоряющимся фоном. Также следует изучить другие модели класса гравитации с динамическим кручением.

Благодарности

В заключение автор хотел бы выразить искреннюю благодарность своему научному руководителю Рубакову Валерию Анатольевичу за долгую и плодотворную совместную работу над решением непростой научной задачи, за ценные замечания и терпеливое отношение.

Автор признателен профессору Сейфаллаху Ранджбар-Даеми из Университета Абдуса Салама (Триест, Италия) за плодотворную совместную работу над задачами, описанными в главах 2 и 3.

Автор признателен профессору Тибо Дамуру из Института Высших научных исследований (Бюр-сюр-Иветт, Франция) за плодотворную совместную работу над задачей, описанной в главе 6. Автор выражает благодарность Институту высших научных исследований за организацию научного визита, а так-

же всем сотрудникам этого института — за гостеприимство, внимание и ценные научные консультации.

Автор благодарен Дмитрию Левкову за выдающийся курс лекций по теории гравитации, который был полезен в достижении целей данной диссертационной работы.

Автор признателен Леониду Леденцову из Государственного астрономического института им. Штернберга за ценные замечания.

Автор благодарен всем сотрудникам и аспирантам ИЯИ РАН за постоянную поддержку и уникальную творческую атмосферу. Отдельно хотелось бы поблагодарить Эмина Нугаева, Сергея Троицкого, Константина Остапова и Михаила Кузнецова. Также автор признателен Федору Ткачеву за ценную помощь в изучении методов компьютерных вычислений.

Приложение А

Уравнения для тензорных возмущений

Покажем на примере тензорного сектора, как из общих уравнений \mathcal{G}_{ab} , \mathcal{T}_{0ab} и т.д. мы получаем уравнения на скалярные переменные.

Как показано в разделе 6.3, тензорные возмущения описываются тремя симметричными, поперечными и бесследовыми тензорами: π_{ab} , τ_{ab} и N_{ab} . Чтобы получить систему уравнений, описывающих распространение этих возмущений, нужно понять, какие из полевых уравнений (4.12), (4.13) содержат нетривиальный линейный вклад спиральности 2 (не обращаются тождественно в ноль). Обозначив пространственные переменные как $a, b, c, d = 1, 2, 3$, легко увидеть, что такие нетривиальные вклады содержатся только в уравнениях с двумя пространственными индексами, а именно $\tilde{\mathcal{G}}_{ab}$, $\tilde{\mathcal{T}}_{0ab}$ и дуализованное уравнение $\tilde{\mathcal{T}}_{abc}$, i.e. $\tilde{\mathcal{T}}_{dc}^* \equiv \varepsilon_{abd} \tilde{\mathcal{T}}_{abc}$. Таким образом, имеем три тензорных уравнения на три тензорные переменные π_{ab} , τ_{ab} и N_{ab} .

Следующий шаг — разложение этих тензорных переменных по базисным тензорам спиральностей ± 2 . Напомним, что компоненты спиральности ± 2 любого двухиндексного тензора можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}\pi_{ab} &= \pi_{(+2)} e_+^{ab} + \pi_{(-2)} e_-^{ab} \\ \tau_{ab} &= \tau_{(+2)} e_+^{ab} + \tau_{(-2)} e_-^{ab} \\ N_{ab} &= N_{(+2)} e_+^{ab} + N_{(-2)} e_-^{ab}\end{aligned}\tag{A.1}$$

(e_{\pm}^{ab} - базисные тензоры спиральности 2, определенные так, что $e_+^{ab} \equiv e_+^a e_+^b$, где e_+^a, e_+^b — векторы спиральности +1). Для тензора, содержащего несколько компонент спиральности:

$$\tilde{\mathcal{G}}_{ab} = \tilde{\mathcal{G}}_{(+2)} e_+^{ab} + \tilde{\mathcal{G}}_{(-2)} e_-^{ab} + \text{низшие спиральности.}$$

Подставив разложения типа (A.1) в уравнения $\tilde{\mathcal{G}}_{(ab)}$, $\tilde{\mathcal{T}}_{0(ab)}$, $\tilde{\mathcal{T}}_{(ab)}^*$, а затем

извлекая коэффициенты, стоящие при независимых базисных тензорах e_{\pm}^{ab} , мы получаем 3 уравнения на 3 переменные $\pi_{(+2)}$, $\tau_{(+2)}$, $N_{(+2)}$ и 3 уравнения на 3 переменные $\pi_{(-2)}$, $\tau_{(-2)}$, $N_{(-2)}$, то есть разные компоненты спиральности не смешиваются между собой. Более того, система для компонент спиральности -2 получается из системы для компонент спиральности $+2$ путем замены $g \rightarrow -g$. Эти факты являются следствиями структуры полевых уравнений. В частности, параметр g возникает в самоускоряющемся (т.е. фоновом) решении (3.17) в комбинации $g\varepsilon_{abc}$, и поэтому замена $g \rightarrow -g$ соответствует смене ориентации базиса в пространстве, что и приводит к смене знака спиральности. Поэтому, мы можем работать только с тремя уравнениями, описывающими, например, возмущения спиральности $+2$.

Обозначив (для единообразия с обозначениями в нашем компьютерном коде) $K_1 \equiv \pi_{(+2)}$, $F_n \equiv k^{-1}\tau_{(+2)}$, и $iN_n \equiv N_{(+2)}$, мы получаем из уравнений $\tilde{\mathcal{T}}_{0ab}$, $\tilde{\mathcal{T}}_{dc}^*$, $\tilde{\mathcal{G}}_{ab}$ систему (приведенных) уравнений $\hat{E}_1 = 0$, $\hat{E}_3 = 0$ и $\hat{E}_5 = 0$ для K_1 , F_n и N_n , где

$$\begin{aligned}
\hat{E}_1 \equiv & \left(-\frac{3z}{2} - 3\hat{c}_5\delta z - 3\hat{c}_5\delta^2 z\right) F_n \\
& + \left(\frac{3\delta}{2} - 6\hat{c}_5\delta + 3\hat{c}_5\delta^2 + 3\hat{c}_5\delta^3 + 6\hat{c}_5h^2 + 48\hat{c}_6h^2 - 3\hat{c}_5\delta h^2\right. \\
& + 96\hat{c}_6\delta h^2 + 48\hat{c}_6hz + 96\hat{c}_6\delta hz) K_1 \\
& + (3\hat{c}_5hz + 48\hat{c}_6hz - 3\hat{c}_5\delta hz + 96\hat{c}_6\delta hz + 3\hat{c}_5\delta z^2) N_n \\
& + \left(-\frac{3z}{2} + 3\hat{c}_5\delta z - 3\hat{c}_5\delta^2 z + 3\hat{c}_5h^2 z\right) \partial_z K_1 + (-3\hat{c}_5hz^2 + 3\hat{c}_5z^3) \partial_z N_n \\
& + 3\hat{c}_5z^3 \partial_z^2 F_n, \tag{A.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{E}_3 \equiv & (-3h - 18\widehat{c}_5\delta h + 96\widehat{c}_6\delta h - 6\widehat{c}_5\delta^2 h + 192\widehat{c}_6\delta^2 h + 6\widehat{c}_5 h^3 \\
& - 3z - 6\widehat{c}_5\delta z + 6\widehat{c}_5\delta^2 z - 6\widehat{c}_5 h^2 z) K_1 \\
& + (-96\widehat{c}_6 h z + 6\widehat{c}_5\delta h z - 192\widehat{c}_6\delta h z - 6\widehat{c}_5\delta z^2) F_n \\
& + (-3z - 12\widehat{c}_5\delta z + 6\widehat{c}_5 h^2 z - 12\widehat{c}_5 h z^2 + 6\widehat{c}_5 z^3) N_n \\
& + (-6\widehat{c}_5 h z^2 + 6\widehat{c}_5 z^3) \partial_z F_n - (96\widehat{c}_6 h z + 192\widehat{c}_6\delta h z) \partial_z K_1, \tag{A.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{E}_5 \equiv & \left(\frac{3\delta z}{2} + 3\widehat{c}_5\delta^2 z - 3\widehat{c}_5\delta^3 z + 48\widehat{c}_6 h^2 z + 3\widehat{c}_5\delta h^2 z + 96\widehat{c}_6\delta h^2 z \right. \\
& \left. - 48\widehat{c}_6 h z^2 - 96\widehat{c}_6\delta h z^2 \right) F_n \\
& + \left(\frac{3hz}{2} + 3\widehat{c}_5\delta h z - 48\widehat{c}_6\delta h z - 3\widehat{c}_5\delta^2 h z - 96\widehat{c}_6\delta^2 h z + 3\widehat{c}_5 h^3 z \right. \\
& \left. - \frac{3z^2}{2} - 3\widehat{c}_5\delta z^2 + 3\widehat{c}_5\delta^2 z^2 - 3\widehat{c}_5 h^2 z^2 \right) N_n \\
& + \left(-\frac{3\delta}{2} - \frac{3\delta^2}{2} + 3\widehat{c}_5\delta^2 - 6\widehat{c}_5\delta^3 + 3\widehat{c}_5\delta^4 + \frac{3h^2}{2} - 48\widehat{c}_6 h^2 + 6\widehat{c}_5\delta h^2 \right. \\
& \left. - 192\widehat{c}_6\delta h^2 - 6\widehat{c}_5\delta^2 h^2 - 192\widehat{c}_6\delta^2 h^2 + 3\widehat{c}_5 h^4 + \frac{3z^2\xi}{2} \right) K_1 \\
& + \left(-\frac{3}{2}z^2 + 3\widehat{c}_5\delta z^2 - 3\widehat{c}_5\delta^2 z^2 + 3\widehat{c}_5 h^2 z^2 \right) \partial_z F_n \\
& - 3z\xi \partial_z K_1 + (48\widehat{c}_6 h z^2 + 96\widehat{c}_6\delta h z^2) \partial_z N_n + \frac{3}{2}z^2\xi \partial_z^2 K_1. \tag{A.4}
\end{aligned}$$

Напомним, что \widehat{c}_5 , \widehat{c}_6 и ξ выражаются через параметры h , δ , λ с помощью соотношений (3.21)–(3.23).

Приложение Б

Уравнения для векторных возмущений

В этом приложении приведены уравнения (6.15), (6.16), описывающие поведение векторных возмущений. Уравнения записаны с использованием приведенных параметров (6.5).

Мы получаем семь векторных уравнений для 7 скалярных переменных W_1 (\equiv компонента спиральности $+1$ переменной W_a), ζ_1 , μ_1 , ν_1 , κ_1 , A_1 , L_1 , описывающих векторные возмущения. Мы делаем это следующим образом.

Как и в тензорном случае, мы берем линейные (т.е. $O(\gamma)$) части приведенных уравнений $\tilde{\mathcal{T}}_{ijk}$, уравнение (6.16), и $\tilde{\mathcal{G}}_{ij}$, уравнение (6.15). Мы используем ту же процедуру, что и в тензорном секторе, только теперь мы раскладываем каждую векторную переменную как

$$W_a = W_{(+1)}e_+^a + W_{(-1)}e_-^a,$$

где e_+^a, e_-^a — базисные векторы спиральностей ± 1 . Уравнения, содержащие более одного пространственного индекса, мы превращаем в векторную форму путем дуализации. И, как и в случае тензорного сектора, нам достаточно рассмотреть уравнения, относящиеся только к одной спиральности, например, $+1$. Таким образом мы получаем четыре уравнения, полученные из $\tilde{\mathcal{T}}_{ijk}$ (обозначенные как $V_1 \dots V_4$), и три уравнения, полученные из $\tilde{\mathcal{G}}_{ij}$, (обозначенные как $V_5 \dots V_7$).

В приведенных ниже уравнениях $V_1 = 0 \dots V_7 = 0$ мы явно пользовались фактом $c_4 = -c_3 - 3c_5$, а также мы сделали следующие переобозначения: $W_1^{\text{new}} = kW_1$; $A_1^{\text{new}} = kA_1$; $\zeta_1^{\text{new}} = k^{-1}\zeta_1$; $L_1^{\text{new}} = k^{-1}L_1$ чтобы отфакторизовать пространственный импульс k . Индекс “new” мы опускаем. Итак, система уравнений для описания векторных возмущений выглядит следующим образом:

Уравнение $\tilde{\mathcal{T}}_{[a0]0} \rightarrow V_1$:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{3z}{2} + 2\hat{c}_3 h^2 z - 3\hat{c}_5 h^2 z - \hat{c}_3 h z^2 - 2\hat{c}_3 z \delta^2\right) A_1 \\
& + (3z + 4\hat{c}_3 h^2 z - 6\hat{c}_5 h^2 z - \hat{c}_3 z^3 - 4\hat{c}_3 z \delta^2) L_1 \\
& + \left(-\frac{3z}{2} + 3\hat{c}_5 h^2 z + 3\hat{c}_5 z \delta - 3\hat{c}_5 z \delta^2\right) W_1 \\
& + (4\hat{c}_3 h^2 z + 6\hat{c}_5 h^2 z - 4\hat{c}_3 h z^2 - 6\hat{c}_5 h z^2 + \hat{c}_3 z^3 - 4\hat{c}_3 z \delta^2) \zeta_1 \\
& + (8i \hat{c}_3 h z \delta + 6i \hat{c}_5 h z \delta - 4i \hat{c}_3 z^2 \delta - 3i \hat{c}_5 z^2 \delta) \kappa_1 \\
& + (48i \hat{c}_6 h z + 4i \hat{c}_3 h z \delta + 9i \hat{c}_5 h z \delta + 96i \hat{c}_6 h z \delta - i \hat{c}_3 z^2 \delta) \mu_1 \\
& + (-48i \hat{c}_6 h z - 4i \hat{c}_3 h z \delta - 9i \hat{c}_5 h z \delta - 96i \hat{c}_6 h z \delta - i \hat{c}_3 z^2 \delta - 3i \hat{c}_5 z^2 \delta) \nu_1 \\
& + 2\hat{c}_3 z^2 \delta \partial_z A_1 + 4\hat{c}_3 z^2 \delta \partial_z L_1 + (-2i \hat{c}_3 h z^2 - 3i \hat{c}_5 h z^2 + i \hat{c}_3 z^3) \partial_z \mu_1 \\
& + (2i \hat{c}_3 h z^2 + 3i \hat{c}_5 h z^2 - i \hat{c}_3 z^3 - 3i \hat{c}_5 z^3) \partial_z \nu_1 . \tag{B.1}
\end{aligned}$$

Уравнение $\varepsilon^{abc} \tilde{\mathcal{T}}_{[ab]0} \rightarrow V_2$:

$$\begin{aligned}
& z(96\hat{c}_6 h + 192\hat{c}_6 h \delta) W_1 + z(-192\hat{c}_6 h - 16\hat{c}_3 h \delta - 36\hat{c}_5 h \delta - 384\hat{c}_6 h \delta + 6\hat{c}_5 z \delta) L_1 \\
& + z(-96\hat{c}_6 h - 8\hat{c}_3 h \delta - 18\hat{c}_5 h \delta - 192\hat{c}_6 h \delta + 2\hat{c}_3 z \delta + 6\hat{c}_5 z \delta) A_1 \\
& + z(-16\hat{c}_3 h \delta - 12\hat{c}_5 h \delta + 8\hat{c}_3 z \delta + 6\hat{c}_5 z \delta) \zeta_1 \\
& + z(8i \hat{c}_3 h^2 - 8i \hat{c}_3 h z + 2i \hat{c}_3 z^2 - 8i \hat{c}_3 \delta^2 - 12i \hat{c}_5 \delta^2) \kappa_1 \\
& + z(3i + 4i \hat{c}_3 h^2 - 2i \hat{c}_3 h z - 6i \hat{c}_5 h z - 4i \hat{c}_3 \delta^2 + 6i \hat{c}_5 \delta^2) \mu_1 \\
& + z(-3i - 4i \hat{c}_3 h^2 - 2i \hat{c}_3 h z - 6i \hat{c}_5 h z + 2i \hat{c}_3 z^2 + 6i \hat{c}_5 z^2 + 4i \hat{c}_3 \delta^2 - 6i \hat{c}_5 \delta^2) \nu_1 \\
& - 2\hat{c}_3 z^2 (-2h + z) \partial_z A_1 - 4\hat{c}_3 z^2 (-2h + z) \partial_z L_1 \\
& + z(4i \hat{c}_3 z \delta + 6i \hat{c}_5 z \delta) \partial_z \mu_1 + z(-4i \hat{c}_3 z \delta - 6i \hat{c}_5 z \delta) \partial_z \nu_1 . \tag{B.2}
\end{aligned}$$

Уравнение $\tilde{\mathcal{T}}^{*a} \equiv \tilde{\mathcal{T}}_{0[ab]}\varepsilon^{abc} \rightarrow V_3$:

$$\begin{aligned}
& (-2\hat{c}_3hz - 3\hat{c}_5hz - 48\hat{c}_6hz + 4\hat{c}_3hz\delta + 3\hat{c}_5hz\delta - 96\hat{c}_6hz\delta + \hat{c}_3z^2\delta)A_1 \\
& + (48\hat{c}_6hz + 96\hat{c}_6hz\delta)W_1 \\
& + (-4\hat{c}_3hz - 6\hat{c}_5hz - 96\hat{c}_6hz + 8\hat{c}_3hz\delta + 6\hat{c}_5hz\delta \\
& - 192\hat{c}_6hz\delta + 4\hat{c}_3z^2\delta + 3\hat{c}_5z^2\delta)L_1 \\
& + (-4\hat{c}_3hz - 6\hat{c}_5hz + 96\hat{c}_6hz + 8\hat{c}_3hz\delta + 18\hat{c}_5hz\delta + 192\hat{c}_6hz\delta + 3\hat{c}_5z^2\delta)\zeta_1 \\
& + (-3iz - 4i\hat{c}_3h^2z + i\hat{c}_3z^3 + 3i\hat{c}_5z^3 - 4i\hat{c}_3z\delta \\
& - 6i\hat{c}_5z\delta + 4i\hat{c}_3z\delta^2 - 6i\hat{c}_5z\delta^2)\kappa_1 \\
& + \left(\frac{3iz}{2} - 2i\hat{c}_3h^2z - i\hat{c}_3hz^2 - 2i\hat{c}_3z\delta + 3i\hat{c}_5z\delta + 2i\hat{c}_3z\delta^2 + 3i\hat{c}_5z\delta^2\right)\mu_1 \\
& + \left(-\frac{3iz}{2} + 2i\hat{c}_3h^2z + 3i\hat{c}_3hz^2 + i\hat{c}_3z^3 + 2i\hat{c}_3z\delta \right. \\
& \left. - 3i\hat{c}_5z\delta - 2i\hat{c}_3z\delta^2 - 3i\hat{c}_5z\delta^2\right)\nu_1 \\
& + (-3\hat{c}_5hz^2 - \hat{c}_3z^3 - 3\hat{c}_5z^3)\partial_z A_1 + (-6\hat{c}_5hz^2 - 3\hat{c}_5z^3)\partial_z L_1 \\
& + (4\hat{c}_3hz^2 + 6\hat{c}_5hz^2 - 2\hat{c}_3z^3 - 3\hat{c}_5z^3)\partial_z \zeta_1 \\
& + (4i\hat{c}_3z^2\delta + 6i\hat{c}_5z^2\delta)\partial_z \kappa_1 + (-2i\hat{c}_3z^3 - 3i\hat{c}_5z^3)\partial_z^2 \mu_1 \\
& + (2i\hat{c}_3z^3 + 3i\hat{c}_5z^3)\partial_z^2 \nu_1 .
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Уравнение $\tilde{\mathcal{T}}_e^{**} \equiv \varepsilon^{cde} \varepsilon^{abc} \tilde{\mathcal{T}}_{[ab]d} \rightarrow V_4$:

$$\begin{aligned}
& z(6 - 8\hat{c}_3 h^2 - 12\hat{c}_5 h^2 - 8\hat{c}_3 h z - 12\hat{c}_5 h z - 2\hat{c}_3 z^2 - 8\hat{c}_3 \delta + 8\hat{c}_3 \delta^2) L_1 \\
& + z(3 - 4\hat{c}_3 h^2 - 6\hat{c}_5 h^2 - 2\hat{c}_3 h z - 4\hat{c}_3 \delta + 4\hat{c}_3 \delta^2) A_1 \\
& + z(-3 - 6\hat{c}_5 h^2 - 6\hat{c}_5 \delta + 6\hat{c}_5 \delta^2) W_1 \\
& + z(-6 - 8\hat{c}_3 h^2 + 12\hat{c}_5 h^2 + 2\hat{c}_3 z^2 - 8\hat{c}_3 \delta + 8\hat{c}_3 \delta^2) \zeta_1 \\
& + z(8i \hat{c}_3 h - 192i \hat{c}_6 h - 16i \hat{c}_3 h \delta - 36i \hat{c}_5 h \delta - 384i \hat{c}_6 h \delta + 6i \hat{c}_5 z \delta) \kappa_1 \\
& + z(4i \hat{c}_3 h + 12i \hat{c}_5 h + 96i \hat{c}_6 h - 8i \hat{c}_3 h \delta - 6i \hat{c}_5 h \delta + 192i \hat{c}_6 h \delta - 2i \hat{c}_3 z \delta) \mu_1 \\
& + z(-4i \hat{c}_3 h - 12i \hat{c}_5 h - 96i \hat{c}_6 h + 8i \hat{c}_3 h \delta + 6i \hat{c}_5 h \delta - 192i \hat{c}_6 h \delta \\
& + 6i \hat{c}_3 z \delta + 6i \hat{c}_5 z \delta) \nu_1 + 8\hat{c}_3 z^2 \delta \partial_z \zeta_1 + 4i \hat{c}_3 z^2 (-2h + z) \partial_z \kappa_1 \\
& + z(-6i \hat{c}_5 h z + 2i \hat{c}_3 z^2) \partial_z \mu_1 + z(6i \hat{c}_5 h z + 2i \hat{c}_3 z^2 + 6i \hat{c}_5 z^2) \partial_z \nu_1 \\
& - 4\hat{c}_3 z^3 \partial_z^2 A_1 - 8\hat{c}_3 z^3 \partial_z^2 L_1 .
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Уравнение $\tilde{\mathcal{G}}_{a0} \rightarrow V_5$:

$$\begin{aligned}
& (2\hat{c}_3 h^2 z + 3\hat{c}_5 h^2 z - 2\hat{c}_3 z \delta^2) A_1 \\
& + (4\hat{c}_3 h^2 z + 6\hat{c}_5 h^2 z + 2\hat{c}_3 h z^2 + 3\hat{c}_5 h z^2 - 4\hat{c}_3 z \delta^2) L_1 \\
& + (4\hat{c}_3 h^2 z + 6\hat{c}_5 h^2 z + 96\hat{c}_6 h^2 z - 2\hat{c}_3 h z^2 - 3\hat{c}_5 h z^2 - 48\hat{c}_6 h z^2 \\
& + 3z \delta + 192\hat{c}_6 h^2 z \delta - 96\hat{c}_6 h z^2 \delta - 4\hat{c}_3 z \delta^2) \zeta_1 \\
& + (-3i h z + \frac{3i z^2}{2} + 8i \hat{c}_3 h z \delta + 6i \hat{c}_5 h z \delta + 96i \hat{c}_6 h z \delta \\
& - 2i \hat{c}_3 z^2 \delta + 192i \hat{c}_6 h z \delta^2) \kappa_1 \\
& + (4i \hat{c}_3 h z \delta + 3i \hat{c}_5 h z \delta) \mu_1 + (-4i \hat{c}_3 h z \delta - 3i \hat{c}_5 h z \delta - 2i \hat{c}_3 z^2 \delta) \nu_1 \\
& + (-\frac{3z^2}{2} + 2\hat{c}_3 z^2 \delta) \partial_z A_1 + (-3z^2 + 4\hat{c}_3 z^2 \delta) \partial_z L_1 - \frac{3}{2} z^2 \xi \partial_z W_1 \\
& + (-2i \hat{c}_3 h z^2 - 3i \hat{c}_5 h z^2 - 48i \hat{c}_6 h z^2 - 96i \hat{c}_6 h z^2 \delta) \partial_z \mu_1 \\
& + (2i \hat{c}_3 h z^2 + 3i \hat{c}_5 h z^2 + 48i \hat{c}_6 h z^2 + 96i \hat{c}_6 h z^2 \delta) \partial_z \nu_1 .
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Уравнение $\tilde{\mathcal{G}}_{0a} \rightarrow V_6$:

$$\begin{aligned}
& (-48\widehat{c}_6 h^2 z - \frac{3z\delta}{2} - 6\widehat{c}_3 h^2 z \delta - 6\widehat{c}_5 h^2 z \delta - 96\widehat{c}_6 h^2 z \delta + 2\widehat{c}_3 z \delta^3) A_1 \\
& + (-96\widehat{c}_6 h^2 z - 48\widehat{c}_6 h z^2 - 3z\delta - 12\widehat{c}_3 h^2 z \delta - 12\widehat{c}_5 h^2 z \delta \\
& - 192\widehat{c}_6 h^2 z \delta - 4\widehat{c}_3 h z^2 \delta - 6\widehat{c}_5 h z^2 \delta - 96\widehat{c}_6 h z^2 \delta + 4\widehat{c}_3 z \delta^3) L_1 \\
& + (-12\widehat{c}_3 h^2 z \delta - 12\widehat{c}_5 h^2 z \delta + 4\widehat{c}_3 h z^2 \delta + 6\widehat{c}_5 h z^2 \delta + 4\widehat{c}_3 z \delta^3) \zeta_1 \\
& + (4i\widehat{c}_3 h^3 z - 2i\widehat{c}_3 h^2 z^2 - 12i\widehat{c}_3 h z \delta^2 - 12i\widehat{c}_5 h z \delta^2 + 2i\widehat{c}_3 z^2 \delta^2) \kappa_1 \\
& + (\frac{3i h z}{2} + 2i\widehat{c}_3 h^3 z - 48i\widehat{c}_6 h z \delta - 6i\widehat{c}_3 h z \delta^2 - 6i\widehat{c}_5 h z \delta^2 - 96i\widehat{c}_6 h z \delta^2) \mu_1 \\
& + (-\frac{3}{2}i h z - 2i\widehat{c}_3 h^3 z - \frac{3i z^2}{2} - 2i\widehat{c}_3 h^2 z^2 + 48i\widehat{c}_6 h z \delta \\
& + 6i\widehat{c}_3 h z \delta^2 + 6i\widehat{c}_5 h z \delta^2 + 96i\widehat{c}_6 h z \delta^2 + 2i\widehat{c}_3 z^2 \delta^2) \nu_1 \\
& + (2\widehat{c}_3 h^2 z^2 - 2\widehat{c}_3 z^2 \delta^2) \partial_z A_1 + (4\widehat{c}_3 h^2 z^2 - 4\widehat{c}_3 z^2 \delta^2) \partial_z L_1 \\
& - \frac{3}{2} z^2 \xi \partial_z W_1 + (4i\widehat{c}_3 h z^2 \delta + 6i\widehat{c}_5 h z^2 \delta) \partial_z \mu_1 \\
& + (-4i\widehat{c}_3 h z^2 \delta - 6i\widehat{c}_5 h z^2 \delta) \partial_z \nu_1 .
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Уравнение $\tilde{\mathcal{G}}_c^* = \varepsilon^{abc}\tilde{\mathcal{G}}_{[ab]} \rightarrow V_7$:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{3hz}{2} + 2\hat{c}_3 h^3 z + 3\hat{c}_5 h^3 z - 4\hat{c}_3 h z \delta - 3\hat{c}_5 h z \delta - 48\hat{c}_6 h z \delta \right. \\
& \left. - 6\hat{c}_3 h z \delta^2 - 3\hat{c}_5 h z \delta^2 - 96\hat{c}_6 h z \delta^2 \right) A_1 \\
& + \left(3hz + 4\hat{c}_3 h^3 z + 6\hat{c}_5 h^3 z + \frac{3z^2}{2} + 2\hat{c}_3 h^2 z^2 + 3\hat{c}_5 h^2 z^2 - 8\hat{c}_3 h z \delta \right. \\
& \left. - 6\hat{c}_5 h z \delta - 96\hat{c}_6 h z \delta - 2\hat{c}_3 z^2 \delta + 3\hat{c}_5 z^2 \delta - 12\hat{c}_3 h z \delta^2 \right. \\
& \left. - 6\hat{c}_5 h z \delta^2 - 192\hat{c}_6 h z \delta^2 - 2\hat{c}_3 z^2 \delta^2 - 3\hat{c}_5 z^2 \delta^2 \right) L_1 + \left(3hz + 4\hat{c}_3 h^3 z - 6\hat{c}_5 h^3 z \right. \\
& \left. - \frac{3z^2}{2} - 2\hat{c}_3 h^2 z^2 + 3\hat{c}_5 h^2 z^2 - 8\hat{c}_3 h z \delta - 6\hat{c}_5 h z \delta - 96\hat{c}_6 h z \delta \right. \\
& \left. + 2\hat{c}_3 z^2 \delta + 3\hat{c}_5 z^2 \delta - 12\hat{c}_3 h z \delta^2 - 18\hat{c}_5 h z \delta^2 - 192\hat{c}_6 h z \delta^2 + 2\hat{c}_3 z^2 \delta^2 - 3\hat{c}_5 z^2 \delta^2 \right) \zeta_1 \\
& + \left(4i\hat{c}_3 h^2 z + 96i\hat{c}_6 h^2 z - 2i\hat{c}_3 h z^2 - 48i\hat{c}_6 h z^2 + 3i z \delta \right. \\
& \left. + 12i\hat{c}_3 h^2 z \delta + 18i\hat{c}_5 h^2 z \delta + 192i\hat{c}_6 h^2 z \delta - 4i\hat{c}_3 h z^2 \delta \right. \\
& \left. - 12i\hat{c}_5 h z^2 \delta - 96i\hat{c}_6 h z^2 \delta - 4i\hat{c}_3 z \delta^2 - 6i\hat{c}_5 z \delta^2 - 4i\hat{c}_3 z \delta^3 + 6i\hat{c}_5 z \delta^3 \right) \kappa_1 \\
& + \left(2i\hat{c}_3 h^2 z + 6i\hat{c}_5 h^2 z + 48i\hat{c}_6 h^2 z + \frac{3i z \delta}{2} \right. \\
& \left. + 6i\hat{c}_3 h^2 z \delta + 3i\hat{c}_5 h^2 z \delta + 96i\hat{c}_6 h^2 z \delta - 2i\hat{c}_3 z \delta^2 \right. \\
& \left. + 3i\hat{c}_5 z \delta^2 - 2i\hat{c}_3 z \delta^3 - 3i\hat{c}_5 z \delta^3 \right) \mu_1 \\
& + \left(-2i\hat{c}_3 h^2 z - 6i\hat{c}_5 h^2 z - 48i\hat{c}_6 h^2 z - 2i\hat{c}_3 h z^2 - 6i\hat{c}_5 h z^2 - 48i\hat{c}_6 h z^2 \right. \\
& \left. - \frac{3i z \delta}{2} - 6i\hat{c}_3 h^2 z \delta - 3i\hat{c}_5 h^2 z \delta - 96i\hat{c}_6 h^2 z \delta - 4i\hat{c}_3 h z^2 \delta \right. \\
& \left. - 96i\hat{c}_6 h z^2 \delta + 2i\hat{c}_3 z \delta^2 - 3i\hat{c}_5 z \delta^2 + 2i\hat{c}_3 z \delta^3 + 3i\hat{c}_5 z \delta^3 \right) \nu_1 \\
& + \left(2\hat{c}_3 h z^2 + 48\hat{c}_6 h z^2 + 4\hat{c}_3 h z^2 \delta + 12\hat{c}_5 h z^2 \delta + 96\hat{c}_6 h z^2 \delta \right) \partial_z A_1 \\
& + \left(4\hat{c}_3 h z^2 + 96\hat{c}_6 h z^2 + 8\hat{c}_3 h z^2 \delta + 24\hat{c}_5 h z^2 \delta + 192\hat{c}_6 h z^2 \delta \right) \partial_z L_1 \\
& + \left(-\frac{3i z^2}{2} - 2i\hat{c}_3 h^2 z^2 + 3i\hat{c}_5 h^2 z^2 + 2i\hat{c}_3 z^2 \delta \right. \\
& \left. + 3i\hat{c}_5 z^2 \delta + 2i\hat{c}_3 z^2 \delta^2 - 3i\hat{c}_5 z^2 \delta^2 \right) \partial_z \mu_1 \\
& + \left(\frac{3i z^2}{2} + 2i\hat{c}_3 h^2 z^2 - 3i\hat{c}_5 h^2 z^2 - 2i\hat{c}_3 z^2 \delta - 3i\hat{c}_5 z^2 \delta \right. \\
& \left. - 2i\hat{c}_3 z^2 \delta^2 + 3i\hat{c}_5 z^2 \delta^2 \right) \partial_z \nu_1 .
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Приложение В

Уравнения для скалярных возмущений

В.1. Записанные в терминах z в A -параметризации

(используются в случае малого фонового кручения)

Десять уравнений, выписанных ниже, получаются разложением линейных ($O(\gamma)$) частей приведенных уравнений $\tilde{\mathcal{G}}_{ij}$, и $\tilde{\mathcal{T}}_{ijk}$, записанных с использованием A -параметризации, на составляющие спиральности 0: $\tilde{\mathcal{G}}_{00}$, $\tilde{\mathcal{G}}_{\hat{k}0}$, $\tilde{\mathcal{G}}_{0\hat{k}}$, $\tilde{\mathcal{G}}^{(k\otimes k)}$, $\tilde{\mathcal{G}}^{(\epsilon k)}$, $\tilde{\mathcal{T}}_{\hat{k}00}$, $\tilde{\mathcal{T}}^*_{\hat{k}0}$, $\tilde{\mathcal{T}}^{(\delta)}$, $\tilde{\mathcal{T}}^{(\epsilon k)}$ и $\tilde{\mathcal{T}}^{(\epsilon k\otimes k)}$. Здесь $\tilde{\mathcal{G}}_{00}$ — 00-компонента уравнения $\tilde{\mathcal{G}}_{ij}$, а также (используем обозначение $\hat{k}^a \equiv k^a/k$) $\tilde{\mathcal{G}}_{\hat{k}0} \equiv \hat{k}^a \tilde{\mathcal{G}}_{a0}$, $\tilde{\mathcal{G}}_{0\hat{k}} \equiv \hat{k}^a \tilde{\mathcal{G}}_{0a}$, $\tilde{\mathcal{T}}_{\hat{k}00} \equiv \hat{k}^a \tilde{\mathcal{T}}_{a00}$, $\tilde{\mathcal{T}}^*_{\hat{k}0} \equiv \epsilon^{abc} \hat{k}_c \mathcal{T}_{ab0}$. Далее, величины $\tilde{\mathcal{G}}^{(\delta)}$, $\tilde{\mathcal{G}}^{(k\otimes k)}$, $\tilde{\mathcal{G}}^{(\epsilon k)}$, $\tilde{\mathcal{T}}^{(\delta)}$, $\tilde{\mathcal{T}}^{(\epsilon k)}$, and $\tilde{\mathcal{T}}^{(\epsilon k\otimes k)}$ определены следующим образом:

$$\tilde{\mathcal{G}}_{ab} = \delta_{ab} \tilde{\mathcal{G}}^{(\delta)} + \hat{k}_a \hat{k}_b \tilde{\mathcal{G}}^{(k\otimes k)} + \epsilon_{abc} \hat{k}_c \tilde{\mathcal{G}}^{(\epsilon k)},$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_{0ab} = \delta_{ab} \tilde{\mathcal{T}}^{(\delta)} + \hat{k}_a \hat{k}_b \tilde{\mathcal{T}}^{(k\otimes k)} + \epsilon_{abc} \hat{k}_c \tilde{\mathcal{T}}^{(\epsilon k)},$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_{abc} = \epsilon_{abc} \tilde{\mathcal{T}}^{(\epsilon)} + \epsilon_{abd} \hat{k}_c \hat{k}_d \tilde{\mathcal{T}}^{(\epsilon k\otimes k)} + (\delta_{ac} \hat{k}_b - \delta_{bc} \hat{k}_a) \tilde{\mathcal{T}}^{(\delta\otimes k)}.$$

Мы не используем уравнения $\tilde{\mathcal{G}}^{(\delta)}$, $\tilde{\mathcal{T}}^{(k\otimes k)}$, $\tilde{\mathcal{T}}^{(\epsilon)}$ и $\tilde{\mathcal{T}}^{(\delta\otimes k)}$, потому что они исключаются из рассмотрения благодаря тождествам Бьянки. Кроме того, мы отмасштабировали некоторые полевые переменные для того, чтобы все они были безразмерными (как, например, переменные Φ , Ψ), следующим образом: $\chi^{\text{new}} = k\chi$, $\sigma^{\text{new}} = k^{-1}\sigma$, $Q^{\text{new}} = kQ$ и $u^{\text{new}} = ku$. Мы опускаем обозначение “new”.

Уравнение $\tilde{\mathcal{G}}_{00}$:

$$\begin{aligned}
& (6hz - 16\hat{c}_3h^3z - 16\hat{c}_4h^3z - 48\hat{c}_5h^3z + 16\hat{c}_3hz\delta^2 \\
& + 16\hat{c}_4hz\delta^2 + 48\hat{c}_5hz\delta^2 - 384\hat{c}_6hz\delta^2)u \\
& + (3hz - 8\hat{c}_3h^3z - 8\hat{c}_4h^3z - 24\hat{c}_5h^3z + 8\hat{c}_3hz\delta^2 \\
& + 8\hat{c}_4hz\delta^2 + 24\hat{c}_5hz\delta^2 - 192\hat{c}_6hz\delta^2)Q \\
& + (3iz^2 - 8i\hat{c}_3h^2z^2 - 8i\hat{c}_4h^2z^2 - 24i\hat{c}_5h^2z^2 + 8i\hat{c}_3z^2\delta^2 + 8i\hat{c}_4z^2\delta^2 + 24i\hat{c}_5z^2\delta^2)M \\
& + 48i\hat{c}_6hz^2\theta + (-4i\hat{c}_3z^2\delta - 4i\hat{c}_4z^2\delta - 12i\hat{c}_5z^2\delta)\tilde{\xi} - 192i\hat{c}_6hz^2\delta\rho \\
& + (9z\delta - 24\hat{c}_3h^2z\delta - 24\hat{c}_4h^2z\delta \\
& - 72\hat{c}_5h^2z\delta + 576\hat{c}_6h^2z\delta + 24\hat{c}_3z\delta^3 + 24\hat{c}_4z\delta^3 + 72\hat{c}_5z\delta^3)\sigma \\
& + (144\hat{c}_6h^2 + 12\hat{c}_3\delta^2 + 12\hat{c}_4\delta^2 + 36\hat{c}_5\delta^2 - 9\xi)\Phi \\
& + (3z\delta - 8\hat{c}_3h^2z\delta - 8\hat{c}_4h^2z\delta - 24\hat{c}_5h^2z\delta \\
& + 192\hat{c}_6h^2z\delta + 8\hat{c}_3z\delta^3 + 8\hat{c}_4z\delta^3 + 24\hat{c}_5z\delta^3)\chi \\
& + (9h^2 + 144\hat{c}_6h^2 - 24\hat{c}_3h^4 - 24\hat{c}_4h^4 - 72\hat{c}_5h^4 - 9\delta^2 \\
& + 12\hat{c}_3\delta^2 + 12\hat{c}_4\delta^2 + 36\hat{c}_5\delta^2 + 48\hat{c}_3h^2\delta^2 + 48\hat{c}_4h^2\delta^2 \\
& + 144\hat{c}_5h^2\delta^2 - 1152\hat{c}_6h^2\delta^2 - 24\hat{c}_3\delta^4 - 24\hat{c}_4\delta^4 - 72\hat{c}_5\delta^4 + 3z^2\xi)\Psi - 48\hat{c}_6hz^2\partial_zQ \\
& - 96\hat{c}_6hz^2\partial_zu + (12\hat{c}_3z^2\delta + 12\hat{c}_4z^2\delta + 36\hat{c}_5z^2\delta)\partial_z\sigma \\
& + (4\hat{c}_3z^2\delta + 4\hat{c}_4z^2\delta + 12\hat{c}_5z^2\delta)\partial_z\chi - 9z\xi\partial_z\Psi .
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Уравнение $\tilde{\mathcal{G}}_{k0}$:

$$\begin{aligned}
& z(2i\hat{c}_3hz - 2i\hat{c}_4hz)u + z(-2\hat{c}_3h^2 + 2\hat{c}_4h^2 + 4\hat{c}_3\delta^2)M + \\
& z(3h - 8\hat{c}_3h^3 - 8\hat{c}_4h^3 - 24\hat{c}_5h^3 + 2\hat{c}_3h\delta + 10\hat{c}_4h\delta \\
& + 24\hat{c}_5h\delta - 96\hat{c}_6h\delta + 8\hat{c}_3h\delta^2 + 8\hat{c}_4h\delta^2 + 24\hat{c}_5h\delta^2 - 192\hat{c}_6h\delta^2)\theta \\
& + z(2\hat{c}_3h^2 - 2\hat{c}_4h^2 + 96\hat{c}_6h^2 + 3\delta - 8\hat{c}_3h^2\delta - 8\hat{c}_4h^2\delta - 24\hat{c}_5h^2\delta + 192\hat{c}_6h^2\delta \\
& + 4\hat{c}_3\delta^2 + 8\hat{c}_4\delta^2 + 24\hat{c}_5\delta^2 + 8\hat{c}_3\delta^3 + 8\hat{c}_4\delta^3 + 24\hat{c}_5\delta^3)\tilde{\xi} \\
& + z(6\hat{c}_3h\delta - 2\hat{c}_4h\delta)\rho + 4i\hat{c}_3z^2\delta\sigma - 3i z\xi\Phi \\
& + (3z^2 - 8\hat{c}_3h^2z^2 - 8\hat{c}_4h^2z^2 - 24\hat{c}_5h^2z^2 + 4\hat{c}_3z^2\delta + 8\hat{c}_4z^2\delta \\
& + 24\hat{c}_5z^2\delta + 8\hat{c}_3z^2\delta^2 + 8\hat{c}_4z^2\delta^2 + 24\hat{c}_5z^2\delta^2)\partial_z M \\
& - 2hz^2[\hat{c}_3 - \hat{c}_4 + 48(\hat{c}_6 + 2\hat{c}_6\delta)]\partial_z\rho - 3i z^2\xi\partial_z\Psi. \tag{B.2}
\end{aligned}$$

Уравнение $\tilde{\mathcal{G}}_{0k}$:

$$\begin{aligned}
& z(-96i\hat{c}_6hz - 4i\hat{c}_3hz\delta + 4i\hat{c}_4hz\delta - 192i\hat{c}_6hz\delta)u \\
& + z(96\hat{c}_6h^2 + 3\delta - 12\hat{c}_4h^2\delta - 24\hat{c}_5h^2\delta + 192\hat{c}_6h^2\delta \\
& + 8\hat{c}_3\delta^2 + 8\hat{c}_4\delta^2 + 24\hat{c}_5\delta^2 + 4\hat{c}_3\delta^3 + 8\hat{c}_4\delta^3 + 24\hat{c}_5\delta^3)M \\
& + z(-4\hat{c}_3h^3 + 8\hat{c}_3h\delta^2 - 4\hat{c}_4h\delta^2)\theta + z(-8\hat{c}_3h^2\delta + 4\hat{c}_4h^2\delta + 4\hat{c}_3\delta^3)\tilde{\xi} \\
& + z(3h - 4\hat{c}_3h^3 - 8\hat{c}_4h^3 - 24\hat{c}_5h^3 + 8\hat{c}_3h\delta + 8\hat{c}_4h\delta \\
& + 24\hat{c}_5h\delta - 96\hat{c}_6h\delta + 12\hat{c}_4h\delta^2 + 24\hat{c}_5h\delta^2 - 192\hat{c}_6h\delta^2)\rho \\
& + z(3i z - 4i\hat{c}_3h^2z - 8i\hat{c}_4h^2z - 24i\hat{c}_5h^2z + 8i\hat{c}_3z\delta \\
& + 8i\hat{c}_4z\delta + 24i\hat{c}_5z\delta + 4i\hat{c}_3z\delta^2 + 8i\hat{c}_4z\delta^2 + 24i\hat{c}_5z\delta^2)\sigma \\
& - 3i z\xi\Phi + 4\hat{c}_3z^2(-h^2 + \delta^2)\partial_z M + 4(\hat{c}_3 - \hat{c}_4)hz^2\delta\partial_z\rho - 3i z^2\xi\partial_z\Psi. \tag{B.3}
\end{aligned}$$

Уравнение $\tilde{\mathcal{G}}^{(k \otimes k)}$:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{3hz}{2} - 5\hat{c}_3 h^3 z - 5\hat{c}_4 h^3 z - 12\hat{c}_5 h^3 z + 3\hat{c}_3 h z \delta + 3\hat{c}_4 h z \delta + 12\hat{c}_5 h z \delta - 48\hat{c}_6 h z \delta \right. \\
& \left. + 5\hat{c}_3 h z \delta^2 + 5\hat{c}_4 h z \delta^2 + 12\hat{c}_5 h z \delta^2 - 96\hat{c}_6 h z \delta^2 \right) Q \\
& + \left(-\frac{3hz}{2} + 5\hat{c}_3 h^3 z + 5\hat{c}_4 h^3 z + 12\hat{c}_5 h^3 z - 3\hat{c}_3 h z \delta - 3\hat{c}_4 h z \delta \right. \\
& \left. - 12\hat{c}_5 h z \delta + 48\hat{c}_6 h z \delta - 5\hat{c}_3 h z \delta^2 - 5\hat{c}_4 h z \delta^2 - 12\hat{c}_5 h z \delta^2 + 96\hat{c}_6 h z \delta^2 \right) u \\
& + \left(\frac{3i z^2}{2} - 5i \hat{c}_3 h^2 z^2 - 5i \hat{c}_4 h^2 z^2 - 12i \hat{c}_5 h^2 z^2 + 3i \hat{c}_3 z^2 \delta + 3i \hat{c}_4 z^2 \delta \right. \\
& \left. + 12i \hat{c}_5 z^2 \delta + 5i \hat{c}_3 z^2 \delta^2 + 5i \hat{c}_4 z^2 \delta^2 + 12i \hat{c}_5 z^2 \delta^2 \right) M \\
& + (-48i \hat{c}_6 h z^2 - 96i \hat{c}_6 h z^2 \delta) \theta \\
& + \left(\frac{3i z^2}{2} - 3i \hat{c}_3 h^2 z^2 - 3i \hat{c}_4 h^2 z^2 - 12i \hat{c}_5 h^2 z^2 + 5i \hat{c}_3 z^2 \delta \right. \\
& \left. + 5i \hat{c}_4 z^2 \delta + 12i \hat{c}_5 z^2 \delta + 3i \hat{c}_3 z^2 \delta^2 + 3i \hat{c}_4 z^2 \delta^2 + 12i \hat{c}_5 z^2 \delta^2 \right) \tilde{\xi} \\
& + (-48i \hat{c}_6 h z^2 - 96i \hat{c}_6 h z^2 \delta) \rho + \frac{3}{2} z^2 \xi \Phi \\
& + \left(48\hat{c}_6 h^2 z + \frac{3z \delta}{2} - 5\hat{c}_3 h^2 z \delta - 5\hat{c}_4 h^2 z \delta - 12\hat{c}_5 h^2 z \delta \right. \\
& \left. + 96\hat{c}_6 h^2 z \delta + 3\hat{c}_3 z \delta^2 + 3\hat{c}_4 z \delta^2 + 12\hat{c}_5 z \delta^2 + 5\hat{c}_3 z \delta^3 + 5\hat{c}_4 z \delta^3 + 12\hat{c}_5 z \delta^3 \right) \chi \\
& + \frac{3}{2} z^2 \xi \psi + (48\hat{c}_6 h z^2 + 96\hat{c}_6 h z^2 \delta) \partial_z Q + (-48\hat{c}_6 h z^2 - 96\hat{c}_6 h z^2 \delta) \partial_z u \\
& + \left(-\frac{3z^2}{2} + 3\hat{c}_3 h^2 z^2 + 3\hat{c}_4 h^2 z^2 + 12\hat{c}_5 h^2 z^2 - 5\hat{c}_3 z^2 \delta \right. \\
& \left. - 5\hat{c}_4 z^2 \delta - 12\hat{c}_5 z^2 \delta - 3\hat{c}_3 z^2 \delta^2 - 3\hat{c}_4 z^2 \delta^2 - 12\hat{c}_5 z^2 \delta^2 \right) \partial_z \chi .
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Уравнение $\tilde{\mathcal{G}}^{(\epsilon k)}$:

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{3hz}{2} + 3\hat{c}_3 h^3 z + 5\hat{c}_4 h^3 z + 12\hat{c}_5 h^3 z - \hat{c}_3 h z \delta - 5\hat{c}_4 h z \delta - 12\hat{c}_5 h z \delta + 48\hat{c}_6 h z \delta \right. \\
& + \hat{c}_3 h z \delta^2 - 5\hat{c}_4 h z \delta^2 - 12\hat{c}_5 h z \delta^2 + 96\hat{c}_6 h z \delta^2 \Big) M \\
& + \left(\frac{3i z^2}{2} - 3i \hat{c}_3 h^2 z^2 - 5i \hat{c}_4 h^2 z^2 - 12i \hat{c}_5 h^2 z^2 + i \hat{c}_3 z^2 \delta + 3i \hat{c}_4 z^2 \delta \right. \\
& + 12i \hat{c}_5 z^2 \delta + 3i \hat{c}_3 z^2 \delta^2 + 5i \hat{c}_4 z^2 \delta^2 + 12i \hat{c}_5 z^2 \delta^2 \Big) u \\
& + \left(-2\hat{c}_3 h^2 z - 48\hat{c}_6 h^2 z - \frac{3z\delta}{2} + \hat{c}_3 h^2 z \delta + 7\hat{c}_4 h^2 z \delta + 12\hat{c}_5 h^2 z \delta \right. \\
& - 96\hat{c}_6 h^2 z \delta - 3\hat{c}_3 z \delta^2 - 5\hat{c}_4 z \delta^2 - 12\hat{c}_5 z \delta^2 - \hat{c}_3 z \delta^3 - 3\hat{c}_4 z \delta^3 - 12\hat{c}_5 z \delta^3 \Big) \theta \\
& + \left(\frac{3hz}{2} - \hat{c}_3 h^3 z - 3\hat{c}_4 h^3 z - 12\hat{c}_5 h^3 z + \hat{c}_3 h z \delta + 5\hat{c}_4 h z \delta + 12\hat{c}_5 h z \delta \right. \\
& - 48\hat{c}_6 h z \delta + \hat{c}_3 h z \delta^2 + 7\hat{c}_4 h z \delta^2 + 12\hat{c}_5 h z \delta^2 - 96\hat{c}_6 h z \delta^2 \Big) \tilde{\xi} \\
& + \left(-2\hat{c}_4 h^2 z + 48\hat{c}_6 h^2 z + \frac{3z\delta}{2} + \hat{c}_3 h^2 z \delta - 5\hat{c}_4 h^2 z \delta - 12\hat{c}_5 h^2 z \delta + 96\hat{c}_6 h^2 z \delta \right. \\
& + \hat{c}_3 z \delta^2 + 3\hat{c}_4 z \delta^2 + 12\hat{c}_5 z \delta^2 + 3\hat{c}_3 z \delta^3 + 5\hat{c}_4 z \delta^3 + 12\hat{c}_5 z \delta^3 \Big) \rho \\
& + \left(-2i \hat{c}_4 h z^2 + 48i \hat{c}_6 h z^2 + 4i \hat{c}_3 h z^2 \delta + 96i \hat{c}_6 h z^2 \delta \right) \sigma \\
& + \left(-2\hat{c}_3 h z^2 - 48\hat{c}_6 h z^2 + 4\hat{c}_4 h z^2 \delta - 96\hat{c}_6 h z^2 \delta \right) \partial_z M \\
& + \left(-\frac{3z^2}{2} + \hat{c}_3 h^2 z^2 + 3\hat{c}_4 h^2 z^2 + 12\hat{c}_5 h^2 z^2 - 3\hat{c}_3 z^2 \delta \right. \\
& \left. - 5\hat{c}_4 z^2 \delta - 12\hat{c}_5 z^2 \delta - \hat{c}_3 z^2 \delta^2 - 3\hat{c}_4 z^2 \delta^2 - 12\hat{c}_5 z^2 \delta^2 \right) \partial_z \rho . \tag{B.5}
\end{aligned}$$

Уравнение $\tilde{\mathcal{T}}_{k00}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3} z (2i \hat{c}_3 h z + 2i \hat{c}_4 h z) Q + \frac{1}{3} z (16i \hat{c}_3 h z + 4i \hat{c}_4 h z) u \\
& + \frac{1}{3} z (-9 - 18\hat{c}_3 h^2 - 6\hat{c}_4 h^2 - 2\hat{c}_3 z^2 - 2\hat{c}_4 z^2 + 12\hat{c}_3 \delta^2) M \\
& + \frac{1}{3} z (-18\hat{c}_3 h \delta + 6\hat{c}_4 h \delta) \theta + \frac{1}{3} z (6\hat{c}_3 h^2 - 6\hat{c}_4 h^2 + 2\hat{c}_3 z^2 + 2\hat{c}_4 z^2 - 12\hat{c}_3 \delta^2) \tilde{\xi} \\
& + \frac{1}{3} z (288\hat{c}_6 h + 6\hat{c}_3 h \delta - 18\hat{c}_4 h \delta + 576\hat{c}_6 h \delta) \rho + 4i \hat{c}_3 z^2 \delta \sigma \\
& + \frac{1}{3} z (2i \hat{c}_3 z \delta + 2i \hat{c}_4 z \delta) \chi - 3i z \Psi \\
& - 4\hat{c}_3 z^2 \delta \partial_z M + 2(-\hat{c}_3 + \hat{c}_4) h z^2 \partial_z \rho + \frac{1}{3} z (2i \hat{c}_3 z^2 + 2i \hat{c}_4 z^2) \partial_z \chi . \tag{B.6}
\end{aligned}$$

Уравнение $\tilde{\mathcal{T}}_{k0}^*$:

$$\begin{aligned}
& -32i\hat{c}_6z^2\delta Q + z(96\hat{c}_6h + 2\hat{c}_3h\delta - 6\hat{c}_4h\delta + 192\hat{c}_6h\delta)M \\
& + z(-2i\hat{c}_3z\delta + 2i\hat{c}_4z\delta - 64i\hat{c}_6z\delta)u \\
& + z(-4\hat{c}_3h^2 + 16\hat{c}_6z^2 + 2\hat{c}_3\delta^2 - 2\hat{c}_4\delta^2)\theta + z(-6\hat{c}_3h\delta + 2\hat{c}_4h\delta)\tilde{\xi} \\
& + z(3 + 4\hat{c}_3h^2 + 32\hat{c}_6z^2 - 6\hat{c}_3\delta^2 - 2\hat{c}_4\delta^2)\rho + z(-4i\hat{c}_4hz + 96i\hat{c}_6hz)\sigma \\
& - 48i\hat{c}_6hz\Phi + 32i\hat{c}_6hz^2\chi + 48i\hat{c}_6hz\Psi - 4\hat{c}_3hz^2\partial_z M + 16i\hat{c}_6z^3\partial_z Q \\
& + 32i\hat{c}_6z^3\partial_z u + z(2\hat{c}_3z\delta - 2\hat{c}_4z\delta)\partial_z \rho. \tag{B.7}
\end{aligned}$$

Уравнение $\tilde{\mathcal{T}}^{(\delta)}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6}(14\hat{c}_3hz + 14\hat{c}_4hz - 288\hat{c}_6hz + 2\hat{c}_3hz\delta + 2\hat{c}_4hz\delta - 1344\hat{c}_6hz\delta)u \\
& + \frac{1}{6}(10\hat{c}_3hz + 10\hat{c}_4hz - 288\hat{c}_6hz - 2\hat{c}_3hz\delta - 2\hat{c}_4hz\delta - 960\hat{c}_6hz\delta)Q \\
& + \frac{1}{6}(10i\hat{c}_3z^2\delta - 2i\hat{c}_4z^2\delta)M + \frac{1}{6}(12i\hat{c}_4hz^2 - 192i\hat{c}_6hz^2)\theta \\
& + \frac{1}{6}(-10i\hat{c}_3z^2\delta + 2i\hat{c}_4z^2\delta)\tilde{\xi} + \frac{1}{6}(12i\hat{c}_3hz^2 - 384i\hat{c}_6hz^2)\rho \\
& + \frac{1}{6}(18z + 1152\hat{c}_6h^2z - 12\hat{c}_3z^3)\sigma + \frac{1}{6}(18 + 24\hat{c}_3h^2 + 24\hat{c}_4h^2 - 576\hat{c}_6h^2)\Phi \\
& + \frac{1}{6}(9z + 384\hat{c}_6h^2z - 2\hat{c}_3z\delta - 2\hat{c}_4z\delta - 2\hat{c}_3z\delta^2 - 2\hat{c}_4z\delta^2)\chi \\
& + \frac{1}{6}(48\hat{c}_3h^2 + 48\hat{c}_4h^2 - 1152\hat{c}_6h^2 - 18\delta - 3456\hat{c}_6h^2\delta)\Psi - \frac{1}{3}i(5\hat{c}_3 - \hat{c}_4)z^3\partial_z M \\
& - \frac{1}{3}(5\hat{c}_3 + 5\hat{c}_4 - 96\hat{c}_6)hz^2\partial_z Q + \frac{1}{6}(-14\hat{c}_3hz^2 - 14\hat{c}_4hz^2 + 384\hat{c}_6hz^2)\partial_z u \\
& + \frac{1}{6}(-2i\hat{c}_3z^3 - 2i\hat{c}_4z^3)\partial_z \tilde{\xi} + 3z\partial_z \Psi + \frac{1}{6}(2\hat{c}_3z^3 + 2\hat{c}_4z^3)\partial_z^2 \chi. \tag{B.8}
\end{aligned}$$

Уравнение $\tilde{\mathcal{T}}^{(\epsilon k)}$:

$$\begin{aligned}
& -32i\hat{c}_6z^2\delta Q + (\hat{c}_3hz - \hat{c}_4hz + 48\hat{c}_6hz - 3\hat{c}_3hz\delta + \hat{c}_4hz\delta + 96\hat{c}_6hz\delta)M \\
& + (i\hat{c}_3z^2\delta - i\hat{c}_4z^2\delta - 64i\hat{c}_6z^2\delta)u \\
& + \left(\frac{3z}{2} + 2\hat{c}_3h^2z + 16\hat{c}_6z^3 + \hat{c}_3z\delta - \hat{c}_4z\delta - 3\hat{c}_3z\delta^2 - \hat{c}_4z\delta^2\right)\theta \\
& + (-\hat{c}_3hz + \hat{c}_4hz + 48\hat{c}_6hz + \hat{c}_3hz\delta - 3\hat{c}_4hz\delta + 96\hat{c}_6hz\delta)\tilde{\xi} \\
& + \left(\frac{3z}{2} - 2\hat{c}_3h^2z + 32\hat{c}_6z^3 - 3\hat{c}_3z\delta - \hat{c}_4z\delta + \hat{c}_3z\delta^2 - \hat{c}_4z\delta^2\right)\rho \\
& + (-2i\hat{c}_3hz^2 + 96i\hat{c}_6hz^2)\sigma + 96i\hat{c}_6hz\delta\phi + 32i\hat{c}_6hz^2\chi \\
& - 96i\hat{c}_6hz\delta\psi + (-\hat{c}_3hz^2 - \hat{c}_4hz^2)\partial_z M + 16i\hat{c}_6z^3\partial_z Q \\
& + (i\hat{c}_3z^3 - i\hat{c}_4z^3 + 32i\hat{c}_6z^3)\partial_z u + (-\hat{c}_3z^2\delta + \hat{c}_4z^2\delta)\partial_z\theta \\
& + (\hat{c}_3hz^2 - \hat{c}_4hz^2)\partial_z\tilde{\xi} + (-\hat{c}_3z^3 + \hat{c}_4z^3)\partial_z^2\rho. \tag{B.9}
\end{aligned}$$

Уравнение $\tilde{\mathcal{T}}^{(\epsilon k \otimes k)}$:

$$\begin{aligned}
& -2i\hat{c}_4hz^2M + \left(\frac{3z}{2} + \hat{c}_3h^2z + \hat{c}_4h^2z + \hat{c}_3z^3 - \hat{c}_4z^3 - 2\hat{c}_3z\delta - 2\hat{c}_4z\delta\right)u \\
& + \left(-\frac{3z}{2} - \hat{c}_3h^2z - \hat{c}_4h^2z + 2\hat{c}_3z\delta + 2\hat{c}_4z\delta\right)Q + (i\hat{c}_3z^2\delta - i\hat{c}_4z^2\delta)\theta - 2i\hat{c}_3hz^2\tilde{\xi} \\
& + (-i\hat{c}_3z^2\delta + i\hat{c}_4z^2\delta)\rho + (-48\hat{c}_6hz - \hat{c}_3hz\delta - \hat{c}_4hz\delta - 96\hat{c}_6hz\delta)\chi \\
& + (i\hat{c}_3z^3 - i\hat{c}_4z^3)\partial_z\rho + (\hat{c}_3hz^2 + \hat{c}_4hz^2)\partial_z\chi. \tag{B.10}
\end{aligned}$$

В.2. Записанные в терминах β , $\tilde{\beta}$, \mathfrak{f} , \mathfrak{g} , Λ и \mathbf{v}

K -параметризации (используются в случае
большого фонового кручения)

Здесь мы приводим 14 уравнений, описывающих скалярные возмущения (4 из них можно исключить, используя тождества Бьянки). Мы используем K -параметризацию, обозначения (5.2), (5.3) и (5.4), а также соотношение (1.17).

Из (4.12) получаются следующие уравнения:

$$\mathcal{G}_{ij} = \begin{cases} \mathcal{G}^{(00)}, & i = j = 0 \\ ik_a \mathcal{G}^{(a0)}, & i = a, j = 0 \\ ik_a \mathcal{G}^{(0a)}, & i = 0, j = a \\ \delta_{ab} \mathcal{G}^{(\delta)} - k_a k_b \mathcal{G}^{(k \otimes k)} + i \epsilon_{abc} k_c \mathcal{G}^{(\epsilon k)}, & i = a, j = b \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

(00)-компонента:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(00)} \equiv & -96c_6 k^2 \Lambda \mathbf{g} u' - 48c_6 k^2 \Lambda \mathbf{g} Q' + (-9\tilde{\beta} \mathbf{f} - 9\beta \Lambda - 576c_6 \mathbf{g}^2 \mathbf{f}) \Psi' \\ & + (576c_6 \mathbf{g}^2 \mathbf{f} + 9\tilde{\beta} \mathbf{f}) \sigma + (144c_6 \mathbf{g}^2 \Lambda^2 + 9\beta \Lambda^2) \Phi \\ & + [k^2(3\tilde{\beta} - 3\beta) - 9\tilde{\beta}(\mathbf{f}^2 - \mathbf{g}^2) + 144c_6 \mathbf{g}^2(\Lambda^2 - 8\mathbf{f}^2)] \Psi \\ & + (-6k^2 \tilde{\beta} \mathbf{g} + 384k^2 c_6 \mathbf{f}^2 \mathbf{g}) u + \frac{1}{2}(-6k^2 \tilde{\beta} \mathbf{g} + 384k^2 c_6 \mathbf{f}^2 \mathbf{g}) Q + 3ik^2 \tilde{\beta} M \\ & + (3k^2 \tilde{\beta} \mathbf{f} + 192k^2 c_6 \mathbf{g}^2 \mathbf{f}) \chi + 192ik^2 c_6 \mathbf{f} \mathbf{g} \rho + 48ik^2 c_6 \Lambda \mathbf{g} \theta = 0 \end{aligned} \quad (\text{c1})$$

(a0)-компонента:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(a0)} \equiv & -i(3\tilde{\beta} + 4\Lambda \mathbf{f} c_3) M' - i[2\Lambda \mathbf{g}(c_4 - c_3) - 96c_6 \mathbf{g}(\Lambda - 2\mathbf{f})] \rho' + (3\beta - 3\tilde{\beta}) \Psi' \\ & + [-6\mathbf{g}^2 \Lambda c_5 + 4\Lambda c_3(\mathbf{f}^2 - \mathbf{g}^2)] \Psi - i[6\mathbf{g}^2 \Lambda c_5 - 4\Lambda(\mathbf{f}^2 - \mathbf{g}^2) c_3] M \\ & + [-3\beta \Lambda - 3\tilde{\beta} \mathbf{f} + 96c_6 \mathbf{g}^2(\Lambda - 2\mathbf{f}) + 4\Lambda(\mathbf{g}^2 - \mathbf{f}^2) c_3 + 6\Lambda \mathbf{g}^2 c_5] \Phi \\ & - 4\Lambda \mathbf{f} c_3 \sigma - i(8\Lambda \mathbf{f} \mathbf{g} c_3 + 6\Lambda \mathbf{f} \mathbf{g} c_5) \rho + (6\Lambda \mathbf{g} k^2 c_5 + 4\Lambda \mathbf{g} k^2 c_3) u \\ & - i[4\Lambda(\mathbf{f}^2 - \mathbf{g}^2) c_3 - 6\mathbf{g}^2 \Lambda c_5 - 96c_6 \Lambda(\Lambda - 2\mathbf{f}) + 3\tilde{\beta} \mathbf{f}] \tilde{\xi} \\ & - i[-8\Lambda \mathbf{f} \mathbf{g} c_3 - 6\Lambda \mathbf{f} \mathbf{g} c_5 - 96c_6 \mathbf{f} \mathbf{g}(\Lambda - 2\mathbf{f}) - 3\tilde{\beta} \mathbf{g}] \theta = 0 \end{aligned} \quad (\text{c2})$$

(0a)-КОМПОНЕНТА:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{(0a)} \equiv & (3\beta - 3\tilde{\beta})\Psi' - 4ic_3(\mathbf{f}^2 - \mathbf{g}^2)M' - 4i(c_4 - c_3)\mathbf{f}\mathbf{g}\rho' \\
& + i(12c_3\mathbf{g}^2\mathbf{f} + 12\mathbf{g}^2\mathbf{f}c_5 - 4c_3\mathbf{f}^3)\tilde{\xi} - i(-12c_3\mathbf{g}\mathbf{f}^2 - 12c_5\mathbf{g}\mathbf{f}^2 + 4c_3\mathbf{g}^3)\theta \\
& - i[3\tilde{\beta}\mathbf{f} - 96c_6\mathbf{g}^2(\Lambda - 2\mathbf{f}) + 12c_3\mathbf{g}^2\mathbf{f} + 12c_5\mathbf{g}^2\mathbf{f} - 4c_3\mathbf{f}^3]M \\
& - i[-3\tilde{\beta}\mathbf{g} - 96c_6\mathbf{g}\mathbf{f}(\Lambda - 2\mathbf{f}) + 12c_3\mathbf{g}\mathbf{f}^2 + 12c_5\mathbf{g}\mathbf{f}^2 - 4c_3\mathbf{g}^3]\rho \\
& + [-96c_6k^2\mathbf{g}(\Lambda - 2\mathbf{f}) - 4(c_4 - c_3)\mathbf{g}\mathbf{f}k^2]u + [3\tilde{\beta} - 4c_3(\mathbf{f}^2 - \mathbf{g}^2)]\sigma \\
& + [-3\tilde{\beta}\mathbf{f} + 96c_6\mathbf{g}^2(\Lambda - 2\mathbf{f}) - 12c_3\mathbf{g}^2\mathbf{f} - 12c_5\mathbf{g}^2\mathbf{f} + 4c_3\mathbf{f}^3]\Psi \\
& + [-3\beta\Lambda - 4c_3\mathbf{f}(\mathbf{f}^2 - \mathbf{g}^2) - 4\mathbf{g}^2\mathbf{f}(c_4 - c_3)]\Phi = 0 \tag{c3}
\end{aligned}$$

(ab)-КОМПОНЕНТА, $k_a k_b$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{(k\otimes k)} \equiv & -(48c_6\Lambda\mathbf{g} - 96c_6\mathbf{f}\mathbf{g})Q' - [-3c_5\Lambda\mathbf{f} - \frac{3}{2}\tilde{\beta} - 3c_5(\mathbf{f}^2 - \mathbf{g}^2)]\chi' \\
& - (96c_6\mathbf{f}\mathbf{g} - 48c_6\Lambda\mathbf{g})u' - [-\frac{3}{2}\beta + \frac{3}{2}\tilde{\beta} + 3c_5(\mathbf{g}^2 - \mathbf{f}^2 - \Lambda\mathbf{f})]\Psi \\
& - [3c_5\Lambda\mathbf{f} + \frac{3}{2}\tilde{\beta} - \frac{3}{2}\beta + 3c_5(\mathbf{f}^2 - \mathbf{g}^2)]\Phi - (-48ic_6\Lambda\mathbf{g} + 96ic_6\mathbf{f}\mathbf{g})\theta \\
& - (-48ic_6\Lambda\mathbf{g} + 96ic_6\mathbf{f}\mathbf{g})\rho - [3ic_5(\mathbf{f}^2 - \mathbf{g}^2 + \Lambda\mathbf{f}) + \frac{3}{2}i\tilde{\beta}]\tilde{\xi} \\
& - (-3c_5\mathbf{f}^3 - 3c_5\Lambda\mathbf{f}^2 - 48c_6\mathbf{g}^2\Lambda + 96c_6\mathbf{g}^2\mathbf{f} + 3c_5\mathbf{g}^2\mathbf{f} + \frac{3}{2}\mathbf{f}\tilde{\beta})\chi \\
& - (3c_5\mathbf{f}^2\mathbf{g} + 3c_5\Lambda\mathbf{f}\mathbf{g} - 3c_5\mathbf{g}^3 - 48c_6\Lambda\mathbf{f}\mathbf{g} + 96c_6\mathbf{f}^2\mathbf{g} - \frac{3}{2}\mathbf{g}\tilde{\beta})Q \\
& - [-3ic_5(\mathbf{f}^2 - \mathbf{g}^2 + \Lambda\mathbf{f}) + \frac{3}{2}i\tilde{\beta}]M \\
& - u(-96c_6\mathbf{g}\mathbf{f}^2 - 3c_5\mathbf{f}^2\mathbf{g} + 3c_5\mathbf{g}^3 + 48c_6\Lambda\mathbf{f}\mathbf{g} - 3c_5\Lambda\mathbf{f}\mathbf{g} + \frac{3}{2}\mathbf{g}\tilde{\beta}) = 0 \tag{c4}
\end{aligned}$$

(*ab*)-компонента, δ_{ab} :

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{(\delta)} \equiv & (-3\tilde{\beta} + 3\beta)\Psi'' + (-16c_6\Lambda\mathbf{g}k^2 - 32k^2c_6\mathbf{f}\mathbf{g})u' + (-32c_6\Lambda\mathbf{g}k^2 + 32k^2c_6\mathbf{f}\mathbf{g})Q' \\
& + (-192c_6\mathbf{f}\mathbf{g}^2 + 6\beta\Lambda + 3\mathbf{f}\tilde{\beta})\Psi' + (c_5k^2\Lambda\mathbf{f} + \frac{3}{2}k^2\tilde{\beta} - c_5k^2\mathbf{g}^2 + c_5k^2\mathbf{f}^2)\chi' + 3\tilde{\beta}\sigma' \\
& + [-ic_5k^2(\mathbf{f}^2 - \mathbf{g}^2 + \Lambda\mathbf{f}) - \frac{3}{2}ik^2\tilde{\beta}]\tilde{\xi} + (32ik^2c_6\mathbf{f}\mathbf{g} + 16ik^2c_6\Lambda\mathbf{g})\rho + (32ik^2c_6\Lambda\mathbf{g} \\
& + [-c_5k^2(\mathbf{f}^2 - \mathbf{g}^2 + \Lambda\mathbf{f}) + 48c_6\Lambda^2\mathbf{g}^2 - 3\tilde{\beta}\Lambda\mathbf{f} - 9\beta\Lambda^2 - \frac{3}{2}k^2\tilde{\beta} + \frac{3}{2}k^2\beta]\Phi \\
& + [-3\tilde{\beta}\Lambda\mathbf{f} + 48c_6\Lambda^2\mathbf{g}^2 + c_5k^2(\mathbf{f}^2 - \mathbf{g}^2 + \Lambda\mathbf{f}) - 384c_6\mathbf{f}^2\mathbf{g}^2 + \frac{3}{2}k^2\beta \\
& + 3\tilde{\beta}\mathbf{f}^2 - \frac{3}{2}k^2\tilde{\beta} - 3\tilde{\beta}\mathbf{g}^2]\Psi - 32ik^2c_6\mathbf{f}\mathbf{g})\theta + (-3\tilde{\beta}\mathbf{f} + 192c_6\mathbf{g}^2\mathbf{f})\sigma \\
& + (c_5k^2\Lambda\mathbf{f}^2 - c_5k^2\mathbf{g}^2\mathbf{f} - \frac{3}{2}k^2\mathbf{f}\tilde{\beta} + c_5k^2\mathbf{f}^3 + 32k^2c_6\mathbf{f}\mathbf{g}^2 + 16k^2c_6\Lambda\mathbf{g}^2)\chi \\
& + (-c_5k^2\mathbf{g}^3 + 160k^2c_6\mathbf{f}^2\mathbf{g} + c_5k^2\mathbf{f}^2\mathbf{g} + c_5k^2\Lambda\mathbf{f}\mathbf{g} - 16k^2c_6\Lambda\mathbf{g}\mathbf{f} + \frac{3}{2}k^2\mathbf{g}\tilde{\beta})u \\
& + [32k^2c_6\mathbf{f}^2\mathbf{g} + 16k^2c_6\Lambda\mathbf{g}\mathbf{f} - c_5k^2\Lambda\mathbf{f}\mathbf{g} + c_5k^2\mathbf{g}^3 + \frac{3}{2}k^2\mathbf{g}\tilde{\beta} - c_5k^2\mathbf{f}^2\mathbf{g}]Q \\
& + [ic_5k^2(\mathbf{f}^2 - \mathbf{g}^2 + \Lambda\mathbf{f}) - \frac{3}{2}ik^2\tilde{\beta}]M = 0
\end{aligned} \tag{c5}$$

(ab)-КОМПОНЕНТА, $\epsilon_{abc}k_c$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{(\epsilon k)} \equiv & -i(-3c_5f^2 - 3c_5\Lambda f - 2c_3\Lambda f - 2c_3g^2 - \frac{3}{2}\tilde{\beta} + 2c_3f^2 + 3c_5g^2)\rho' \\
& - i(4c_3fg + 12c_5fg + 96c_6fg - 48c_6\Lambda g - 2c_3\Lambda g)M' \\
& + (-12c_5fg - 6c_5\Lambda g)\Psi' \\
& - i(-\frac{3}{2}g\tilde{\beta} + 3c_5g^3 + 9c_5f^2g - 2c_3g^3 + 6c_3f^2g \\
& - 3c_5\Lambda fg - 48c_6\Lambda fg + 96c_6gf^2 - 4c_3\Lambda fg)\tilde{\xi} \\
& + (\frac{3}{2}k^2\tilde{\beta} + 2k^2c_3\Lambda f + 3k^2c_5g^2 + 2k^2c_3g^2 - 3k^2c_5f^2 - 3k^2c_5\Lambda f - 2k^2c_3f^2)u \\
& + (-96c_6fg + 2c_3\Lambda g + 48c_6\Lambda g + 6c_5\Lambda g - 4c_3fg)\sigma \\
& - i(-3c_5f^3 + 48c_6g^2\Lambda + 2c_3f^3 - 6c_3g^2f - 3c_5\Lambda f^2 - 9c_5g^2f - 2c_3\Lambda f^2 \\
& - \frac{3}{2}f\tilde{\beta} + 2c_3g^2\Lambda - 96c_6fg^2)\theta \\
& + (-2c_3f^2g + 3c_5f^2g - 96c_6gf^2 + 3c_5fg\Lambda + \frac{3}{2}g\beta + 2c_3\Lambda fg - 4c_3f^2g \\
& + 48c_6\Lambda fg + 2c_3\Lambda fg - 12c_5f^2g - 3c_5g^3 + 2c_3g^3)\Phi \\
& + (-3c_5\Lambda fg + 3c_5f^2g - 3c_5g^3 - 2c_3g^3 - \frac{3}{2}g\tilde{\beta} \\
& + 96c_6gf^2 + 6c_3f^2g - 4c_3\Lambda fg - 48c_6\Lambda fg)\Psi \\
& - i(-6c_3f^2g + 48c_6\Lambda fg + \frac{3}{2}g\tilde{\beta} - 3c_5f^2g + 3c_5\Lambda fg \\
& - 96c_6gf^2 + 4c_3\Lambda fg + 3c_5g^3 + 2c_3g^3)M \\
& - i(-6c_5g^2\Lambda + 3c_5g^2f + 2c_3\Lambda f^2 - 3c_5\Lambda f^2 - 48c_6g^2\Lambda + 96c_6fg^2 \\
& + 6c_3g^2f - 2c_3g^2\Lambda + \frac{3}{2}\tilde{\beta}f - 3c_5f^3 - 2c_3f^3)\rho = 0
\end{aligned} \tag{c6}$$

Из (4.13) получаются следующие уравнения:

$$\mathcal{T}_{ijk} = \begin{cases} ik_a \mathcal{T}^{(0a0)} , & i = 0, j = a, k = 0 \\ i\epsilon_{abc}k_c \mathcal{T}^{(ab0)} , & i = a, j = b, k = 0 \\ \delta_{ab} \mathcal{T}^{(\delta)} - k_a k_b \mathcal{T}^{(k \otimes k)} + i\epsilon_{abc}k_c \mathcal{T}^{(\epsilon k)} , & i = 0, j = a, k = b \\ \epsilon_{abc} \mathcal{T}^{(\epsilon)} - \epsilon_{abd}k_c k_d \mathcal{T}^{(\epsilon k \otimes k)} + i(\delta_{ac}k_b - \delta_{bc}k_a) \mathcal{T}^{(\delta \otimes k)} , & i = a, j = b, k = c \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

(0a0)-компонента:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(0a0)} \equiv & -2c_5 k^2 \chi' + i(4c_4 \mathbf{g} + 6c_5 \mathbf{g})\rho' + 4c_3 i \mathbf{f} M' + 2c_5 k^2 \mathbf{g} Q \\ & + i(6c_5 \mathbf{g}^2 + 2k^2 c_5 + 4c_3 \mathbf{f}^2 + 4c_4 \mathbf{g}^2) \tilde{\xi} + (16c_5 k^2 \mathbf{g} + 4\mathbf{g} c_4 k^2) u \\ & + 4c_3 \mathbf{f} \sigma + i(8c_4 \mathbf{g} \mathbf{f} + 18c_5 \mathbf{g} \mathbf{f}) \theta - i(96\Lambda c_6 \mathbf{g} - 192c_6 \mathbf{f} \mathbf{g} + 8c_4 \mathbf{g} \mathbf{f} + 6c_5 \mathbf{g} \mathbf{f}) \rho \\ & + (4c_3 \mathbf{f}^2 + 4c_4 \mathbf{g}^2 + 2k^2 c_5 + 6c_5 \mathbf{g}^2) \Phi - 2ik^2 c_5 \mathbf{f} \chi \\ & + (-2c_5 k^2 - 4c_4 \mathbf{g}^2 - 4c_3 \mathbf{f}^2 - 18c_5 \mathbf{g}^2) \Psi \\ & - i(4c_3 \mathbf{f}^2 + 18c_5 \mathbf{g}^2 - 3\tilde{\beta} + 4c_4 \mathbf{g}^2 + 2c_5 k^2) M = 0 \end{aligned} \quad (\text{c7})$$

(ab0)-компонента:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(ab0)} \equiv & -32c_6 k^2 u' - 16c_6 k^2 Q' - (96c_6 \mathbf{g} + 12c_5 \mathbf{g}) \Psi' - i(6c_5 \mathbf{f} + 4c_4 \mathbf{f}) \rho' \\ & + 4ic_3 \mathbf{g} M' + 32c_6 k^2 \mathbf{f} Q + i(96\Lambda c_6 \mathbf{g} + 6c_5 \mathbf{g} \mathbf{f} - 192c_6 \mathbf{f} \mathbf{g} + 8c_4 \mathbf{g} \mathbf{f}) M \\ & + (48c_6 \Lambda \mathbf{g} + 8c_4 \mathbf{g} \mathbf{f} - 192c_6 \mathbf{f} \mathbf{g} + 6c_5 \mathbf{g} \mathbf{f}) \Psi + 32c_6 k^2 \mathbf{g} \chi \\ & - i(8c_4 \mathbf{g} \mathbf{f} + 18c_5 \mathbf{g} \mathbf{f}) \tilde{\xi} - (-64c_6 k^2 \mathbf{f} + 4\mathbf{f} k^2 c_4 + 6\mathbf{f} k^2 c_5) u \\ & + (96c_6 \mathbf{g} - 4c_4 \mathbf{g}) \sigma + i(16c_6 k^2 - 4c_4 \mathbf{f}^2 - 4c_3 \mathbf{g}^2 - 6c_5 \mathbf{f}^2) \theta \\ & + i(32c_6 k^2 + 4c_4 \mathbf{f}^2 + 3\tilde{\beta} + 18c_5 \mathbf{f}^2 + 4c_3 \mathbf{g}^2) \rho \\ & - (8c_4 \mathbf{g} \mathbf{f} + 18c_5 \mathbf{g} \mathbf{f} - 48c_6 \Lambda \mathbf{g}) \Phi = 0 \end{aligned} \quad (\text{c8})$$

(0ab)-КОМПОНЕНТА, $k_a k_b$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{(k \otimes k)} \equiv & 3c_5 \chi'' + 3c_5 \mathbf{g} Q' - 3c_5 \Phi' - 3c_5 \mathbf{g} u' - (2ic_4 + 3ic_5) M' - 3ic_5 \tilde{\xi}' + 3c_5 \Psi' \\
& - (-3c_5 \Lambda \mathbf{f} + 3c_5 \mathbf{f}^2 + \frac{3}{2} \tilde{\beta}) \chi - (3ic_5 \mathbf{f} + 2ic_4 \mathbf{f}) \tilde{\xi} \\
& - (3c_5 \mathbf{f} + 2c_4 \mathbf{f}) \Phi - (2c_4 + 6c_5) \sigma + 2ic_3 \mathbf{g} \rho \\
& - (3c_5 \Lambda \mathbf{g} - 96c_6 \mathbf{f} \mathbf{g} + 3c_5 \mathbf{f} \mathbf{g} + 48c_6 \Lambda \mathbf{g}) u - (-3c_5 \mathbf{f} - 2c_4 \mathbf{f}) \Psi + 2ic_4 \mathbf{g} \theta \\
& - (-2ic_4 \mathbf{f} - 3ic_5 \mathbf{f}) M - (-48\Lambda c_6 \mathbf{g} + 96c_6 \mathbf{f} \mathbf{g} - 3c_5 \Lambda \mathbf{g} - 3c_5 \mathbf{f} \mathbf{g}) Q = 0
\end{aligned} \tag{c9}$$

(0ab)-КОМПОНЕНТА, δ_{ab} :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{(\delta)} \equiv & c_5 k^2 \chi'' + (5k^2 c_5 \mathbf{g} + 32k^2 c_6 \mathbf{g}) Q' - c_5 k^2 \Phi' + (c_5 k^2 + 192c_6 \mathbf{g}^2) \Psi' \\
& - ik^2 c_5 \tilde{\xi}' + (-5ik^2 c_5 - 2ik^2 c_4) M' + (64k^2 c_6 \mathbf{g} + 7k^2 c_5 \mathbf{g}) u' \\
& + (5ik^2 c_5 \mathbf{f} + 2ik^2 c_4 \mathbf{f}) M + (-160k^2 c_6 \mathbf{f} \mathbf{g} + 5k^2 c_5 \Lambda \mathbf{g} + 48k^2 c_6 \Lambda \mathbf{g} + k^2 c_5 \mathbf{f} \mathbf{g}) Q \\
& + (-32ik^2 c_6 \mathbf{g} + 2ik^2 c_4 \mathbf{g}) \theta + (48k^2 c_6 \Lambda \mathbf{g} - k^2 c_5 \mathbf{f} \mathbf{g} - 224k^2 c_6 \mathbf{f} \mathbf{g} + 7k^2 c_5 \Lambda \mathbf{g}) u \\
& + (-5ik^2 c_5 \mathbf{f} - 2ik^2 c_4 \mathbf{f}) \tilde{\xi} + (2k^2 c_3 - 3\tilde{\beta} - 192c_6 \mathbf{g}^2) \sigma \\
& + (2k^2 c_4 \mathbf{f} + 5k^2 c_5 \mathbf{f} + 576c_6 \mathbf{g}^2 \mathbf{f} + 3\mathbf{f} \tilde{\beta} - 24c_5 \Lambda \mathbf{g}^2 - 192c_6 \Lambda \mathbf{g}^2) \Psi \\
& + (-96c_6 \Lambda \mathbf{g}^2 - 5k^2 c_5 \mathbf{f} - 2k^2 c_4 \mathbf{f} - 12c_5 \Lambda \mathbf{f}^2 + 3\Lambda \tilde{\beta}) \Phi \\
& + (-64ik^2 c_6 \mathbf{g} + 2ik^2 c_3 \mathbf{g}) \rho \\
& + (-k^2 c_5 \mathbf{f}^2 - \frac{3}{2} k^2 \tilde{\beta} + k^2 c_5 \Lambda \mathbf{f} - 64k^2 c_6 \mathbf{g}^2) \chi = 0
\end{aligned} \tag{c10}$$

(0ab)-КОМПОНЕНТА, $\epsilon_{abc}k_c$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{(\epsilon k)} \equiv & i(2c_4 + 3c_5)\rho'' - 3ic_5\mathbf{g}M' - 16k^2c_6Q' + i(2c_4\mathbf{f} + 3c_5\mathbf{f})\theta' \\
& + (3k^2c_5 + 2k^2c_4 - 32k^2c_6)u' + (3c_5\mathbf{g} + 2c_4\mathbf{g})\Phi' \\
& + i(2c_4\mathbf{g} + 3c_5\mathbf{g})\tilde{\xi}' + (-2c_4\mathbf{g} - 9c_5\mathbf{g} - 96c_6\mathbf{g})\Psi' \\
& - i(-3c_5\mathbf{g}\mathbf{f} - 48c_6\Lambda\mathbf{g} - 4c_4\mathbf{g}\mathbf{f} + 96c_6\mathbf{g}\mathbf{f} - 2c_4\Lambda\mathbf{g} - 3c_5\Lambda\mathbf{g})\tilde{\xi} \\
& + (2\mathbf{f}k^2c_4 + 64k^2c_6\mathbf{f} + 3k^2\mathbf{f}c_5)u + (96c_6\mathbf{g} + 6c_5\mathbf{g} + 2c_4\mathbf{g})\sigma \\
& - i(-9c_5\mathbf{f}^2 - 2c_4\Lambda\mathbf{f} + 6c_5\mathbf{g}^2 - 2c_4\mathbf{f}^2 - 16c_6k^2 - \frac{3}{2}\tilde{\beta} - 3c_5\Lambda\mathbf{f} + 2c_4\mathbf{g}^2)\theta \\
& - i(-2c_4\mathbf{g}^2 - 32c_6k^2 + 9c_5\Lambda\mathbf{f} - 6c_5\mathbf{g}^2 - \frac{3}{2}\tilde{\beta} + 2c_4\Lambda\mathbf{f} + 2c_4\mathbf{f}^2 + 3c_5\mathbf{f}^2)\rho \\
& + (3c_5\Lambda\mathbf{g} + 2c_4\mathbf{f}\mathbf{g} + 2c_4\Lambda\mathbf{g} + 2c_4\mathbf{g}\mathbf{f} + 48c_6\Lambda\mathbf{g} + 3c_5\mathbf{f}\mathbf{g})\Phi \\
& + (-4c_4\mathbf{g}\mathbf{f} - 2c_4\Lambda\mathbf{g} - 192c_6\mathbf{f}\mathbf{g} + 48c_6\Lambda\mathbf{g} - 9c_5\mathbf{f}\mathbf{g} - 3c_5\Lambda\mathbf{g})\Psi \\
& + 32c_6k^2\mathbf{g}\chi - i(4c_4\mathbf{g}\mathbf{f} + 2c_4\Lambda\mathbf{g} + 3c_5\Lambda\mathbf{g} + 9c_5\mathbf{g}\mathbf{f} + 96c_6\mathbf{f}\mathbf{g} - 48c_6\Lambda\mathbf{g})M \\
& + 32k^2c_6\mathbf{f}Q = 0 \tag{c11}
\end{aligned}$$

(abc)-КОМПОНЕНТА, $\epsilon_{abd}k_c k_d$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{(\epsilon k \otimes k)} \equiv & -(3ic_5 + 2ic_4)\rho' + 3c_5\mathbf{g}\chi' + 2ic_3\mathbf{g}\tilde{\xi} + 2c_4\mathbf{g}\Psi + 2ic_4\mathbf{g}M \\
& - (3c_5\mathbf{g}^2 - \frac{3}{2}\tilde{\beta} + 3k^2c_5 + 2k^2c_4 + 6c_5\Lambda\mathbf{f})u \\
& - (2ic_4\mathbf{f} + 3ic_5\mathbf{f})\theta + (2ic_4\mathbf{f} + 3ic_5\mathbf{f})\rho + 2c_3\mathbf{g}\Phi \\
& - (48c_6\Lambda\mathbf{g} - 96c_6\mathbf{f}\mathbf{g} + 3c_5\mathbf{g}\mathbf{f})\chi - (\frac{3}{2}\tilde{\beta} - 6c_5\Lambda\mathbf{f} - 3c_5\mathbf{g}^2)Q = 0 \tag{c12}
\end{aligned}$$

(abc)-компонента, $\delta_{ac}k_b - \delta_{ab}k_c$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{(\delta \otimes k)} \equiv & 2ic_3M'' - 2c_3f\Psi' + 2c_3f\Phi' + 3ic_5\mathbf{g}\rho' - 2ic_3\mathbf{g}\theta' + 2ic_3f\tilde{\xi}' + 2c_3\sigma' - k^2c_5\chi' \\
& - i(-2c_3f^2 + \frac{3}{2}\tilde{\beta} - k^2c_5 - 2c_3\Lambda f - 2c_4\mathbf{g}^2 - 9c_5\mathbf{g}^2)\tilde{\xi} + (2\mathbf{g}c_4k^2 + 2\mathbf{g}c_5k^2)u \\
& + 2c_3f\sigma - i(2c_3\Lambda\mathbf{g} - 3c_5f\mathbf{g} + 96c_6f\mathbf{g} - 48c_6\Lambda\mathbf{g} - 4c_4\mathbf{g}f)\theta \\
& - i(-48c_6\Lambda\mathbf{g} + 4c_4\mathbf{g}f + 9c_5\mathbf{g}f + 2c_4\Lambda\mathbf{g} + 96c_6f\mathbf{g})\rho \\
& + (2c_3\Lambda f + 2c_3f^2 - 2c_3\mathbf{g}^2 + 3c_5\mathbf{g}^2 + c_5k^2)\Phi \\
& + (-2c_3\Lambda f - 2c_4\mathbf{g}^2 - 2c_3f^2 - 3c_5\mathbf{g}^2 - k^2c_5)\Psi - c_5k^2f\chi \\
& - i(k^2c_5 + \frac{3}{2}\tilde{\beta} + 2c_4\mathbf{g}^2 + 2c_3f^2 + 3c_5\mathbf{g}^2 + 2c_3\Lambda f)M + c_5k^2\mathbf{g}Q = 0 \quad (c13)
\end{aligned}$$

(abc)-компонента, ϵ_{abc} :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{(\epsilon)} \equiv & -32c_6k^2u'' - 16c_6k^2Q'' + (-96c_6\mathbf{g} - 12c_5\mathbf{g})\Psi'' + (5k^2c_5\mathbf{g} + 32k^2c_6\mathbf{g})\chi' \\
& + (32ic_6k^2 - 2ik^2c_4 - 3ik^2c_5)\rho' + (-48c_6\Lambda\mathbf{g} - 384c_6f\mathbf{g})\Psi' + 48c_6\Lambda\mathbf{g}\Phi' \\
& + 16ik^2c_6\theta' + (12c_5\mathbf{g} + 96c_6\mathbf{g})\sigma' + (-8ik^2c_5\mathbf{g} - 2ik^2c_4\mathbf{g})\tilde{\xi} \\
& + (32ik^2c_6f - 3ik^2c_5f - 2ik^2c_4f)\theta + (160k^2c_6\mathbf{g}f - k^2c_5f\mathbf{g} - 16k^2\Lambda\mathbf{g}c_6)\chi \\
& + (-3k^4c_5 - 2k^4c_4 + 64k^2c_6\Lambda f - \frac{3}{2}k^2\tilde{\beta} - k^2c_5\mathbf{g}^2 + 6k^2c_5\Lambda f + 128k^2c_6f^2)u \\
& + (-2k^2c_4\mathbf{g} - 3k^2c_5\mathbf{g} + 96c_6\Lambda^2\mathbf{g} - 12c_5\Lambda f\mathbf{g} - 5k^2c_5\mathbf{g} + 96c_6\Lambda f\mathbf{g})\Phi \\
& + (32k^2c_6\Lambda f + 64k^2c_6f^2 + k^2c_5\mathbf{g}^2 + 6k^2c_5\Lambda f - \frac{3}{2}k^2\tilde{\beta})Q + 384c_6f\mathbf{g}\sigma \\
& + (2k^2c_5\mathbf{g} - 192c_6\Lambda f\mathbf{g} + 3\mathbf{g}\tilde{\beta} - 576c_6f^2\mathbf{g} + 96c_6\Lambda^2\mathbf{g} + 2k^2c_4\mathbf{g} - 24c_5\Lambda f\mathbf{g})\Psi \\
& + (2ik^2c_4\mathbf{g} + 2ik^2c_5\mathbf{g})M + (3ik^2c_5f + 64ik^2c_6f + 2ik^2c_4f)\rho = 0 \quad (c14)
\end{aligned}$$

Заметим, что уравнения (с5), (с9), (с10), (с11), (с13) и (с14) — содержат производную по времени второго порядка, тогда как уравнения (с1)–(с4), (с6)–(с8) и (с12) — первого порядка по производной по времени.

Также мы приводим здесь уравнения (5.10) и (5.11):

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{(1)} \equiv & 4ic_3k^2M' + (12c_5\mathbf{g}k^2 + 96c_6\mathbf{g}k^2)Q' + 576c_6\mathbf{g}^2\Psi' + 2(12c_5\mathbf{g}k^2 + 96c_6\mathbf{g}k^2)u' \\
& + (4c_3k^2 - 9\tilde{\beta} - 576c_6\mathbf{g}^2)\sigma + 4ik^2c_3\mathbf{f}\tilde{\xi} + (-192ik^2c_6\mathbf{g} + 4ik^2c_3\mathbf{g})\rho \\
& + (12k^2c_5\Lambda\mathbf{g} + 96c_6k^2\Lambda\mathbf{g} - 384c_6k^2\mathbf{g}\mathbf{f})Q + 2(12k^2c_5\Lambda\mathbf{g} \\
& - 4ik^2c_3\mathbf{f}M + 96c_6k^2\Lambda\mathbf{g} - 384c_6k^2\mathbf{g}\mathbf{f})u \\
& + (-96c_6ik^2\mathbf{g} + 4ik^2c_4\mathbf{g})\theta + (-3k^2\tilde{\beta} - 192k^2c_6\mathbf{g}^2)\chi \\
& + (4k^2c_3\mathbf{f} - 36c_5\Lambda\mathbf{f}^2 - 288c_6\Lambda\mathbf{g}^2 + 9\tilde{\beta}\Lambda)\Phi \\
& + [-72c_5\Lambda\mathbf{g}^2 - 4k^2c_3\mathbf{f} + 9\tilde{\beta}(\mathbf{f} + \Lambda) - 576c_6\mathbf{g}^2(\Lambda - 3\mathbf{f})]\Psi = 0, \tag{d1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{(2)} \equiv & [3\tilde{\beta} - 12c_5\Lambda\mathbf{f}]u' + [-3\tilde{\beta} + 12c_5\Lambda\mathbf{f}]Q' + [6c_5\Lambda\mathbf{g} - 96c_6\mathbf{g}(\Lambda - 2\mathbf{f})]\chi' \\
& + 8(c_4 - c_3)i\mathbf{g}M' + 4(c_4 - c_3)i\mathbf{f}\rho' + [3i\tilde{\beta} - 8ic_3(\mathbf{f}^2 - \mathbf{g}^2) - 4(c_4 - c_3)i\mathbf{g}^2]\theta \\
& + 8(c_4 - c_3)\mathbf{g}\sigma + [96ic_6\mathbf{g}(\Lambda - 2\mathbf{f}) - 6ic_5\Lambda\mathbf{g} + 12(c_4 - c_3)i\mathbf{f}\mathbf{g}]\tilde{\xi} \\
& + [-96c_6\mathbf{g}i(\Lambda - 2\mathbf{f}) - 6ic_5\Lambda\mathbf{g} - 12i(c_4 - c_3)\mathbf{f}\mathbf{g}]M \\
& + [-3i\tilde{\beta} - 12ic_5\Lambda\mathbf{f} + 16ic_3(\mathbf{f}^2 - \mathbf{g}^2) + 4(c_4 - c_3)i\mathbf{f}^2]\rho \\
& + [-12(c_4 - c_3)\mathbf{f}\mathbf{g} - 6c_5\Lambda\mathbf{g}]\Psi + [12(c_4 - c_3)\mathbf{f}\mathbf{g} - 6c_5\Lambda\mathbf{g}]\Phi \\
& + [3\tilde{\beta}\mathbf{g} - 18c_5\Lambda\mathbf{f}\mathbf{g} + 192c_6\mathbf{f}^2\mathbf{g} - 192c_6\Lambda^2\mathbf{g} + 288c_6\Lambda\mathbf{f}\mathbf{g}]\chi \\
& + [96c_6\mathbf{g}^2(\Lambda - 2\mathbf{f}) + 6\Lambda\tilde{\beta} + 3\mathbf{f}\tilde{\beta} + 4(c_4 - c_3)\mathbf{f}k^2 - 6c_5\Lambda\mathbf{g}^2 - 12c_5\Lambda\mathbf{f}^2 - 24c_5\Lambda^2\mathbf{f}]u \\
& + [-3\mathbf{f}\tilde{\beta} - 6\Lambda\tilde{\beta} - 96c_6\mathbf{g}^2(\Lambda - 2\mathbf{f}) + 6c_5\Lambda\mathbf{g}^2 + 12c_5\Lambda\mathbf{f}^2 + 24c_5\Lambda^2\mathbf{f}]Q = 0. \tag{d2}
\end{aligned}$$

Очевидно, что эти уравнения - первого порядка по производной по времени.

Литература

1. Einstein A. The Field Equations of Gravitation // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.). 1915. Vol. 1915. P. 844–847.
2. Einstein A. The Foundation of the General Theory of Relativity // Annalen Phys. 1916. Vol. 49, no. 7. P. 769–822. [,65(1916)].
3. Patrignani C. et al. Review of Particle Physics // Chin. Phys. 2016. Vol. C40, no. 10. P. 100001.
4. Will C. M. The Confrontation between General Relativity and Experiment // Living Rev. Rel. 2014. Vol. 17. P. 4. arXiv:gr-qc/1403.7377.
5. Armendariz-Picon C., Damour T., Mukhanov V. F. k - inflation // Phys. Lett. 1999. Vol. B458. P. 209–218. arXiv:hep-th/hep-th/9904075.
6. Armendariz-Picon C., Mukhanov V. F., Steinhardt P. J. A Dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late time cosmic acceleration // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85. P. 4438–4441. arXiv:astro-ph/astro-ph/0004134.
7. Deffayet C. Cosmology on a brane in Minkowski bulk // Phys. Lett. 2001. Vol. B502. P. 199–208. arXiv:hep-th/hep-th/0010186.
8. Deffayet C., Dvali G. R., Gabadadze G. Accelerated universe from gravity leaking to extra dimensions // Phys. Rev. 2002. Vol. D65. P. 044023. arXiv:astro-ph/astro-ph/0105068.
9. Damour T., Kogan I. I., Papazoglou A. Nonlinear bigravity and cosmic acceleration // Phys. Rev. 2002. Vol. D66. P. 104025. arXiv:hep-th/hep-th/0206044.
10. Volkov M. S. Self-accelerating cosmologies and hairy black holes in ghost-free bigravity and massive gravity // Class. Quant. Grav. 2013. Vol. 30. P. 184009. arXiv:hep-th/1304.0238.
11. de Rham C., Gabadadze G., Heisenberg L., Pirtskhalava D. Cosmic

- Acceleration and the Helicity-0 Graviton // Phys. Rev. 2011. Vol. D83. P. 103516. arXiv:hep-th/1010.1780.
12. Nicolis A., Rattazzi R., Trincherini E. The Galileon as a local modification of gravity // Phys. Rev. 2009. Vol. D79. P. 064036. arXiv:hep-th/0811.2197.
 13. Lombriser L., Taylor A. Breaking a Dark Degeneracy with Gravitational Waves // JCAP. 2016. Vol. 1603, no. 03. P. 031. arXiv:astro-ph.CO/1509.08458.
 14. Joyce A., Lombriser L., Schmidt F. Dark Energy Versus Modified Gravity // Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 2016. Vol. 66. P. 95–122. arXiv:astro-ph.CO/1601.06133.
 15. Garriga J., Mukhanov V. F. Perturbations in k-inflation // Phys. Lett. 1999. Vol. B458. P. 219–225. arXiv:hep-th/hep-th/9904176.
 16. Hsu S. D. H., Jenkins A., Wise M. B. Gradient instability for $w < -1$ // Phys. Lett. 2004. Vol. B597. P. 270–274. arXiv:astro-ph/astro-ph/0406043.
 17. Gorbunov D., Koyama K., Sibiryakov S. More on ghosts in DGP model // Phys. Rev. 2006. Vol. D73. P. 044016. arXiv:hep-th/hep-th/0512097.
 18. Comelli D., Crisostomi M., Pilo L. Perturbations in Massive Gravity Cosmology // JHEP. 2012. Vol. 06. P. 085. arXiv:hep-th/1202.1986.
 19. De Felice A., Gumrukcuoglu A. E., Mukohyama S. Massive gravity: nonlinear instability of the homogeneous and isotropic universe // Phys. Rev. Lett. 2012. Vol. 109. P. 171101. arXiv:hep-th/1206.2080.
 20. Lagos M., Ferreira P. G. Cosmological perturbations in massive bigravity // JCAP. 2014. Vol. 1412. P. 026. arXiv:gr-qc/1410.0207.
 21. Cusin G., Durrer R., Guarato P., Motta M. Gravitational waves in bigravity cosmology // JCAP. 2015. Vol. 1505, no. 05. P. 030. arXiv:astro-ph.CO/1412.5979.
 22. König F. Higuchi Ghosts and Gradient Instabilities in Bimetric Gravity // Phys. Rev. 2015. Vol. D91. P. 104019. arXiv:astro-ph.CO/1503.07436.

23. Rubakov V. A. The Null Energy Condition and its violation // Phys. Usp. 2014. Vol. 57. P. 128–142. [Usp. Fiz. Nauk184,no.2,137(2014)]. arXiv:hep-th/1401.4024.
24. de Rham C. Massive Gravity // Living Rev. Rel. 2014. Vol. 17. P. 7. arXiv:hep-th/1401.4173.
25. Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. (première partie) // Annales Sci. Ecole Norm. Sup. 1923. Vol. 40. P. 325–412.
26. Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. (première partie) (Suite). // Annales Sci. Ecole Norm. Sup. 1924. Vol. 41. P. 1–25.
27. Hayashi K., Shirafuji T. Gravity from Poincare Gauge Theory of the Fundamental Particles. 1. Linear and Quadratic Lagrangians // Prog. Theor. Phys. 1980. Vol. 64. P. 866. [Erratum: Prog. Theor. Phys.65,2079(1981)].
28. Hayashi K., Shirafuji T. Gravity From Poincare Gauge Theory of the Fundamental Particles. 2. Equations of motion for test bodies and various limits // Prog. Theor. Phys. 1980. Vol. 64. P. 883. [Erratum: Prog. Theor. Phys.65,2079(1981)].
29. Hayashi K., Shirafuji T. Gravity From Poincare Gauge Theory of the Fundamental Particles. 3. Weak Field Approximation // Prog. Theor. Phys. 1980. Vol. 64. P. 1435. [Erratum: Prog. Theor. Phys.66,741(1981)].
30. Hayashi K., Shirafuji T. Gravity From Poincare Gauge Theory of the Fundamental Particles. 4. Mass and Energy of Particle Spectrum // Prog. Theor. Phys. 1980. Vol. 64. P. 2222.
31. Sezgin E., van Nieuwenhuizen P. New Ghost Free Gravity Lagrangians with Propagating Torsion // Phys. Rev. 1980. Vol. D21. P. 3269.
32. Sezgin E. Class of Ghost Free Gravity Lagrangians With Massive or Massless Propagating Torsion // Phys. Rev. 1981. Vol. D24. P. 1677–1680.

33. Hehl F. W., Von Der Heyde P., Kerlick G. D., Nester J. M. General Relativity with Spin and Torsion: Foundations and Prospects // *Rev. Mod. Phys.* 1976. Vol. 48. P. 393–416.
34. Ni W.-T. Searches for the role of spin and polarization in gravity: a five-year update // *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.* 2016. Vol. 40. P. 1660010. arXiv:hep-ph/1501.07696.
35. Boulware D. G., Deser S. Can gravitation have a finite range? // *Phys. Rev.* 1972. Vol. D6. P. 3368–3382.
36. Nair V. P., Randjbar-Daemi S., Rubakov V. Massive Spin-2 fields of Geometric Origin in Curved Spacetimes // *Phys. Rev.* 2009. Vol. D80. P. 104031. arXiv:hep-th/0811.3781.
37. Deffayet C., Randjbar-Daemi S. Non linear Fierz-Pauli theory from torsion and bigravity // *Phys. Rev.* 2011. Vol. D84. P. 044053. arXiv:hep-th/1103.2671.
38. Nikiforova V., Randjbar-Daemi S., Rubakov V. Infrared Modified Gravity with Dynamical Torsion // *Phys. Rev.* 2009. Vol. D80. P. 124050. arXiv:hep-th/0905.3732.
39. Bakler P., Hehl F. W. A micro de Sitter space-time with constant torsion: a new vacuum solution of the Poincare gauge field theory // *Proceedings, International Symposium on Gauge Theory and Gravitation: Nara, Japan, August 20-24, 1982.* 1982. P. 1–15.
40. Minkevich A. V. Generalized cosmological Friedmann equations and the de Sitter solution // *Phys. Lett.* 1983. Vol. A95. P. 422–424.
41. Shie K.-F., Nester J. M., Yo H.-J. Torsion Cosmology and the Accelerating Universe // *Phys. Rev.* 2008. Vol. D78. P. 023522. arXiv:gr-qc/0805.3834.
42. Minkevich A. V. De Sitter spacetime with torsion as physical spacetime in the vacuum // *Mod. Phys. Lett.* 2011. Vol. A26. P. 259–266. arXiv:gr-qc/1002.0538.
43. Ao X.-C., Li X.-Z. Torsion Cosmology of Poincaré gauge theory and the

- constraints of its parameters via SNeIa data // JCAP. 2012. Vol. 1202. P. 003. arXiv:gr-qc/1111.2385.
44. Chee G., Guo Y. Exact de Sitter solutions in quadratic gravitation with torsion // Class. Quant. Grav. 2012. Vol. 29, no. 23. P. 235022. [Erratum: Class. Quant. Grav.33,no.20,209501(2016)]. arXiv:gr-qc/1205.5419.
 45. Geng C.-Q., Lee C.-C., Tseng H.-H. Scalar-Torsion Cosmology in the Poincare Gauge Theory of Gravity // JCAP. 2012. Vol. 1211. P. 013. arXiv:gr-qc/1207.0579.
 46. Garkun A. S., Kudin V. I., Minkevich A. V. To theory of asymptotically stable accelerating Universe in Riemann-Cartan spacetime // JCAP. 2014. Vol. 1412, no. 12. P. 027. arXiv:gr-qc/1410.0460.
 47. Lu J., Chee G. Cosmology in Poincaré gauge gravity with a pseudoscalar torsion // JHEP. 2016. Vol. 05. P. 024. arXiv:gr-qc/1601.03943.
 48. Dvali G. R., Gabadadze G., Porrati M. 4-D gravity on a brane in 5-D Minkowski space // Phys. Lett. 2000. Vol. B485. P. 208–214. arXiv:hep-th/hep-th/0005016.
 49. Nikiforova V., Randjbar-Daemi S., Rubakov V. Self-accelerating Universe in modified gravity with dynamical torsion // Phys. Rev. 2017. Vol. D95, no. 2. P. 024013. arXiv:hep-th/1606.02565.
 50. Nikiforova V. The stability of self-accelerating Universe in modified gravity with dynamical torsion // Int. J. Mod. Phys. 2017. Vol. A32, no. 23n24. P. 1750137. arXiv:hep-th/1705.00856.
 51. Nikiforova V. Stability of self-accelerating Universe in modified gravity with dynamical torsion: the case of small background torsion // Int. J. Mod. Phys. 2018. Vol. A33, no. 07. P. 1850039. arXiv:hep-th/1711.03718.
 52. Nikiforova V., Damour T. Infrared modified gravity with propagating torsion: instability of torsionfull de Sitter-like solutions // Phys. Rev. 2018. Vol. D97. P. 124014. arXiv:gr-qc/1804.09215.

53. van Dam H., Veltman M. J. G. Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields // Nucl. Phys. 1970. Vol. B22. P. 397–411.
54. Zakharov V. I. Linearized gravitation theory and the graviton mass // JETP Lett. 1970. Vol. 12. P. 312. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.12,447(1970)].
55. Vainshtein A. I. To the problem of nonvanishing gravitation mass // Phys. Lett. 1972. Vol. 39B. P. 393–394.
56. Nikiforova V. Code for large torsion case. https://github.com/nikiforovavas/the_perturbations.git.
57. Nikiforova V. Code for small torsion case. https://github.com/nikiforovavas/the_perturbationsST.git.