

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

Наумов Дмитрий Вадимович

**ИЗМЕРЕНИЕ θ_{13} , Δm_{32}^2 И КОВАРИАНТНАЯ КВАНТОВО-ПОЛЕВАЯ
ТЕОРИЯ НЕЙТРИННЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ**

Специальность 01.04.16 —
«физика атомного ядра и элементарных частиц»

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2017

Оглавление

	Стр.
Введение	7
I Обзор литературы	12
Глава 1. Нейтрино. Что мы знаем об этой частице	13
1.1 Краткая история нейтрино	13
1.2 Стандартная Модель: принципы теории и смешивание фермионов	16
1.2.1 Лагранжиан до нарушения калибровочной симметрии	17
1.2.2 Лагранжиан после нарушения калибровочной симметрии	19
1.3 Осцилляции нейтрино в вакууме и веществе	22
1.3.1 Вакуумные осцилляции	22
1.3.2 Осцилляции нейтрино в веществе	24
1.4 Число поколений нейтрино	27
1.5 Масса нейтрино	28
1.6 Электромагнитные свойства нейтрино	30
1.7 Заключение к главе	32
Глава 2. Нейтрино. Что мы хотим узнать об этой частице?	34
2.1 Прямые измерения массы нейтрино	34
2.2 Иерархия масс и нарушение CP инвариантности.	36
2.3 Безнейтринный двойной бета-распад	40
2.4 Стерильные нейтрино	43
2.5 Проблема солнечной металличности и CNO цикл	47
2.6 Астрофизические нейтрино и нейтринные телескопы	48
2.7 Нейтринная геофизика	50
2.8 Заключение к главе	52
II Разработка квантово-полевого подхода к описанию нейтринных осцилляций.	55
Глава 3. Квантовомеханическая теория осцилляций нейтрино в плосковолновом приближении и в модели с волновым пакетом	56
3.1 Квантовые состояния	56
3.2 Плосковолновая теория осцилляций нейтрино в вакууме	57
3.3 Лоренц-инвариантность нейтринных осцилляций	58
3.4 Плосковолновая теория осцилляций нейтрино в веществе	59

3.4.1	Представления или выбор удобного базиса	60
3.4.2	Решение для вещества с постоянной плотностью	62
3.4.3	Решение для вещества с медленно меняющейся плотностью. Адиабатическое приближение	63
3.5	Неполнота и парадоксы плосковолнового приближения. Обзор предлагаемых решений	66
3.6	Общие свойства волнового пакета	68
3.6.1	Средняя траектория волнового пакета	69
3.6.2	Расплывание волнового пакета в конфигурационном пространстве	70
3.6.3	Поперечное расплывание волнового пакета ведет к закону обратных квадратов	71
3.6.4	Нековариантный гауссовый волновой пакет	73
3.7	Теория осцилляций нейтрино в вакууме в модели волнового пакета	75
3.7.1	Состояние нейтрино в модели волнового пакета и амплитуда перехода из источника в детектор	75
3.7.2	Макроскопическое усреднение вероятности перехода	77
3.7.3	Качественное обсуждение формулы для вероятности осцилляций в модели волнового пакета	78
3.8	Заключение к главе	81
Глава 4. Квантово-полевая теория релятивистского волнового пакета		84
4.1	Релятивистский волновой пакет	84
4.1.1	Определения	84
4.1.2	Средний 4-импульс.	87
4.1.3	Волновой пакет для фермиона	88
4.1.4	Перестановочная функция	90
4.1.5	Многopakетные состояния	92
4.2	Релятивистские гауссовы пакеты.	95
4.2.1	Функция $\phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p})$	95
4.2.2	Волновая функция $\psi_G(\mathbf{p}, x)$	97
4.2.3	Перестановочная функция $\mathcal{D}_G(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x)$	100
4.2.4	Приближение нерасплывающихся пакетов	101
4.2.5	Эффективные размеры и масса пакета	106
4.2.6	Неопределенности энергии и импульса пакета	106
4.2.7	Область применимости СРГП	108
4.3	Рассеяние волновых пакетов	110
4.3.1	Амплитуда рассеяния	112
4.3.2	Число взаимодействий для неколлинеарных столкновений волновых пакетов	113
4.3.3	Релятивистская инвариантность квадрата прицельного параметра	115
4.4	Заключение к главе	116

Глава 5. Квантово-полевая теория осцилляций нейтрино в модели с релятивистским волновым пакетом	119
5.1 Макроскопические фейнмановские диаграммы	119
5.1.1 Макроскопическая диаграмма общего вида	119
5.1.2 Примеры макродиаграмм	120
5.1.3 Правила Фейнмана	123
5.1.4 Интегралы перекрытия	125
5.1.5 Плосковолновой предел	126
5.1.6 Тензоры перекрытия	126
5.1.7 Факторы, ответственные за баланс энергии-импульса	128
5.1.8 Геометрические факторы подавления и прицельные точки	128
5.1.9 Асимптотические условия	135
5.1.10 Фазовые факторы	136
5.1.11 Объемы перекрытия	136
5.2 Амплитуда процесса $I_s \oplus I_d \rightarrow F'_s + \ell_\alpha \oplus F'_d + \ell_\beta$	137
5.2.1 Асимптотика амплитуды при больших L	140
5.2.2 Интегрирование по q_0	141
5.2.3 Окончательная формула для амплитуды	147
5.2.4 Эффективный волновой пакет ультрарелятивистского нейтрино	150
5.3 Микроскопическая вероятность макроскопически разнесенных событий	152
5.3.1 Макроскопическое усреднение	153
5.3.2 Факторизация на три множителя	155
5.3.3 Вероятность осцилляций	155
5.4 Обсуждение результатов	160
5.4.1 Метод и основные этапы вычисления	160
5.4.2 Как виртуальное нейтрино становится реальным	163
5.4.3 Усреднение по ансамблю и роль релятивистской ковариантности	164
5.4.4 Вероятность флэйворных переходов	165
5.4.5 Наблюдаемость волнового пакета	168
5.4.6 Сравнение с результатами работ других авторов	170
5.5 Заключение к главе	173

III Измерение угла смешивания θ_{13} и разности квадратов масс Δm_{ee}^2 в эксперименте Daya Bay **177**

Глава 6. Эксперимент Daya Bay	178
6.1 Введение	178
6.2 Описание эксперимента	180
6.3 Калибровка детектора	187
6.3.1 Временная калибровка	187
6.3.2 Калибровка энергии	188

6.3.3	Разрешение энергии	200
6.3.4	Абсолютная энергия антинейтрино	201
6.4	Заключение к главе	204
Глава 7. Антинейтринный сигнал и оценка фона		207
7.1	Отбор антинейтрино	207
7.2	Отбрасывание фоновых событий	211
7.2.1	Инструментальный фон	213
7.2.2	Некоррелированные фоновые сигналы	216
7.2.3	Коррелированные фоны	220
7.3	Отбор антинейтрино. Краткая сводка результатов	236
7.3.1	Эффективности детектирования	236
7.3.2	Отобранный набор событий со взаимодействиями $\bar{\nu}_e$	237
7.4	Заключение к главе	240
Глава 8. Осцилляционный анализ		242
8.1	Электронные антинейтрино от ядерного реактора	242
8.1.1	Введение	242
8.1.2	Мощность реактора и эволюция топлива	242
8.1.3	Вычисление спектра реакторных антинейтрино	243
8.1.4	Неравновесная поправка к конверсионным спектрам	246
8.1.5	Отработанное ядерное топливо	246
8.1.6	Реакторные аномалии	248
8.2	Сечение обратного бета-распада	248
8.3	Предсказание числа взаимодействий $\bar{\nu}_e$	250
8.4	Статистический анализ	254
8.4.1	Функция правдоподобия и учет результатов предыдущих измерений	254
8.4.2	Приближение ковариационной матрицы	255
8.4.3	Маргинализация доверительного интервала по параметрам	256
8.4.4	Моделирование систематических неопределенностей	258
8.5	Результаты анализа	259
8.5.1	Измерение амплитуды осцилляций $\sin^2 2\theta_{13}$ на основе полного числа событий	259
8.5.2	Измерение значений $\sin^2 2\theta_{13}$ и Δm_{32}^2 на основе измеренных чисел событий взаимодействия антинейтрино и их энергетических спектров	261
8.5.3	Измерение спектра реакторных антинейтрино	265
8.5.4	Бюджет ошибок	266
8.5.5	Ограничение на дисперсию импульса волнового пакета нейтрино	268
8.6	Заключение к главе	273
Заключение		277

Благодарности	281
Глава 9. Словарь терминов	284
9.1 Определения, система единиц	284
9.2 Список сокращений	284
Список литературы	287
Список рисунков	305
Список таблиц	317
Приложение А. К квантовополевой теории осцилляций нейтрино	319
А.1 Комплексная функция ошибок и связанные с ней формулы	319
А.2 Многомерные гауссовы квадратуры	320
А.3 Факторизация адронных блоков	321

Введение

Нейтрино играет важную роль в современной физике частиц, астрофизике и космологии. Нейтрино, нарушающее Р-инвариантность, подсказало правильную группу калибровочной симметрии Стандартной Модели (СМ). Свойства нейтрино могут указать путь к построению расширений СМ и альтернативных подходов, объясняющих экспериментальные факты, не укладывающиеся в рамки СМ. Поэтому, прецизионное исследование оставшихся неисследованными свойств нейтрино – актуально. Известно, что нейтрино смешиваются в своих взаимодействиях с заряженными лептонами и калибровочными W^\pm . Смешивание описывается унитарной матрицей смешивания лептонов Понтекорво-Маки-Накагава-Саката (ПМНС). Из трех углов смешивания θ_{12} , θ_{23} и θ_{13} до 2012 года неизвестным оставался угол θ_{13} . Ненулевое значение угла смешивания θ_{13} было открыто в эксперименте по поиску нейтринных осцилляций с реакторными антинейтрино – Daya Bay в 2012 году на уровне достоверности, превышающем пять стандартных отклонений.

Квантовомеханическая теория осцилляций нейтрино, используемая при анализе всех, без исключения, осцилляционных экспериментов, неполна и не самосогласованна, что связано с плосковолновым приближением и отсутствием учета процессов рождения и детектирования нейтрино. Существующие в литературе расширения теории нейтринных осцилляций включают в себя модели волнового пакета нейтрино в рамках квантовомеханического рассмотрения и квантово-полевые модели с нейтрино в виртуальном состоянии. Квантово-полевые модели описывают частицы, участвующие в реакциях рождения и детектирования нейтрино волновыми пакетами. Часть II настоящей диссертации посвящена описанию нашего развития квантово-полевой теории релятивистского волнового пакета и ее применению в квантово-полевой теории осцилляций нейтрино. В части III кроме плосковолнового анализа экспериментальных данных Daya Bay впервые проводится анализ при помощи теории нейтринных осцилляций в модели волнового пакета, развитой в части II настоящей диссертации.

Целью данной работы является разработка квантово-полевой теории нейтринных осцилляций в модели релятивистского волнового пакета, прецизионное измерение $\sin^2 2\theta_{13}$ и Δm_{32}^2 в эксперименте Daya Bay.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать теорию релятивистского волнового пакета в релятивистской квантовой механике и квантовой теории поля. Исследовать свойства волнового пакета.
2. Применить разработанную теорию для вычисления сечения рассеяния волновых пакетов в квантовой теории поля.
3. Вычислить амплитуду процесса, нарушающего лептонное число, с релятивистскими волновыми пакетами, соответствующими частицам в начальном и конечном состоянии, нейтрино в виртуальном состоянии, источником и детектором нейтрино, разделенными макроскопическим расстоянием.
4. Вычислить квадрат амплитуды и провести его макроскопическое усреднение для определения вероятности осцилляций в рамках квантовой теории поля. Провести теоретической анализ полученной формулы.

5. Разработать процедуру и пакет компьютерных программ анализа экспериментальных данных эксперимента Daya Bay для получения оценки параметра смешивания нейтрино $\sin^2 2\theta_{13}$, разницы квадратов масс Δm_{32}^2 и энергетического спектра реакторных антинейтрино. Провести соответствующий анализ и получить результаты.

Научная новизна:

1. Впервые разработана теория релятивистского волнового пакета.
2. Разработанная теория применена для вычисления сечения рассеяния релятивистских волновых пакетов в квантовой теории поля.
3. Вычислена вероятность процесса, нарушающего лептонное число, с релятивистскими волновыми пакетами, соответствующими частицам в начальном и конечном состоянии, нейтрино в виртуальном состоянии, источником и детектором нейтрино, разделенными макроскопическим расстоянием.
4. Впервые получена формула для вероятности осцилляций нейтрино в модели релятивистского волнового пакета с учетом пространственной дисперсии эффективного волнового пакета нейтрино и конечных интервалов активности “источника” и “детектора”.
5. Впервые измерено отличное от нуля значение $\sin^2 2\theta_{13}$ в эксперименте Daya Bay на уровне достоверности, превышающем 25 стандартных отклонений.
6. Впервые в реакторных экспериментах измерено значение Δm_{32}^2 .
7. Достигнута рекордная точность измерения $\sin^2 2\theta_{13}$ и Δm_{32}^2 .

Практическая значимость

1. Разработанная теория релятивистского волнового пакета положена в основу вычисления вероятности осцилляций нейтрино в рамках квантовой теории поля. Анализ сечения рассеяния частиц в рамках квантово-полевой теории релятивистских волновых пакетов предоставляет возможность измерения фазы соответствующего матричного элемента; измерения формы волновой функции сталкивающихся частиц; исследования осцилляций нейтрино, рожденных в ускорителях частиц, в реакторах, в атмосфере и в других источниках.
2. Полученная общая формула для вероятности осцилляций нейтрино применена для анализа данных экспериментов Daya Bay, KamLAND, для оценки чувствительности новых экспериментов (JUNO, RENO-50) к величине дисперсии волнового пакета нейтрино.
3. Обнаруженное ненулевое значение $\sin^2 2\theta_{13}$ открыло путь к измерению иерархии масс нейтрино и фазы, ответственной за нарушение CP-инвариантности, что используется в ряде экспериментов (T2K, NO ν A) и при подготовке новых экспериментов (JUNO, RENO-50, T2HK, DUNE и др.).
4. Прецизионные измерения $\sin^2 2\theta_{13}$ и Δm_{32}^2 уменьшают систематическую неопределенность в определении иерархии масс нейтрино и параметра лептонной матрицы смешивания – фазы δ , ответственной за нарушение CP-инвариантности.
5. Измеренный энергетический спектр реакторных антинейтрино положен в основу будущих прецизионных измерений с реакторными антинейтрино.

Методология и методы исследования.

1. Теоретические. Аналитические вычисления в рамках квантовой механики, квантовой теории поля.
2. Феноменологические. Модельные параметризации экспериментальных данных.
3. Статистические. Получение наилучших оценок, доверительных интервалов, проекция многомерных доверительных интервалов на пространства меньшей размерности и т.д.
4. Численные методы. Компьютерная обработка данных, решения уравнений, вычисление интегралов, и т.п.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Теория релятивистского волнового пакета. Исследование свойств релятивистского волнового пакета. Вычисление сечения рассеяния релятивистских волновых пакетов в квантовой теории поля.
2. Доказательство того, что пространственная дисперсия волнового пакета в плоскости, перпендикулярной направлению его движения, приводит к подавлению вида $1/4\pi|\mathbf{x}|^2$ плотности потока, проинтегрированного по времени, на расстоянии $|\mathbf{x}|$ от источника рождения волнового пакета.
3. Метод и результат вычисления вероятности процесса, нарушающего лептонное число, с релятивистскими волновыми пакетами, соответствующими частицам в начальном и конечном состояниях, нейтрино в виртуальном состоянии, источником и детектором нейтрино, разделенными макроскопическим расстоянием.
4. Метод макроскопического усреднения квантово-полевой вероятности процесса с участием волновых пакетов.
5. Формула для вероятности осцилляций нейтрино в модели релятивистского волнового пакета с учетом пространственной дисперсии эффективного волнового пакета нейтрино и конечных интервалов активности “источника” и “детектора”.
6. Методика измерения осцилляционных параметров в реакторном эксперименте и создание комплекса компьютерных программ анализа экспериментальных данных эксперимента Daya Bay.
7. Методика измерения энергетического спектра реакторных антинейтрино.
8. Результат измерения параметра смешивания нейтрино $\sin^2 2\theta_{13}$.
9. Результат измерения разницы квадратов масс Δm_{32}^2 .
10. Результат измерения энергетического спектра реакторных антинейтрино.

Достоверность полученных результатов обеспечивается следующими положениями.

- Результаты развитой теории релятивистского волнового пакета сводятся в нерелятивистском пределе к известным результатам теории нерелятивистского волнового пакета.
- В плосковолновом пределе S -матричная теория с релятивистскими волновыми пакетами в качестве начальных и конечных состояний сводится к стандартной S -матричной теории.
- Формула для осцилляций нейтрино, полученная в квантово-полевой теории в модели релятивистского волнового пакета сводится к известным результатам в соответствующих приближениях, что подробно обсуждается в тексте диссертации.

- Результаты измерения $\sin^2 2\theta_{13}$ и разницы квадратов масс Δm_{32}^2 находятся в согласии с результатами, полученными с большими неопределенностями, в экспериментах RENO, Double-Chooz, T2K, MINOS, NO ν A, IceCube
- Результаты измерения энергетического спектра реакторных антинейтрино находятся в согласии с результатами, полученными с большими неопределенностями, в экспериментах RENO и Double-Chooz.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на международных конференциях:

1. **New Results from the Daya Bay Reactor Neutrino Experiment** . Neutrino Telescopes, 13-17 March 2017, Venice, Italy (пленарный доклад);
2. **Latest Results from the Daya Bay Reactor Neutrino Experiment** . New Trends in High-Energy Physics, 2-8 October 2016, Budva, Becici, Montenegro (пленарный доклад);
3. **Neutrino Physics with Nuclear Reactors**. QUARKS-2016 19th International Seminar on High Energy Physics, Pushkin, Russia, 29 May - 4 June, 2016 (пленарный доклад);
4. **Neutrino Physics with Nuclear Reactors**. Международная Сессия-конференция Секции ядерной физики ОФН РАН, 12 - 15 апреля, 2016, ОИЯИ, Дубна (пленарный доклад);
5. **Neutrino Oscillations in QFT with relativistic wave packets**. Международная Сессия-конференция Секции ядерной физики ОФН РАН, 12 - 15 апреля, 2016, ОИЯИ, Дубна (доклад на параллельной сессии);
6. **Neutrino Physics program at the JINR**. 4th SOUTH AFRICA - JINR SYMPOSIUM. Few to Many Body Systems: Models and Methods and Applications, September 21-25, 2015, JINR Dubna, Moscow region, Russia (пленарный доклад);
7. **Neutrino results from reactor experiments: present and future**. XXI DAE-BRNS High Energy Physics Symposium, December 12 2014, Guwahati, India (пленарный доклад);
8. **Recent results from Daya Bay experiment**. 3rd International Conference on New Frontiers in Physics (ICNFP 2014): Kolymbari, Crete, Greece, July 28-August 6, 2014 (доклад на параллельной сессии);
9. **Neutrino mixing: status and perspectives**. NANPino 2013, 26/06/2013 (пленарный доклад);
10. **Recent results in neutrino physics**. Odessa, August 22-28 2011, Gamov Conference on astronomy and beyond (пленарный доклад);
11. **Vacuum neutrino oscillations with relativistic wave packets in quantum field theory**. Baksan School, May 26-June 2 2011 (пленарный доклад);
12. **Outlook of neutrino physics today**. APCTP-BLTP JINR Joint workshop, May 16-19 2011 (пленарный доклад);
13. **Quantum Field Theory of Neutrino Oscillations in Vacuum and Matter**, XXX workshop Neutrino at accelerators, Dubna, January 25 2008 (пленарный доклад);

и семинарах:

1. **Измерение θ_{13} , Δm_{32}^2 и ковариантная квантово-полевая теория нейтринных осцилляций**, 07/02/2017 ПИЯФ, Гатчина, РФ;
2. **Ковариантная квантово-полевая теория нейтринных осцилляций**, 09/11/2016 ИЯИ РАН, Москва, РФ;

3. **Измерение θ_{13} , Δm_{32}^2 и ковариантная квантово-полевая теория нейтринных осцилляций**, 03/11/2016 НИИЯФ ИГУ, Москва, РФ;
4. **Измерение θ_{13} , Δm_{32}^2 и ковариантная квантово-полевая теория нейтринных осцилляций**, 20/10/2016 ЛТФ ОИЯИ, Дубна, РФ;
5. **Neutrino mixing: status and perspectives**, 08/02/2013, ОИЯИ, Дубна, РФ;
6. **Phenomenon of neutrino mixing: current status of research**, 18/01/2013, ИЯИ, Москва, РФ;
7. **Precise measurement of the Daya Bay experiment**, 20/12/2012, ОИЯИ, Дубна, РФ;
8. **Measurement of neutrino mixing angle in Daya Bay experiment**, 14/03/2014, ОИЯИ, Дубна, РФ;
9. **Физика нейтрино: статус и перспективы**, 3/08/2012, ИЯФ, Новосибирск, РФ;
10. **Neutrino oscillations within QFT with relativistic wave packets**, 21/11/2011, Брюссель, Бельгия;
11. **Осцилляции нейтрино в рамках квантовой теории поля с релятивистскими волновыми пакетами**, 24/02/2011, ОИЯИ, Дубна, РФ;
12. **Физика нейтрино**, 11/06/2010, ОИЯИ, Дубна, РФ;
13. **Neutrino oscillations within QFT with relativistic wave packets**, 09/11/2010, Университет г.Льеж, Бельгия;
14. **Neutrino oscillations within QFT with relativistic wave packets**, 05/11/2010, ИНФН, Гран-Сассо, Италия;
15. **Quantum Field Theory of Neutrino Oscillations in Vacuum and Matter**, 16/03/2009, Университет Южной Каролины, США;
16. **Quantum Field Theory of Neutrino Oscillations in Vacuum and Matter**, 06/02/2009, Кеплеровский коллоквиум университета г.Тюбингена, Германия;
17. **Quantum Field Theory of Neutrino Oscillations in Vacuum and Matter**, 09/02/2009, университет г.Бохум, Германия.

Личный вклад. Автор непосредственно участвовал во всех работах, результаты которых вошли в диссертацию. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 22 печатных изданиях, 18 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1—18], 4 – в тезисах докладов [19—22]. Автор, в составе коллаборации Daya Bay, удостоен самой крупной премии в науке “Breakthrough Prize in Fundamental Physics 2016” за исследование осцилляций нейтрино. Работы автора в составе коллектива ОИЯИ были удостоены первой премии ОИЯИ за цикл работ по эксперименту Daya Bay (2012), за цикл работ по эксперименту NOMAD (2001), первой премии ЛЯП ОИЯИ за работы по эксперименту NOMAD (2000, 2001, 2006), второй премий ОИЯИ за работы по эксперименту NOMAD (2001) и второй премии ЛЯП ОИЯИ (2004).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 324 страницы, включая 81 рисунок и 16 таблиц. Список литературы содержит 300 наименований.

Часть I

Обзор литературы

Глава 1. Нейтрино. Что мы знаем об этой частице

Физика нейтрино прошла яркий путь от гениальной теоретической догадки, через трудности экспериментального открытия и всевозможные “проблемы” и “загадки”, до систематического изучения свойств нейтрино и использования этих частиц в виде уникального инструмента исследования как в физике элементарных частиц, астрофизике, космологии, геофизике, нейтринной астрономии, так и в прикладных областях физики. Эти частицы по праву занимают одно из центральных мест в современной науке. Нейтрино, нарушающие пространственную четность в слабых взаимодействиях, подсказали правильную группу калибровочной симметрии Стандартной Модели (СМ), а сегодня именно с нейтрино связаны основные надежды обнаружить Новую Физику за пределами СМ.

На настоящий момент накоплено огромное количество экспериментальных данных по регистрации нейтрино от разных источников. В данной работе мы решили сосредоточиться на том, что уже удалось узнать о нейтрино и на том, что еще предстоит выяснить об этой частице и каким образом. Детальное описание экспериментов можно найти, например, в цикле обзоров, опубликованных в 2014 году в УФН к 100-летию Б. М. Понтекорво [1—7], исследование осцилляций нейтрино при помощи ускорительных экспериментов с длинной базой – в обзоре [8], обсуждение нерешенных вопросов в физике частиц – в обзоре [9].

1.1 Краткая история нейтрино

В 1896 году А. Беккерель открыл радиоактивность, исследуя фосфоресценцию в солях урана. Два года спустя Пьер и Мария Кюри обнаружили два других радиоактивных ядра, названных позднее полонием и радием. В 1903 году все трое получили Нобелевскую премию за открытие радиоактивности. К этому времени в работах Э. Резерфорда и Ф. Содди была сформулирована теория атомных распадов, что положило конец античной идее о неделимости атомов, и были даны названия α , β , γ радиоактивности трем видам распадов, отличающихся электрическим зарядом и проникающей способностью, сопровождающего эти распады излучения. Сегодня известно, что α , β , γ лучи – это ядра гелия, электроны и фотоны, соответственно. Возникают эти частицы в результате спонтанного деления ядер в сильных, слабых и электромагнитных распадах.

Согласно квантовой механике энергия этих частиц должна соответствовать разнице энергий уровней начального и конечного ядер. Действительно, α и γ радиоактивности с дискретными спектрами энергий вылетающих частиц прекрасно укладывались в такую парадигму, в то время как непрерывный спектр вылетающих β -частиц очевидным образом нарушал ожидаемую дискретность спектра. Это явление, открытое Дж. Чедвиком в 1913 году, сильно смущало физиков того времени. Им тогда казалось, что оно свидетельствовало о нарушении закона сохранения энергии. Нильс Бор был готов отказаться от закона сохранения энергии на микроскопическом уровне, сохранив энергию только в среднем. Н. Бор придерживался своего мнения вплоть до 1936 года.

Другой проблемой начала 20 века, на первый взгляд никак не связанной с нарушением закона сохранения энергии, была “неправильная” статистика ядер $^{14}_7\text{N}$ и ^6_3Li . В то время считалось, что ядро состоит из протонов и электронов. Соответственно, ядро $^{14}_7\text{N}$ состояло из 14 протонов и 7 электронов. Нечетное число фермионов в ядре $^{14}_7\text{N}$ должно приводить к статистике Ферми для этого ядра, что противоречило экспериментальным данным, однозначно свидетельствующим о том, что ядро $^{14}_7\text{N}$ обладает Бозе статистикой. Эта проблема называлась азотной катастрофой.

Паули в своем знаменитом письме “радиоактивным дамам и господам” от 1930 года предположил, что внутри ядра находится легкая нейтральная частица с массой менее одной сотой от массы протона. Существование такой частицы, которую он назвал “нейтрон”, позволило бы объяснить одновременно обе проблемы: и непрерывный β спектр, и азотную катастрофу.

Действительно, в β -распадах “нейтрон” Паули должен был бы улетать вместе с электроном, унося часть энергии β -распада таким образом, чтобы сумма энергий электрона и “нейтрона” была постоянной. “Нейтрон” Паули должен очень слабо взаимодействовать, чтобы избежать обнаружения. “Неправильная” статистика $^{14}_7\text{N}$ объяснялась тоже вполне естественно. Ядро азота состоит из 14 протонов, 7 электронов и нечетного числа “нейтронов”, относительно которых нужно предположить, что их спин равен $\frac{1}{2}$.

Гипотеза Паули была весьма смелой, поскольку к тому времени были известны только три элементарные частицы – протон, электрон и фотон. Сегодня известно, что для решения проблемы непрерывного β -спектра и азотной катастрофы недостаточно одной частицы – “нейтрона” Паули. Требуется две разные частицы.

“Азотная катастрофа” объясняется отсутствием электронов в ядре: ядро $^{14}_7\text{N}$ состоит из 7 протонов и 7 нейтронов. Нейтроны, открытые Дж. Чедвиком в 1932 году, оказались более тяжелыми, чем протон. Четное общее число протонов и нейтронов приводит к статистике Бозе для ядра азота $^{14}_7\text{N}$.

Непрерывность β -спектра, действительно, объясняется тем, что вместе с электроном вылетает нейтральная легкая частица, уносящая часть энергии. Э. Ферми назвал этот “нейтрон” Паули – “нейтрино”, по-итальянски – “маленький нейтрон”. Паули публично представил свою гипотезу в 1933 году на Сольвеевской конференции в Брюсселе. Через два месяца Ферми сформулировал квантовую теорию β -распада. Его работу отклонил журнал “Nature” с формулировкой “абстрактные предположения, слишком далекие от реальности, чтобы быть интересными читателям”. Теория Ферми была опубликована в 1934 году в “Zeitschrift für Physik”. Отсутствие интереса к этой работе побудило Ферми заняться экспериментальной физикой [10].

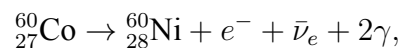
Впервые антинейтрино было экспериментально обнаружено в 1956 году в эксперименте Ф. Райнеса и К. Коуэна, в котором были зарегистрированы взаимодействия $\bar{\nu}_e$ от реактора в реакции обратного β -распада ($\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$) в жидком сцинтилляторе (ЖС) с растворенными солями кадмия [11]. Продукты реакции – позитрон и нейтрон – обладают специфической временной “меткой” в детекторе. Позитрон, потеряв кинетическую энергию на ионизацию, аннигилирует с электроном среды, порождая два γ -кванта с энергией 511 кэВ каждый, что дает узкую во времени вспышку сцинтилляции, детектируемую фотоумножителями (ФЭУ). Термализовавшийся за счет соударений с ядрами среды нейтрон захватывается протоном или ядром кадмия, при этом испускается некоторое количество γ -квантов с энергией в несколько МэВ. В результате че-

рез характерное время порядка 100 микросекунд развивается еще одна вспышка сцинтилляции, детектируемая ФЭУ. За экспериментальное обнаружение антинейтрино Ф. Райнес получил Нобелевскую премию в 1958 году (К. Коуэн до вручения премии не дожил), а примененный Ф. Райнесом и К. Коуэном метод детектирования реакторных антинейтрино стал стандартным методом регистрации антинейтрино от реактора.

В 1962 году Л. Ледерман, М. Шварц и Дж. Штейнбергер обнаружили другой тип нейтрино – мюонное нейтрино в эксперименте с распадом пиона: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ [12]. Пионы рождались в результате глубоконеупругого рассеяния протонов, ускоренных в циклическом ускорителе в Брукхейвене. Для регистрации частиц использовалась искровая камера. Экспериментаторы могли хорошо отличить мюон от электрона по треку частиц. Детектор экранировался 13 метрами стали от всех продуктов взаимодействия протонов с мишенью, кроме нейтрино, которые легко проникали сквозь толщу стали, и иногда могли взаимодействовать в искровой камере. В итоге было обнаружено, что нейтрино из распада пиона порождают мюоны, а не электроны, т.е. эти два вида нейтрино отличаются друг от друга [12]. В 1988 году Л. Ледерман, М. Шварц и Дж. Штейнбергер были награждены Нобелевской премией за открытие мюонного нейтрино и предложенный метод получения пучка нейтрино, ставший сегодня стандартным для генерации пучков ускорительных нейтрино.

Третий тип нейтрино – тау-нейтрино был открыт в 2000 году в эксперименте коллаборации DONUT, в котором ν_τ , рожденные в распадах D_s мезонов, регистрировались в ядерной фотоэмульсии. Всего было найдено 4 ν_τ события с ожидаемым числом фоновых событий менее 0.2 [13]. В 2007 году коллаборация DONUT опубликовала еще одну работу [14], в которой рассматривались уже 9 ν_τ событий. Такая статистика впервые позволила экспериментально оценить сечение взаимодействия ν_τ с нуклоном.

Слабые взаимодействия нарушают пространственную или P -четность, что проявляется, например, в распадах поляризованных частиц, в виде экспериментально наблюдаемых корреляций между направлением вылета конечных частиц и вектором поляризации распадающейся частицы. Впервые нарушение пространственной четности было продемонстрировано в 1957 году в эксперименте Ву с распадом нестабильного изотопа кобальта [15]:



в котором обнаружилось, что электроны предпочитают вылетать в сторону, противоположную направлению спина ядра кобальта, что означает нарушение P -четности.

Это революционное открытие, с которым было трудно смириться многим физикам, привело к тому, что электрослабая часть СМ, о которой речь пойдет в разделе 1.2, строится с использованием левых киральных полей. В 1957 году теоретикам Ли и Янгу, предложившим искать нарушение пространственной четности в слабых распадах, была вручена Нобелевская премия.

Итак, в период с 1956 по 2000 годы были найдены три типа нейтрино: ν_e , ν_μ , ν_τ . Соответствующее каждому типу нейтрино квантовое число (аромат) казалось строго сохраняющимся до тех пор, пока не были обнаружены осцилляции нейтрино – явление, в котором аромат не сохра-

няется¹. Таким образом, было установлено, что нейтрино с определенным ароматом не является частицей с определенной массой, а представляет собой квантовую суперпозицию массивных состояний нейтрино. Экспериментальное подтверждение нейтринных осцилляций было отмечено Нобелевской премией 2015 года. Руководитель эксперимента SuperKamiokaNDE Такааки Кадзита получил ее за открытие осцилляций атмосферных нейтрино и руководитель эксперимента SNO, Артур Макдональд, - за подтверждение осцилляций солнечных нейтрино. Впервые же нейтринные осцилляции были предсказаны Б. М. Понтекорво в 1957 году – еще до того, как они были экспериментально обнаружены.

Отметим, что Б. М. Понтекорво проявил удивительную интуицию и прозорливость, предложив также метод детектирования нейтрино, успешно реализованный в хлор-аргонном эксперименте Дэвиса [16]. Понтекорво предположил, что нейтрино, обнаруженное Райнесом и Коуэном, и нейтрино из распада пиона, окажутся двумя разными частицами, что блестяще подтвердилось в эксперименте Л. Ледермана, М. Шварца и Дж. Штейнбергера. Б. М. Понтекорво также предложил идею универсальности слабых взаимодействий. Б. М. Понтекорво и М. А. Марков, работая в ОИЯИ, заложили фундамент научной нейтринной школы в Дубне и Советском Союзе.

1.2 Стандартная Модель: принципы теории и смешивание фермионов

Сегодня все многообразие физики частиц прекрасно описывается в рамках СМ – квантовой теории поля с группой калибровочной симметрии $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$.

СМ имеет большое число свободных параметров, таких как массы частиц и константы взаимодействий, однако, она однозначно предсказывает вид взаимодействий. Эти предсказания находятся во впечатляющем согласии с экспериментом. В первоначальной формулировке Стандартной Модели, разработанной в середине семидесятых годов 20 века, нейтрино предполагались безмассовыми, что не противоречило экспериментальным данным тех лет. Как следствие, предсказывалось сохранение лептонного числа. Такую теорию иногда называют минимальной СМ. Введение ненулевых масс нейтрино, по аналогии с кварками, минимально расширяет СМ. В литературе можно встретить название для такой версии Стандартной Модели – ν СМ. В этой работе мы предпочитаем называть оба этих варианта СМ тем же термином – Стандартная Модель, поскольку в обеих моделях остается неизменным главное предсказание – вид взаимодействий. В этом месте наша терминология отличается от используемой в работе [9], в которой наличие смешивания и разных масс у нейтрино называется отклонением от Стандартной Модели.

Напротив, любое нетривиальное расширение СМ, связанное с изменением вида взаимодействий или введением новых частиц, отсутствующих в СМ, мы будем классифицировать в этой

¹здесь и далее речь идет о лептонных ароматах (в отличие от кварковых). Лептонные ароматы – удобное общее название для трёх лептонных чисел: электронного, мюонного и таонного. Также следует отметить, что на сегодня нет экспериментальных указаний на нарушение полного лептонного аромата, хотя и существуют расширения СМ, предсказывающие его несохранение.

работе как физику вне Стандартной Модели². В наши дни сильнейшим указанием на неполноту СМ являются космологические данные, требующие существования таких объектов, как темная энергия и темная материя, а также нарушение барионного числа. К поиску экспериментальных указаний на физику вне СМ сегодня приковано пристальное внимание исследователей в физике частиц, космологии, астрофизике.

Электрослабый сектор СМ строится с использованием принципа калибровочной инвариантности взаимодействий относительно преобразований группы $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Лагранжиан СМ состоит из кинетического члена, описывающего свободное распространение фермионов и их взаимодействие с калибровочными бозонами, хиггсовского потенциала с минимумом при ненулевом значении хиггсовского поля и юкавского взаимодействия фермионов с полем Хиггса. Требование калибровочной инвариантности лагранжиана СМ может быть удовлетворено только при равных нулю массах фермионов и калибровочных бозонов, что, разумеется, далеко от реальной ситуации. Векторные бозоны W^\pm и Z и фермионы приобретают массу за счет спонтанного нарушения калибровочной симметрии, при котором хиггсовский потенциал принимает минимальное значение при ненулевом вакуумном среднем скалярного поля Хиггса. Триумфом теоретической мысли явилось обнаружение бозона Хиггса в 2012 году в экспериментах на Большом Адронном Коллайдере [17].

1.2.1 Лагранжиан до нарушения калибровочной симметрии

Лагранжиан СМ до нарушения калибровочной симметрии может быть записан в виде трех строк:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \sum_k \left(\bar{L}_{k,L} i \hat{D} L_{k,L} + \bar{Q}_{k,L} i \hat{D} Q_{k,L} + \sum_{\psi=\ell,\nu,u,d} \bar{\psi}_{k,R} i \hat{D} \psi_{k,R} \right) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^i G^{i,\mu\nu} \\ + |D_\mu \Phi|^2 - \frac{\lambda^2}{2} \left(|\Phi|^2 - \frac{v^2}{2} \right)^2 \\ - \sum_{k,j} \left(\lambda_{kj}^\ell \bar{L}_{k,L} \ell_{j,R} \Phi + \lambda_{kj}^\nu \bar{L}_{k,L} \nu_{j,R} \Phi + \lambda_{kj}^d \bar{Q}_{k,L} d_{j,R} \Phi + \lambda_{kj}^u \bar{Q}_{k,L} u_{j,R} \Phi + \text{э.с.} \right), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где первая строка соответствует кинетическим членам

- лево-киральных лептонов и кварков, представленных в виде двух дублетов $L_{k,L} = \begin{pmatrix} \nu_k \\ \ell_k \end{pmatrix}_L$
- и $Q_{k,L} = \begin{pmatrix} u_k \\ d_k \end{pmatrix}_L$, где индекс k нумерует поколения нейтрино ν_e, ν_μ, ν_τ , заряженных лептонов e, μ, τ , верхних и нижних кварков (первые два слагаемых);
- право-киральных фермионов (третий член);
- калибровочных бозонов $U(1)$ и $SU(2)$ групп, B_μ и $\mathbf{A}_\mu = (A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3)$, соответственно. $F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$, $G_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g(\mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu)^i$ (последние два слагаемых).

Вторая строка отвечает

²В англоязычной литературе это называется physics beyond the Standard Model

- кинетическому члену двух комплексных скалярных хиггсовских полей, объединенных в дублет $\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$ (первый член);
- потенциалу самодействия с произвольными константами λ и v (второй член). Константа $v/\sqrt{2}$ – вакуумное среднее, которое принимает поле ϕ_0 после спонтанного нарушения калибровочной симметрии.

Третья строка соответствует, так называемому, юкавскому взаимодействию, в котором взаимодействуют лево-киральные поля из дублетов с право-киральными синглетными полями и скалярными полями Φ и зарядово-сопряженным к нему $\Phi_c = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix}$. Такое взаимодействие приходится постулировать, чтобы динамическим образом сгенерировать массы исходно безмассовым фермионам после спонтанного нарушения калибровочной симметрии. Четыре слагаемых третьей строки, генерирующие массы заряженным лептонам, нейтрино, верхним и нижним кваркам, соответственно, зависят от свободных параметров $\lambda_{kj}^\ell, \lambda_{kj}^\nu, \lambda_{kj}^d, \lambda_{kj}^u$. Кроме генерации масс, третья строка содержит вид взаимодействия фермионов и хиггсовского скалярного поля.

В первых двух строках фигурирует $\hat{D} \equiv \gamma^\mu D_\mu$, где D_μ – ковариантная производная:

$$D_\mu = \left(\partial_\mu - ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right) \mathbb{1} - ig \mathbf{T} \mathbf{A}_\mu. \quad (1.2)$$

Вектор из матриц \mathbf{T} зависит от рассматриваемого поля. Для полей, объединенных в дублеты, $\mathbf{T} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}$, где $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ – матрицы Паули. Для синглетных полей $\mathbf{T} = 0$. g, g' – две независимые константы связи. Значение гиперзаряда Y , третья компонента изоспина T_3 и заряд поля Q связаны между собой соотношением Гелл-Мана – Нишиджимы $Q = \frac{Y}{2} + T_3$. Эти величины приведены для всех полей СМ в таб.1. Требование калибровочной инвариантности лагранжиана

	u_L	d_L	u_R	d_R	ν_L	ℓ_L	ν_R	ℓ_R	ϕ^+	ϕ^0
Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-1	-1	0	-2	1	1
T_3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Q	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	-1	0	-1	1	0

Таблица 1 — Значение гиперзаряда Y , третьей компоненты изоспина T_3 и заряда поля Q для всех полей СМ. Поскольку, Y, T_3 и Q не зависят от поколения, соответствующий индекс опущен для краткости.

накладывает сильное ограничение – все поля должны быть безмассовыми. Спонтанное нарушение калибровочной симметрии с ненулевым вакуумным средним скалярного поля – ключевая идея придания массы калибровочным бозонам и фермионам.

1.2.2 Лагранжиан после нарушения калибровочной симметрии

Минимум потенциала самодействия (вторая строка в ур. (1.1)) соответствует ненулевому значению скалярного поля

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Согласно таб.1 вакуумное среднее скалярного поля $\langle \Phi \rangle$ передает вакууму гиперзаряд Y и слабый заряд T_3 , но не передает электрический заряд Q . Таким образом, калибровочная симметрия нарушается ($\langle \Phi \rangle \neq 0$) не полностью. Калибровочная симметрия $SU(2)_L \times U(1)_Y$ оказывается спонтанно нарушена до группы $U(1)_Q$, которая сохраняется. Из четырех генераторов полной группы три оказались нарушенными. Согласно теореме Голдстоуна [18], каждому нарушенному генератору соответствует безмассовое поле. Назовем их ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 . Скалярное поле Φ может быть представлено в виде

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ h + i\phi_3 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Четвертая степень свободы поля Φ – это хиггсовский бозон h , обладающий ненулевой массой. Остальные три степени свободы ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 поглощаются как продольные компоненты массивных векторных бозонов W^\pm и Z , определенные следующие образом:

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W^1 \mp iW^2), \quad (1.5)$$

$$Z = -B \sin \theta_W + A^3 \cos \theta_W, \quad (1.6)$$

$$A = B \cos \theta_W + A^3 \sin \theta_W, \quad (1.7)$$

где $\cos \theta_W = g/\sqrt{g^2 + g'^2}$, $\sin \theta_W = g'/\sqrt{g^2 + g'^2}$. Массы W^\pm и Z равны $m_W = gv/2$, $m_Z = m_W/\cos \theta_W$. Масса фотонного поля A равна нулю. Константы g и g' связаны с электрическим зарядом следующим образом:

$$\frac{1}{e^2} = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g'^2}, \quad e = g \sin \theta_W = g' \cos' \theta_W. \quad (1.8)$$

Лагранжиан СМ, записанный в ур. (1.1), после нарушения калибровочной симметрии принимает вид:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \sum_k \sum_{\psi=\ell,\nu,u,d} \bar{\psi}_k (i\hat{\partial} - m_k) \psi_k - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{m_Z^2}{2} Z_\mu Z^\mu \\
& - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^+ W^{-,\mu\nu} + m_W^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{1}{2} ((\partial_\mu h)^2 - m_h^2 h^2) \\
& - \sum_k \sum_{\psi=\ell,\nu,u,d} \left(e Q_\psi \bar{\psi}_k \gamma^\mu \psi_k A_\mu + \frac{g}{2 \cos \theta_W} \bar{\psi}_k \gamma^\mu (g_\psi^V - g_\psi^A \gamma_5) \psi_k Z_\mu \right) \\
& - \frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_{\substack{k=u,c,t \\ j=d,s,b}} V_{kj}^{\text{CKM}} \bar{\psi}_k \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_j W_\mu^- - \frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_{\substack{\alpha=e,\mu,\tau \\ j=1,2,3}} V_{\alpha j}^{\text{PMNS}} \bar{\ell}_\alpha \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_j W_\mu^- + \text{э.с.} \\
& + \sum_k \sum_{\psi=\ell,\nu,u,d} \frac{m_{\psi,k}}{v} \bar{\psi}_k \psi_k h + \left(m_W^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{m_Z^2}{2} Z_\mu Z^\mu \right) \left(\frac{2h}{v} + h^2 \right) - \frac{1}{3!} \frac{3m_h^2}{v} h^3 - \frac{1}{4!} \frac{3m_h^2}{v^2} h^4 \\
& + ig \cos \theta_W [(W_\mu^- W_\nu^+ - W_\nu^- W_\mu^+) \partial^\mu Z^\nu + W_{\mu\nu}^+ W^{-,\mu} Z^\nu - W_{\mu\nu}^- W^{+,\mu} Z^\nu] \\
& + ie [(W_\mu^- W_\nu^+ - W_\nu^- W_\mu^+) \partial^\mu A^\nu] + W_{\mu\nu}^+ W^{-,\mu} A^\nu - W_{\mu\nu}^- W^{+,\mu} A^\nu \\
& + g^2 \cos \theta_W (W_\mu^+ W_\nu^- Z^\mu Z^\nu - W_\mu^+ W^{-,\mu} Z_\nu Z^\nu) \\
& + g^2 (W_\mu^+ W_\nu^- A^\mu A^\nu - W_\mu^+ W^{-,\mu} A_\nu A^\nu) \\
& + ge \cos \theta_W [W_\mu^+ W_\nu^- (Z^\mu A^\nu + Z^\nu A^\mu) - 2W_\mu^+ W^{-,\mu} Z_\nu A^\nu] \\
& + \frac{g^2}{2} W_\mu^+ W_\nu^- (W^{+,\mu} W^{-,\nu} - W^{+,\nu} W^{-,\mu}),
\end{aligned} \tag{1.9}$$

где первые две строчки соответствуют кинетическим членам

- массивных лептонов и кварков с массами m_k . Массы появляются в результате диагонализации членов вида $\frac{v}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_L \Lambda^\ell \ell_R$, где $\Lambda_{jk}^\ell = \lambda_{jk}^\ell$ для заряженных лептонов, и аналогично для кварков и нейтрино. Диагонализация билинейной формы $\frac{v}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_L \Lambda^\ell \ell_R$ может быть выполнена при помощи двух независимых преобразований $\ell_R \rightarrow V_R^\ell \ell_R$ и $\ell_L \rightarrow V_L^\ell \ell_L$, таких, чтобы $\frac{v}{\sqrt{2}} V_L^{\ell\dagger} \Lambda^\ell V_R^\ell = \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau)$;
- безмассовому фотонному полю A_μ с $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, массивным полям W^\pm бозонов W_μ^\pm с $W_{\mu\nu}^\pm = \partial_\mu W_\nu^\pm - \partial_\nu W_\mu^\pm$ и массой $m_W = gv/2$, массивному полю Z бозона Z_μ с $Z_{\mu\nu}^\pm = \partial_\mu Z_\nu^\pm - \partial_\nu Z_\mu^\pm$ и массой $m_Z = m_W / \cos \theta_W$;
- массивному полю хиггсовского бозона с массой $m_h = \lambda v$.

Третья строка отвечает взаимодействию лептонов и кварков с фотоном (первое слагаемое) и Z бозоном (второе слагаемое), где

$$\begin{aligned}
g_\psi^V &= T_{3,\psi} - 2Q_\psi \sin^2 \theta_W \\
g_\psi^A &= T_{3,\psi}.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Эти взаимодействия не переводят частицы между поколениями, т.е. они диагональны в базисе ароматов. Взаимодействия фотона с лептонами и кварками левой и правой киральности – одинаково интенсивны, в то время как взаимодействия с Z -бозоном асимметричны.

Четвертая строка описывает недиагональные в базисе ароматов взаимодействия лептонов и кварков с заряженными W^\pm бозонами. Поля из разных поколений взаимодействуют друг с другом. Эти взаимодействия пропорциональны элементам в общем случае недиагональных матриц

смешивания: V^{PMNS} в лептонном секторе и V^{CKM} в кварковом. Матрицы смешивания возникают в результате диагонализации юкавских членов вида $\frac{v}{\sqrt{2}}\bar{\ell}_L\Lambda^\ell\ell_R$ и $\frac{v}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_L\Lambda^\nu\nu_R$ для заряженных лептонов и аналогично для кварков: $V^{\text{PMNS}} = V_L^{\ell\dagger}V_L^\nu$ и $V^{\text{CKM}} = V_L^{U\dagger}V_L^D$. Фермионные поля только левой киральности участвуют во взаимодействиях с W^\pm бозонами.

Пятая строка соответствует взаимодействию с хиггсовским полем

- фермионов (первый член). Интенсивность взаимодействия пропорциональна массе фермиона. Эти взаимодействия диагональны в базисе ароматов;
- W^\pm и Z бозонов (второй член). СМ предсказывает следующие вершины в правилах Фейнмана:

$$\begin{aligned} hW_\mu^+W_\nu^- &: i2\frac{m_W^2}{v}g_{\mu\nu} \\ hZ_\mu Z_\nu &: i2\frac{m_Z^2}{v}g_{\mu\nu} \\ hhW_\mu^+W_\nu^- &: i2\frac{m_W^2}{v^2}g_{\mu\nu} \\ hhZ_\mu Z_\nu &: i2\frac{m_Z^2}{v^2}g_{\mu\nu}; \end{aligned} \quad (1.11)$$

- самого хиггсовского поля. Предсказываются следующие вершины в правилах Фейнмана:

$$\begin{aligned} hhh &: -i3\frac{m_h^2}{v} \\ hhhh &: -i3\frac{m_h^2}{v^2}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Строки с шестой по одиннадцатую описывают взаимодействия друг с другом всех калибровочных бозонов: W^\pm , Z , γ , возникающие из $G_{\mu\nu}^i G^{i,\mu\nu}$ в ур. (1.1).

Смешивание и массы заряженных фермионов. Поскольку в общем случае юкавский потенциал перемешивает фермионы из разных поколений, то собственные массовые состояния смешиваются во взаимодействиях с W^\pm бозонами. Это смешивание описывается матрицей смешивания Кабиббо-Кобаяши-Маскава (ККМ) для кварков и матрицей смешивания лептонов Понтекорво-Маки-Накагава-Салата (ПМНС) (часто называемой в литературе матрицей смешивания нейтрино). Обе матрицы должны быть унитарны. Матрицу смешивания лептонов обычно параметризуют при помощи трех углов смешивания θ_{ij} и фазы δ , ответственной за нарушение СР-инвариантности:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

где $c_{ij} \equiv \cos\theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$. Смешивание и разные массы нейтрино приводят к несохранению лептонного числа. В случае, если бы лептонное число сохранялось, была бы возможна следующая реакция:

$$\begin{aligned} \pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu \\ \hookrightarrow \nu + n &\rightarrow p + \mu^-, \end{aligned} \quad (1.14)$$

а такая реакция была бы невозможна:

$$\begin{aligned} \pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu \\ &\hookrightarrow \nu + n \rightarrow p + e^- \end{aligned} \quad (1.15)$$

Смешивание в лептонном секторе СМ приводит к тому, что нейтрино, родившись в распаде $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ как мюонное нейтрино, пройдя некоторое макроскопическое расстояние, с некоторой вероятностью проявляется как нейтрино другого аромата, например, как электронное нейтрино, способное участвовать в реакции ур. (1.15).

1.3 Осцилляции нейтрино в вакууме и веществе

1.3.1 Вакуумные осцилляции

Трансформация аромата нейтрино имеет периодическую зависимость как функция отношения пути к энергии нейтрино L/E_ν . Это явление известно как нейтринные осцилляции.

Характерная длина осцилляций определяется соотношением $L_{ij}^{\text{осц}} = 4\pi E_\nu / |\Delta m_{ij}^2|$, где E_ν – энергия нейтрино, а $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ – разность квадратов масс нейтрино. основополагающие работы по теории осцилляций нейтрино были выполнены сотрудниками ОИЯИ – Б. М. Понтекорво и С. М. Биленьким.

Упрощенно осцилляции нейтрино можно описать следующим образом. Пусть в источнике в процессе с участием заряженного W бозона родились антилептон ℓ_α^+ ($\alpha = e, \mu, \tau$) и состояние нейтрино с определенным ароматом ν_α , которое является суперпозицией массовых состояний ν_i : $\nu_\alpha = \sum_i V_{\alpha i} \nu_i$, где $V_{\alpha i}$ это элементы матрицы смешивания ур. (1.13). Массовое состояние ν_i эволюционирует со временем согласно уравнению Шрёдингера $\nu_i(t) = e^{-iE_i t} \nu_i$, что приводит к тому, что $\nu_\alpha(t) \neq \nu_\alpha$, если массивные нейтрино имеют разные массы. Таким образом, исходное состояние с определенным ароматом меняется со временем и появляется ненулевая вероятность обнаружения квантовой примеси нейтрино другого аромата β и, как следствие, рождения лептона другого аромата ℓ_β^- .

Вероятность того, что нейтрино с энергией E_ν сохранит первоначальный аромат α , пройдя расстояние L в вакууме, в плосковолновом приближении даётся формулой:

$$P_{\alpha\alpha} = \sum_{i,j} |V_{\alpha i}|^2 |V_{\alpha j}|^2 e^{-i \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E_\nu}}, \quad (1.16)$$

в то время как вероятность изменения аромата $\alpha \rightarrow \beta$ в том же приближении есть:

$$P_{\beta\alpha} = \sum_{i,j} V_{\alpha i}^* V_{\beta i} V_{\alpha j} V_{\beta j}^* e^{-i \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E_\nu}}. \quad (1.17)$$

Тут будет уместно задать следующий вопрос. Пусть аналогично рассмотренному выше случаю осцилляций аромата, в котором метками процесса выступают два заряженных лептона ℓ_α^+ и ℓ_β^- ,

мы умозрительно потребуем пометить два массовых состояния нейтрино ν_i и ν_j в источнике и детекторе соответственно. Следует ли при этом ожидать, что вместо заряженного лептона определенного аромата мы обнаружим квантовую смесь $\ell_i = \sum_{\alpha} V_{\alpha i} \ell_{\alpha}$ и, как следствие, осцилляции заряженных лептонов? Этот вопрос тем более уместен, что матрица смешивания V лишь в силу удобства приписывается нейтрино, являясь, на самом деле, общей лептонной матрицей смешивания. Заряженные лептоны и нейтрино входят в соответствующий лагранжиан СМ симметричным образом. Корректное теоретическое описание нейтринных осцилляций требует использова-

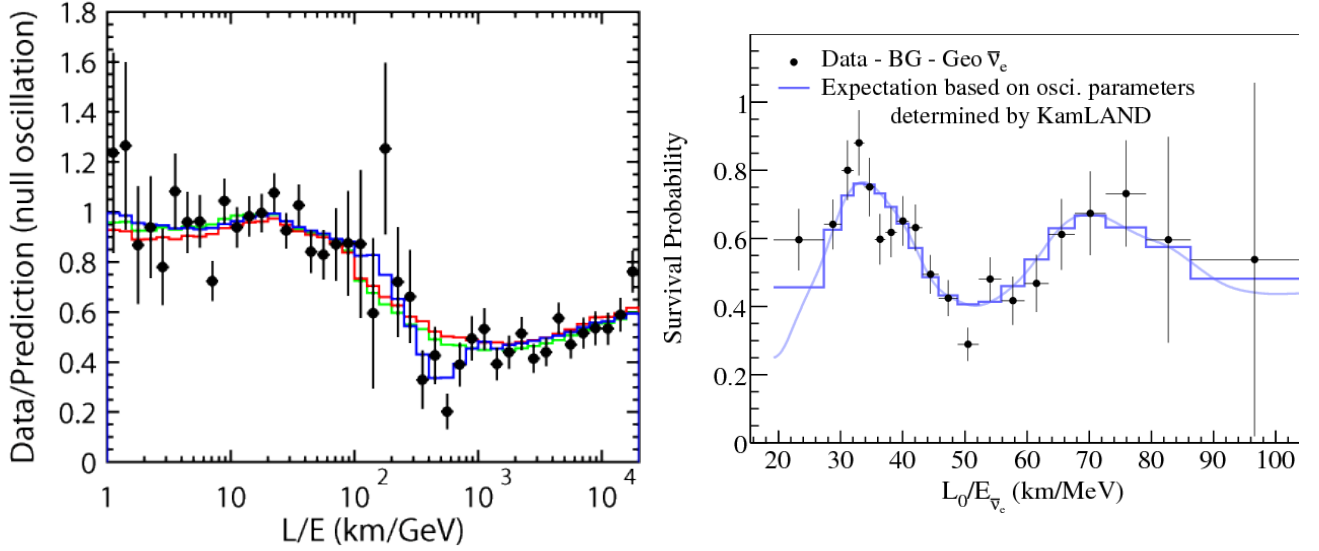


Рисунок 1.1 — Вероятность выживания мюонных нейтрино $P_{\mu\mu}$ как функция L/E (длина пути нейтрино/энергия нейтрино). Точки с ошибками – результаты измерения коллаборации SuperKamioKande. Синяя кривая – теоретическое предсказание в гипотезе нейтринных осцилляций. Рис. взят из работы [19].

Рисунок 1.2 — Вероятность выживания электронных антинейтрино как функция L/E (длина пути нейтрино/энергия нейтрино). Точки с ошибками – результаты измерения коллаборации KamLAND. Гистограмма и кривая, выделенная синим цветом, – теоретическое предсказание в гипотезе нейтринных осцилляций. Рис. взят из работы [20].

ния волновых пакетов³ для нейтрино, чтобы дать понятие длины пройденного пути и решить ряд несогласованностей теории в формализме плоских волн.

В подходе с волновыми пакетами предсказываются ряд наблюдаемых эффектов, таких как условие когерентного рождения суперпозиции массовых состояний и потеря когерентности на расстояниях, превышающих длину когерентности нейтринных осцилляций. В таком подходе также можно получить ответ на вопрос о том, почему не осциллируют заряженные лептоны [34]. Для большинства практических случаев разность квадратов масс заряженных лептонов оказывается слишком большой, чтобы заряженные лептоны могли родиться в когерентной квантовой смеси.

³В квантово-механическом подходе к теории нейтринных осцилляций, в котором игнорируются все частицы кроме нейтрино, волновой пакет постулируется для нейтрино [21—28]. Другой подход использует квантовую теорию поля для вычисления всего процесса от рождения нейтрино до его детектирования. При этом сами нейтрино рассматриваются как виртуальные частицы. Волновая функция нейтрино не постулируется, а вычисляется как функция формы всех участвующих в реакции частиц [29—33].

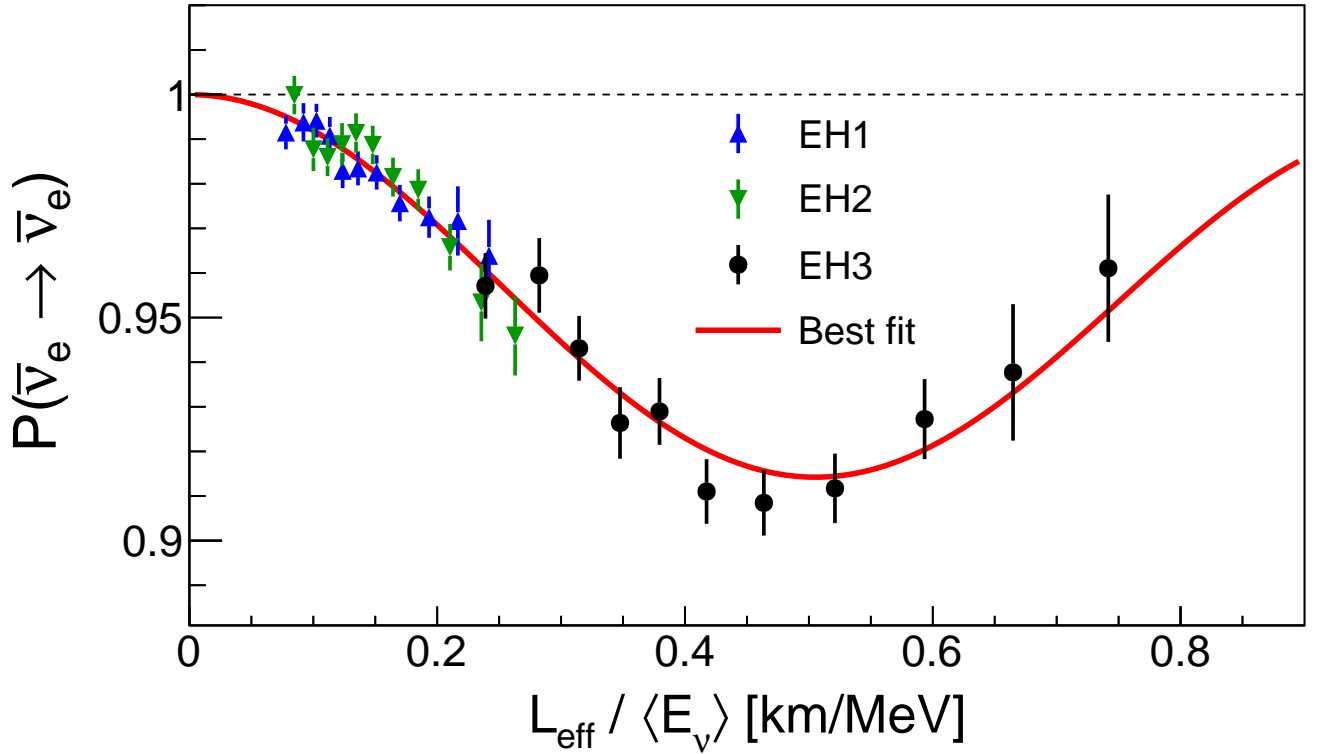


Рисунок 1.3 — Вероятность выживания электронных антинейтрино как функция L/E (длина пути нейтрино/энергия нейтрино). Точки с ошибками – результаты измерения коллаборации DayaBay. Красная кривая – теоретическое предсказание в гипотезе нейтринных осцилляций. Обозначения EH1, EH2 и EH3 относятся к данным, набранным в разных экспериментальных залах. Рис. взят из работы [35]

Нейтринные осцилляции оказались очень чувствительным инструментом для измерения разности квадратов масс нейтрино Δm_{ij}^2 и углов смешивания θ_{ij} . Осцилляции нейтрино надежно зарегистрированы экспериментально в большом количестве экспериментов с разными источниками нейтрино: ускорительными, реакторными, солнечными и атмосферными. На рис. 1.1, 1.2, 1.3 приведены вероятности выживания нейтрино как функция отношения L/E_ν , измеренные в экспериментах SuperKamioKande [19], KamLAND [20], DayaBay [36], чувствительных главным образом к осцилляциям нейтрино в вакууме, т.е. когда влиянием вещества можно пренебречь.

1.3.2 Осцилляции нейтрино в веществе

При прохождении нейтрино через обычное вещество возникает асимметрия между распространением электронного нейтрино и нейтрино других ароматов в силу того, что ν_e может рассеиваться на электронах среды, обмениваясь с ними W^+ и Z бозонами, в то время как ν_μ, ν_τ рассеиваются на электронах среды только за счет обмена Z бозоном.

Потенциальная энергия упругого $\nu_e e$ рассеяния, равная $\sqrt{2}G_F n_e \simeq (10^{-10} - 10^{-11})$ эВ в центре Солнца (здесь G_F – константа Ферми и n_e — плотность электронов), мала по сравнению с характерными энергиями солнечных нейтрино порядка нескольких МэВ. Однако, было бы невер-

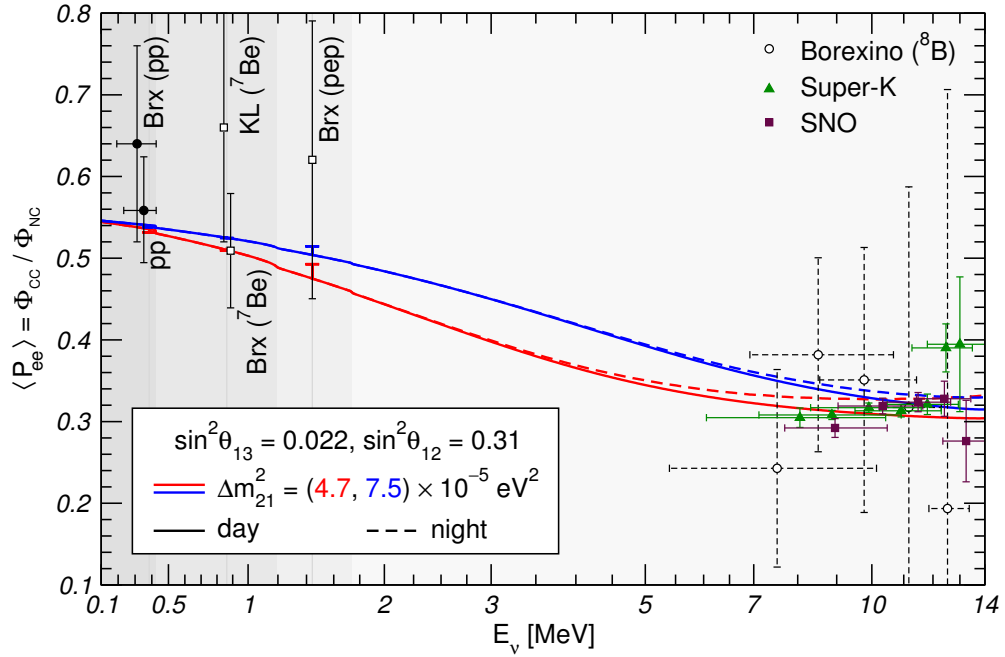


Рисунок 1.4 — Вероятность выживания солнечных электронных нейтрино как функция энергии нейтрино E . Точки с ошибками – экспериментальные данные. Линия с полосой неопределенности – теоретическое предсказание в гипотезе нейтринных осцилляций с учетом влияния вещества. Здесь Φ_{CC} – поток электронных нейтрино, Φ_{NC} – полный поток нейтрино. Символами $\text{Brx}()$ обозначена вероятность выживания соответствующего потока электронных нейтрино по результатам эксперимента Бorexино, $\text{KL} ({}^7\text{Be})$ — вероятность выживания потока электронных нейтрино из реакции ${}^7\text{Be}$ по результатам эксперимента KamLAND Рисунок взят из работы [37].

ным считать, что рассеяние на электронах не оказывает влияния на осцилляции нейтрино. Энергия взаимодействия оказывается того же порядка, что разность энергий $\Delta E_{ij} = \Delta m_{ij}^2 / 2E_\nu$, определяющая осцилляции нейтрино в вакууме, для Δm^2 порядка $(10^{-4} - 10^{-5}) \text{ эВ}^2$ и E_ν порядка нескольких МэВ. Таким образом, вещество может оказывать существенное влияние на картину осцилляций нейтрино. Качественно влияние вещества сводится к тому, что в среде углы смешивания и массы нейтрино отличаются от вакуумных и зависят от плотности числа электронов и энергии нейтрино. Соответственно, собственные состояния $\tilde{\nu}_i$ гамильтониана в веществе отличаются от вакуумных собственных состояний ν_i .

В этой связи уместно качественно обсудить теоретические ожидания для вероятности выживания солнечных электронных нейтрино. Нейтрино с энергией меньше 1 МэВ практически не чувствуют влияние вещества на осцилляции. Их прохождение определяется вакуумными осцилляциями. При детектировании потока нейтрино на Земле усреднение по длине пути (объем Солнца, изменение расстояния от Солнца до детектора и т.п.) уничтожает интерференционный член в формуле вероятности, что приводит к вероятности выживания электронного нейтрино $\langle P_{ee} \rangle = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta_{12}$, если пренебречь углом смешивания θ_{13} для простоты. При энергии порядка $(1.5 - 2)$ МэВ для нейтрино, рожденных в центре Солнца, проявляется так называемый резонанс Михеева-Смирнова-Вольфенштейна (МСВ) [38; 39], который приводит к осцилляциям на масштабе сотен км с максимальной амплитудой, что дает в итоге равное количество мюонных и электронных нейтрино или $\langle P_{ee} \rangle \simeq \frac{1}{2}$.

При этом для энергий нейтрино выше (6 – 8) МэВ влияние вещества оказывается настолько большим, что состояние электронного нейтрино в центре Солнца практически совпадает с собственным энергетическим состоянием нейтрино в веществе $\tilde{\nu}_2$ и остается в этом состоянии до самого выхода из Солнца, плавно превращаясь в вакуумное состояние ν_2 . Невозможность перехода в другое массовое состояние при движении в веществе с переменной плотностью обеспечивается условием адиабатичности $d\tilde{\theta}(t)/dt \ll \Delta\tilde{E}_{12}$, которое выполняется для всех энергий солнечных нейтрино с хорошей точностью. Попав в детектор на Земле, ν_2 взаимодействует с электроном с вероятностью пропорциональной $\sin^2 \theta_{12}$. Таким образом, в этом случае вероятность выживания составит $\langle P_{ee} \rangle = \sin^2 \theta_{12}$.

При промежуточных энергиях в интервале (2 – 6) МэВ проявляется комбинация двух эффектов – МСВ резонанса и адиабатической конверсии. При энергии порядка 2 МэВ МСВ резонанс еще играет заметную роль и $\langle P_{ee} \rangle \simeq \frac{1}{2}$ в этой области энергии. Увеличение энергии от 2 МэВ до $\simeq 6$ МэВ приводит ко все возрастающей роли адиабатической конверсии, плавно приводя к $\langle P_{ee} \rangle = \sin^2 \theta_{12}$.

Все обсуждаемые выше особенности представлены на рис. 1.4 в виде теоретической кривой, которая находится в хорошем согласии с экспериментальными результатами.

Вероятность выживания солнечных ν_e чувствительна к знаку Δm_{21}^2 . Из сравнения теории с экспериментом следует, что $\Delta m_{21}^2 > 0$, т.е. ν_2 тяжелее ν_1 . Сегодня не известно, что тяжелее ν_1 или ν_3 . В таб. 2 представлены текущие наиболее достоверные значения углов смешивания и разности квадратов масс нейтрино, полученные из глобального анализа данных [40] для двух возможных иерархий: нормальной иерархии (НИ, $m_3 > m_1$) и обратной иерархии (ОИ, $m_1 > m_3$).

Параметр	Значение
Δm_{21}^2	$(7.54_{-0.22}^{+0.26}) \times 10^{-5} \text{ эВ}^2$
Δm_{32}^2 (НИ)	$2.44 \pm 0.06 \text{ эВ}^2$
Δm_{32}^2 (ОИ)	$-2.51 \pm 0.06 \text{ эВ}^2$
$\sin^2 \theta_{12}$	0.304 ± 0.014
$\sin^2 \theta_{13}$	0.0219 ± 0.0012
$\sin^2 \theta_{23}$	0.51 ± 0.005
δ/π	$1.34_{-0.38}^{+0.64}$

Таблица 2 — Параметры осцилляций по результатам глобальной подгонки данных осцилляционных экспериментов в модели трех ароматов нейтрино из работы [40]. Приведены значения для нормальной (НИ) и обратной (ОИ) иерархии масс. Современные эксперименты не в состоянии различить иерархию масс, разница в значении χ^2 для нормальной и обратной иерархии составляет 0.3.

1.4 Число поколений нейтрино

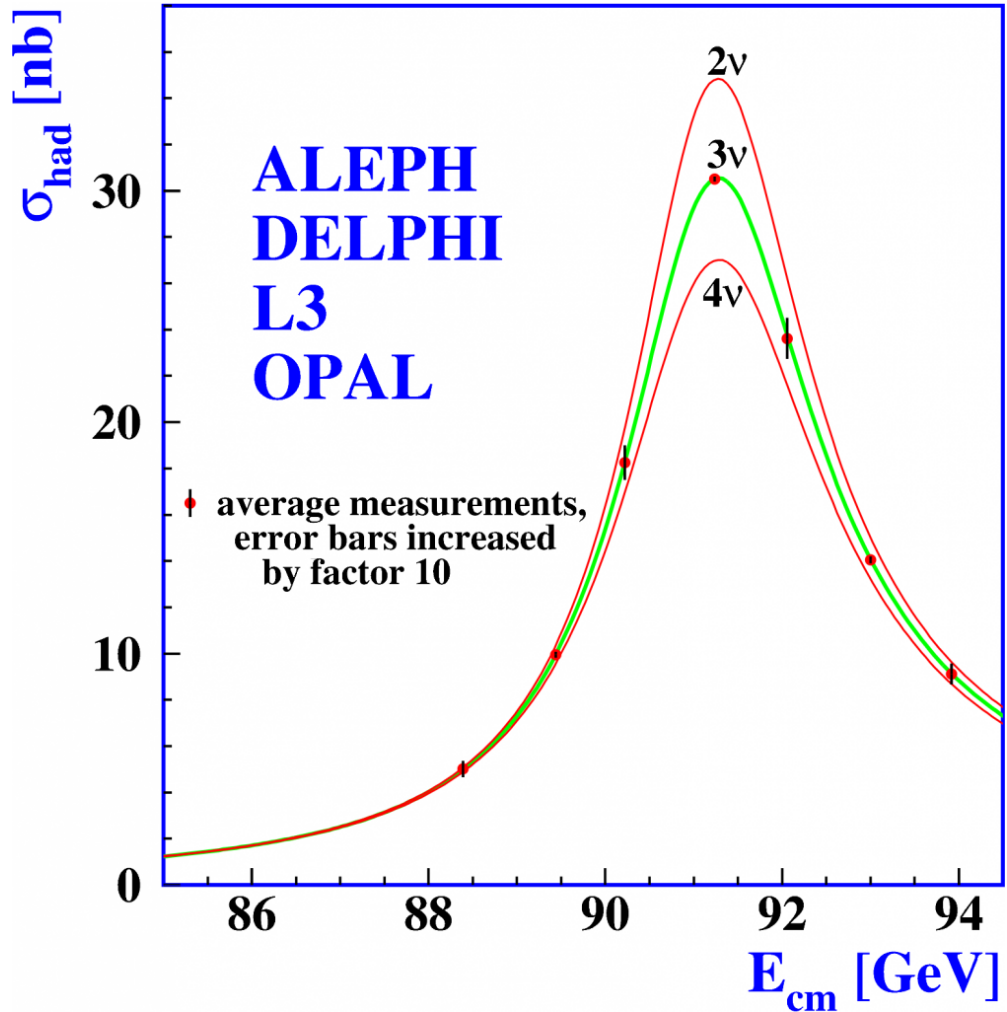


Рисунок 1.5 — Сечение взаимодействия $e^+e^- \rightarrow$ адроны как функция полной энергии сталкивающихся пары e^+e^- , измеренное в экспериментах ALEPH, DELPHI, L3, OPAL (точки с ошибками, увеличенные в 10 раз, чтобы их можно было различить) и теоретическое вычисление в рамках Стандартной Модели с числом поколений нейтрино равным 2, 3, 4. Рисунок взят из работы [41].

В СМ ширины распадов W^\pm и Z бозонов чувствительны к числу поколений лептонов. Три поколения лептонов обеспечивают порядка 30% и 20% от полной ширины W^\pm и Z бозонов соответственно. На рис. 1.5 приведено сечение взаимодействия $e^+e^- \rightarrow$ адроны как функция полной энергии сталкивающихся частиц, измеренное в экспериментах на LEP [41]. Экспериментальные наблюдения сравниваются с теоретическим вычислением в рамках СМ с числом поколений нейтрино равным 2, 3, 4. Наилучшее согласие данных с теорией наблюдается при числе поколений нейтрино равным $N_\nu = 2.984 \pm 0.008$, что согласуется с тремя поколениями. Существование слабо взаимодействующих частиц с квантовыми числами нейтрино и массой больше $m_Z/2$ не исключается из анализа распадов Z бозонов.

Коллаборация Planck опубликовала в 2015 году оценку эффективного релятивистского числа степеней свободы⁴ (за исключением фотонов) в плазме ранней Вселенной $N_\nu = 3.15 \pm 0.23$ [42], основанную на измерении анизотропии температуры и поляризации микроволнового фона и других астрофизических данных. Обычно это число связывают с числом типов нейтрино.

В этой связи уместно добавить, что в СМ можно ввести дополнительные нейтринные поля таким образом, что они не будут давать вклада в наблюдаемые ширины W^\pm и Z бозонов при условии малости масс этих полей по сравнению с массами векторных бозонов, однако они будут проявляться как релятивистские степени свободы в плазме ранней Вселенной. Также эти поля будут проявляться и в других процессах, таких как осцилляции нейтрино, и давать вклад в эффективные массы нейтрино в слабых распадах частиц. Эта возможность связана с так называемыми стерильными нейтрино, которые обсуждаются подробнее в разделе 2.4.

1.5 Масса нейтрино

Наблюдаемые осцилляции нейтрино говорят о том, что по крайней мере у двух из трех массовых состояний нейтрино масса не равна нулю, что позволяет установить нижние границы на массы нейтрино. Из данных таблицы 2 можно утверждать, что самое тяжелое нейтрино должно быть по крайней мере массивнее $\sqrt{|\Delta m_{13}^2|} \simeq 0.05$ эВ, а следующее по массе нейтрино тяжелее, чем $\sqrt{|\Delta m_{21}^2|} \simeq 0.009$ эВ. Однако, осцилляции нейтрино не дают информации о верхней границе возможных значений массы нейтрино. Ряд наблюдаемых величин чувствителен к масштабу масс нейтрино. Максимально возможная энергия продуктов β -распада зависит от эффективной массы нейтрино

$$m_{\nu_\alpha}^2 = \sum_i |V_{\alpha i}|^2 m_i^2, \quad (\alpha = e, \mu, \tau). \quad (1.18)$$

Эксперимент в Троицке поставил наилучшее ограничение на m_{ν_e} , следующее из анализа данных по распаду трития ${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}_e$ [43]:

$$m_{\nu_e} < 2.05 \text{ эВ (95\% У.Д.)}. \quad (1.19)$$

Из распадов пиона $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ следует более слабое ограничение на массу мюонного нейтрино [44]:

$$m_{\nu_\mu} < 170 \text{ кэВ (90\% У.Д.)}. \quad (1.20)$$

Из кинематического анализа распада τ лептона с тремя или пятью заряженными пионами в конечном состоянии следует еще менее строгое ограничение на массу таонного нейтрино: [45]:

$$m_{\nu_\tau} < 18.2 \text{ МэВ (95\% У.Д.)}. \quad (1.21)$$

Наиболее сильные ограничения на массу нейтрино следуют из космологии. Модели Большого Взрыва предсказывают постоянное отношение плотности числа нейтрино к плотности числа фотонов во Вселенной. Если бы нейтрино имело массу, например, 50 эВ, то полная плотность

⁴Из термодинамического рассмотрения плазмы ранней Вселенной следует, что эффективное релятивистское число степеней свободы нейтрино не обязано быть целым числом.

энергии во Вселенной превысила бы критическую, что привело бы к ее коллапсу. Поэтому, измерение плотности энергии Вселенной, совместно с анализом космологических и астрофизических данных, является чувствительным инструментом для ограничения суммы масс всех типов (легких) нейтрино. Например, анализ данных фотометрического каталога по более чем 700000 ярких красных галактик (MegaZ DR7) в комбинации с результатами 5 лет наблюдений WMAP, барионных акустических осцилляций, сверхновых, данных космического телескопа Хаббл дает [46]:

$$\sum_i m_i < 0.28 \text{ эВ (95\% У.Д.)}.$$

В 2015 коллаборацией Planck, в комбинации с другими космологическими наблюдениями, получен еще более сильный предел [42]:

$$\sum_i m_i < 0.23 \text{ эВ (95\% У.Д.)}.$$

Любопытным, хотя тоже модельно зависимым результатом, является оценка [47]:

$$\sum_i m_i = 0.320 \pm 0.081 \text{ эВ},$$

основанная на попытке объяснить несогласованность между космологическими параметрами, получаемыми по двум наборам данных:

- анизотропии микроволнового фона (Planck, WMAP) и барионным акустическим осцилляциям;
- из подсчета кластеров галактик с использованием эффекта Сюняева-Зельдовича, а также из данных по гравитационному линзированию.

Если нейтрино является частицей Майорана, эффективная масса нейтрино может быть рассчитана на основе времени жизни изотопов, для которых возможен двойной безнейтринный бета распад.

По состоянию на 2015 год наиболее сильное ограничение получено коллаборацией KamLAND-Zen [48] в комбинации с результатом EXO-200 [49] по измерению времени жизни изотопа ^{136}Xe : $T_{1/2}^{0\nu} > 3.4 \times 10^{25}$ (90% У.Д.) лет, что соответствует ограничению на эффективную массу нейтрино $\langle m_{\beta\beta} \rangle < (0.120 - 0.250)$ эВ. Интервал верхних ограничений на $\langle m_{\beta\beta} \rangle$ связан с неопределенностями теоретических вычислений ядерных матричных элементов.

С учетом ограничений на массу нейтрино снизу (из нейтринных осцилляций) и сверху (из прямых ограничений и космологических данных), заключаем, что массы самого тяжелого и следующего за ним массе нейтрино ограничены в довольно узких интервалах.

Обратим внимание также на то, что матрицы смешивания нейтрино и кварков довольно сильно отличаются, что может свидетельствовать о том, что механизмы генерации массы нейтрино и кварков могут быть различны. Это, в свою очередь, может указывать на физику вне рамок СМ [50; 51].

1.6 Электромагнитные свойства нейтрино

Изучение электромагнитных свойств нейтрино позволяет исследовать напрямую многие фундаментальные аспекты физики частиц. На древесном уровне в СМ нейтрино обладает нулевым электрическим зарядом и нулевыми электрическим дипольным и магнитным моментами. Несмотря на это, у нейтрино за счет петлевых диаграмм возникают ненулевые электромагнитные форм-факторы, которые, впрочем, чрезвычайно малы в СМ из-за малости масс нейтрино. Именно поэтому наблюдение ненулевых значений данных величин свидетельствовало бы о новой физике за рамками СМ. Более того, электромагнитные свойства нейтрино могут быть использованы для того, чтобы отличить нейтрино Дирака от нейтрино Майорана. Дираковские нейтрино могут иметь ненулевые значения диагональных и недиагональных магнитных и электрических моментов. У майорановского нейтрино только недиагональные моменты могут принимать ненулевое значения. Подробное обсуждение электромагнитных свойств нейтрино можно найти в обзоре [52], далее мы ограничимся обсуждением только магнитного момента нейтрино.

Так как нейтрино с определенным ароматом представляют собой смесь массовых состояний, взаимодействие массового состояния нейтрино с электромагнитным полем характеризуется матрицей 3×3 дипольных магнитных моментов μ_{ij} . Для майорановских нейтрино матрица μ_{ij} антисимметрична и только переходные недиагональные моменты могут быть отличны от нуля.

Магнитный момент дираковского нейтрино в СМ пропорционален массе нейтрино и представляет собой ничтожно малую величину, недоступную экспериментальным измерениям в лаборатории:

$$\mu_\nu = \frac{3eG_F}{8\pi^2\sqrt{2}}m_\nu \simeq 3.2 \times 10^{-19} \left(\frac{m_\nu}{1\text{эВ}} \right) \mu_B,$$

где μ_B – магнетон Бора, e – заряд электрона, G_F – константа Ферми.

В различных расширениях СМ магнитный момент нейтрино ожидается в пределах $\mu_\nu = (10^{-11} - 10^{-12})\mu_B$ для нейтрино Майорана и $\mu_\nu < 10^{-14}\mu_B$ для нейтрино Дирака. Экспериментальное наблюдение магнитного момента нейтрино со значением $\mu_\nu > 10^{-14}\mu_B$ означало бы обнаружение новой физики, выходящей за рамки СМ, а также свидетельствовало бы о том, что нейтрино является частицей Майорана. Область значений магнитного момента $\mu_\nu \simeq (10^{-11} - 10^{-10})\mu_B$ исторически была интересна как возможное объяснение проблемы дефицита солнечных нейтрино за счет спин-ароматовой прецессии в магнитном поле Солнца.

Ненулевой магнитный момент нейтрино имел бы также заметное значение в астрофизике, так как представлял бы астрофизическим телам дополнительную возможность для охлаждения. Лучшие пределы на магнитный момент нейтрино из астрофизических соображений $\mu_\nu < 3 \times 10^{-12}\mu_B$ (90% У.Д.) были получены Раффельтом [53] и недавно улучшены в работе [54] до значения $\mu_\nu < 2.2 \times 10^{-12}\mu_B$ (90% У.Д.). Поскольку астрофизические пределы в заметной степени являются модельно-зависимыми, это мотивирует экспериментаторов на прямой поиск магнитного момента нейтрино.

Наиболее чувствительной реакцией, с точки зрения поиска вклада ненулевого магнитного момента нейтрино, является реакция упругого рассеяния (анти)нейтрино на электронах. Элек-

трослабое сечение в СМ слабо зависит от кинетической энергии (T_e) рассеянного электрона, в то время как электромагнитное сечение, пропорциональное квадрату магнитного момента нейтрино, имеет зависимость вида $1/T_e$. На рис. 1.6 приведены оба сечения как функция кинетической энергии рассеянного электрона T_e . Видно, что для значений магнитного момента порядка $(1 - 6) \cdot 10^{-11} \mu_B$, электромагнитное сечение превышает электрослабое вплоть до энергий $T_e \simeq (3 - 100)$ кэВ, соответственно. Следует отметить вклад отечественных ученых в изучение

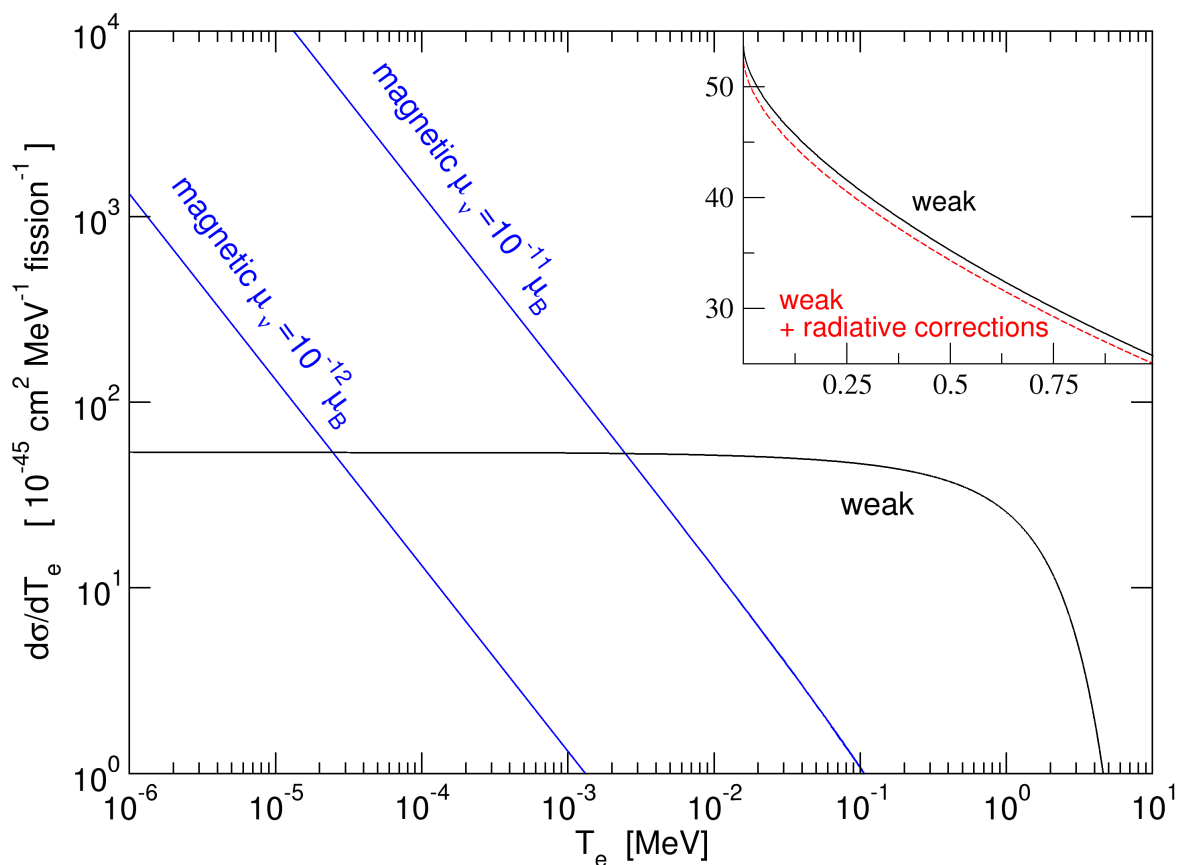


Рисунок 1.6 — Электрослабое $d\sigma_W/dT$ и электромагнитное $d\sigma_{EM}/dT$ (для разных значений магнитного момента нейтрино) сечения взаимодействия $\nu_e e$, усредненные по спектру антинейтрино от делений ядра ^{235}U , как функции кинетической энергии рассеянного электрона. Рис. взят из работы [55].

магнитного момента нейтрино на ядерных реакторах: долгое время лучшим ограничением на магнитный момент нейтрино был результат

$$\mu_{\bar{\nu}_e} \leq 1.9 \cdot 10^{-10} \mu_B \text{ (95\% У.Д.)},$$

полученный в 1993 году на Ровенской атомной станции с 75 кг кремниевым детектором, разработанным в Ленинградском институте ядерной физики [56]. Этот результат был незначительно улучшен только через 10 лет по итогам экспериментов TEXONO [57]:

$$\mu_{\bar{\nu}_e} \leq 1.3 \cdot 10^{-10} \mu_B \text{ (90\% У.Д.)}$$

и MUNU [58]:

$$\mu_{\bar{\nu}_e} \leq 9 \cdot 10^{-11} \mu_B \text{ (90\% У.Д.)}$$

Чувствительность измерений с течением времени улучшалась, соответственно ставились все более сильные ограничения на магнитный момент нейтрино: от $\mu_{\bar{\nu}_e} \leq 10^{-9} \mu_B$ в работе Райнеса и Коуэна 1957 года [11] до современного наиболее сильного ограничения

$$\mu_{\bar{\nu}_e} \leq 2.9 \times 10^{-11} \mu_B \text{ (90\% У.Д.)} \quad (1.22)$$

из эксперимента GEMMA, проводимом совместно ОИЯИ и ИТЭФ на Калининской атомной станции [59]. В последнем случае предел получен путем сравнения спектров, полученных при включенном и выключенном реакторе. В качестве детектора используется германиевый спектрометр массой 1.5 кг, размещенный на расстоянии 13.9 метров от 3 ГВт реактора, где поток нейтрино составляет $2.7 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$.

Лучшее ограничение на эффективный магнитный момент солнечных нейтрино получено из анализа данных эксперимента Borexino [60] и составляет $\mu_{\nu}^{\odot} \leq 5.4 \times 10^{-11} \mu_B$. Поскольку регистрируемый детектором Borexino поток нейтрино является смесью ароматов, то из μ_{ν}^{\odot} можно рассчитать ограничения на магнитный момент состояний нейтрино с определенным ароматом, используя осцилляционные параметры. Пределы составляют соответственно:

$$\mu_{\nu_e} < 7.3 \times 10^{-11} \mu_B$$

и

$$\mu_{\nu_{\mu}}, \mu_{\nu_{\tau}} < 11.4 \times 10^{-11} \mu_B$$

(все для 90% У.Д.) [61]. Эти результаты следует сравнить с непосредственными измерениями в эксперименте GEMMA (см. ур. (1.22)), в ускорительном эксперименте LSND, в котором получено ограничение для магнитного момента мюонного нейтрино [62]:

$$\mu_{\nu_{\mu}} < 68 \times 10^{-11} \mu_B \text{ (90\% У.Д.)},$$

и в ускорительном эксперименте DONUT для тау нейтрино [63]:

$$\mu_{\nu_{\tau}} < 39000 \times 10^{-11} \mu_B \text{ (90\% У.Д.)}$$

1.7 Заключение к главе

Начинается глава с краткого изложения истории открытия нейтрино: от кажущегося нарушения энергии в слабых распадах ядер, азотной катастрофы, гениальной догадки Паули о существовании нейтрино до первых открытий нейтрино и антинейтрино

– $\bar{\nu}_e$ – Ф. Райнесом и К. Коуэном;

- ν_μ – Л. Ледерманом, М. Шварцем и Дж. Штейнбергером;
- ν_τ – коллаборацией DONUT.

Далее, мы кратко излагаем основы СМ, включая лагранжиан до и после спонтанного нарушения симметрии. Важной частью лагранжиана СМ являются члены, отвечающие юкавскому взаимодействию, в которых лево-киральные $SU(2)$ дублеты взаимодействуют с право-киральными синглетными полями и полем Хиггса. В результате диагонализации этих, в общем недиагональных членов взаимодействия, появляются унитарные матрицы смешивания: Кабиббо-Кобаяши-Маскава (ККМ) для кварков и Понтекорво-Маки-Накагава-Саката (ПМНС) для лептонов, определяющие интенсивность взаимодействий полей из разных дублетов с заряженными W^\pm бозонами.

Важнейшим следствием существования таких недиагональных матриц смешивания является богатая теоретическими и экспериментальными исследования флэйворная физика или физика ароматов. Важным примером такой физики оказываются *нейтринные осцилляции*, исследованию которых с теоретической и экспериментальной стороны посвящены части II, III настоящей диссертации.

Далее мы на качественном уровне обсуждаем эффекты нейтринных осцилляций в вакууме и веществе, иллюстрируя их экспериментальным материалом.

Затем мы обсуждаем вопрос о числе поколений нейтрино – какие экспериментальные измерения чувствительны к этой величине. Несмотря на то, что данные экспериментов на LEP и результаты анализа космологических наблюдений согласуются с тремя поколениями нейтрино, мы оставляем возможность существования *стерильного* нейтрино, которую мы обсуждаем в главе 2.

Вопрос о существующих ограничениях на массу нейтрино обсуждается в следующем разделе. Прямые измерения в лаборатории и космологические данные позволяют ограничить массу нейтрино сверху. Обнаружение нейтринных осцилляций и измерение соответствующих значений Δm_{21}^2 , Δm_{31}^2 позволяют установить границу на массу нейтрино снизу. Таким образом, оказывается, что масса нейтрино ограничена снизу и сверху в достаточно узком диапазоне.

Наконец, мы завершаем обзор известных свойств нейтрино обсуждением существующих ограничений на их магнитные моменты.

Глава 2. Нейтрино. Что мы хотим узнать об этой частице?

Несмотря на более чем полувековую историю изучения свойств нейтрино, есть еще ряд вопросов, на которые пока нет ответа. На сегодня неизвестна масса самого легкого нейтрино, иерархия масс нейтрино. Не измерена фаза δ , ответственная за нарушение CP-четности, не известен знак $\cos 2\theta_{23}$ (или октант, в котором лежит угол θ_{23}), что важно для измерения иерархии масс нейтрино. Остается открытым вопрос о том, является ли нейтрино частицей Дирака или Майорана. По-прежнему открыт вопрос о существовании стерильного нейтрино. Есть ли у нейтрино “нестандартные” свойства? Каковы источники астрофизических нейтрино открытых в эксперименте IceCube? Несомненно, “нобелевской темой” является вопрос о детектировании реликтовых нейтрино. Эти и некоторые другие вопросы находятся сегодня на переднем крае исследований.

Помимо изучения физических свойств нейтрино в специализированных экспериментах, в последнее время на первый план выходит использование нейтрино в смежных областях наук, в частности для изучения химического состава Земли. В этой связи в последнее десятилетие активно формируется новая область науки – нейтринная геофизика. Ожидается, что новое поколение нейтринных телескопов, кроме решения своих основных задач (обнаружение источников, исследование иерархии масс и т.д.), сможет осуществлять “нейтринную томографию” Земли с помощью атмосферных нейтрино, что будет совершенно новым шагом в нашем понимании структуры Земли.

Эксперименты по поиску солнечных нейтрино в последнее десятилетие также перенесли фокус с изучения свойств нейтрино на исследование с их помощью процессов, протекающих внутри Солнца, и его химического состава.

Таким образом, можно утверждать, что нейтрино становятся чувствительным инструментом исследования с большим потенциалом.

2.1 Прямые измерения массы нейтрино

Заметная экспериментальная активность в области физики нейтрино в прошлом и в настоящем связана с попытками прямых измерений массы нейтрино. Метод таких измерений основан на кинематическом анализе реакций с участием нейтрино. Например, в распаде нейтрона $n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e$ максимально возможная энергия конечного электрона будет тем меньше, чем больше масса антинейтрино. Таким образом, точно измерив высокоэнергетическую часть β -спектра, можно либо измерить массу (анти)нейтрино, либо поставить на нее ограничение.

Этот метод был предложен Перреном [64] и Ферми [65] практически сразу после появления теории β -распада Ферми. В 1939 Альварес и Корног [66] установили, что тритий является радиоактивным изотопом с малым значением энергии распада $Q = 18.6$ кэВ, что обеспечивает относительно большое влияние массы нейтрино на форму β -спектра. Дополнительная привлекательность использования трития для экспериментаторов состоит в простоте расчетов атомных эф-

фектов. Первые эксперименты с тритием по измерению массы нейтрино кинематическим методом были сделаны в 1949 г. Ханна и Понтекорво [67], а также Курраном, Энджусом и Кокрофтом [68]. Уже в этих экспериментах было установлено, что масса нейтрино очень мала, по крайней мере в тысячу раз меньше массы электрона.

Энергетический спектр электронов в распаде $(A, Z) \rightarrow (A, Z + 1) + e^- + \bar{\nu}_e$ определяется некогерентной суммой парциальных ширин распадов на массивные антинейтрино:

$$\frac{d\Gamma}{dT} = \sum_k |V_{ek}|^2 \frac{d\Gamma_k}{dT}, \quad (2.1)$$

$$\frac{d\Gamma_k}{dT} = \frac{(G_F \cos \theta_C)^2}{2\pi^3} p p_k (T + m_e) (Q - T) |\mathcal{M}|^2 F(T) \theta(Q - T - m_k), \quad (2.2)$$

где θ_C – угол Кабиббо, m_e – масса, p – модуль импульса и T – кинетическая энергия электрона, $p_k = \sqrt{E_k^2 - m_k^2} = \sqrt{(Q - T)^2 - m_k^2}$ – импульс нейтрино, Q – энергия выделенная в распаде (конечная точка β спектра в случае нулевой массы нейтрино), \mathcal{M} – ядерный матричный элемент и $F(T)$ – функция Ферми, описывающая кулоновское взаимодействие конечных частиц. θ -функция учитывает, что нейтринное состояние ν_k рождается, только если полная энергия больше массы нейтрино: $E_k = Q - T \geq m_k$.

Как видно из (2.1), наибольшее искажение β -спектра из-за массы нейтрино может быть обнаружено в области

$$Q - T \sim m_k. \quad (2.3)$$

Однако, для $\max(m_k) \simeq 1$ эВ только очень маленькая часть (около 10^{-13}) от всех распадов даёт вклад в область (2.3). Поэтому при анализе результатов используется малая часть β -спектра. Например, в тритиевом эксперименте в Майнце [69] использовалась область шириной 70 эВ в конце спектра. Используя унитарность матрицы смешивания и предположив $\max(m_k^2) \ll 4(Q - T)^2$, можно получить:

$$\sum_k |V_{ek}|^2 p_k \approx \sum_k |V_{ek}|^2 (Q - T) \left[1 - \frac{m_k^2}{2(Q - T)^2} \right] \approx \sqrt{(Q - T)^2 - m_\beta^2},$$

где эффективная масса нейтрино m_β определена как $m_\beta^2 = \sum_k |V_{ek}|^2 m_k^2$. В результате можно выразить ширину распада нейтрона через эффективную массу нейтрино m_β , на которую и устанавливается экспериментальный предел:

$$\frac{d\Gamma}{dT} \propto p(T + m_e) |\mathcal{M}|^2 F(T) K^2(T), \text{ где } K(T) \approx (Q - T) \left[1 - \frac{m_\beta^2}{(Q - T)^2} \right]^{1/4}.$$

Диаграмма Кюри (см. рис. 2.1 слева) для разрешенных процессов – чувствительный тест эффективной массы нейтрино m_β .

На рис. 2.1 справа приведены опубликованные результаты о величине m_β^2 , полученные из тритиевых распадов, начиная с 1990. Эксперименты в Лос Аламосе, Цюрихе, Токио, Пекине и Ливерморе использовали магнитные спектрометры, а эксперименты в Троицке и Майнце использовали электростатические фильтры с магнитным адиабатическим коллиматором. Наиболее точный результат на сегодня получен из анализа данных троичского эксперимента [43]:

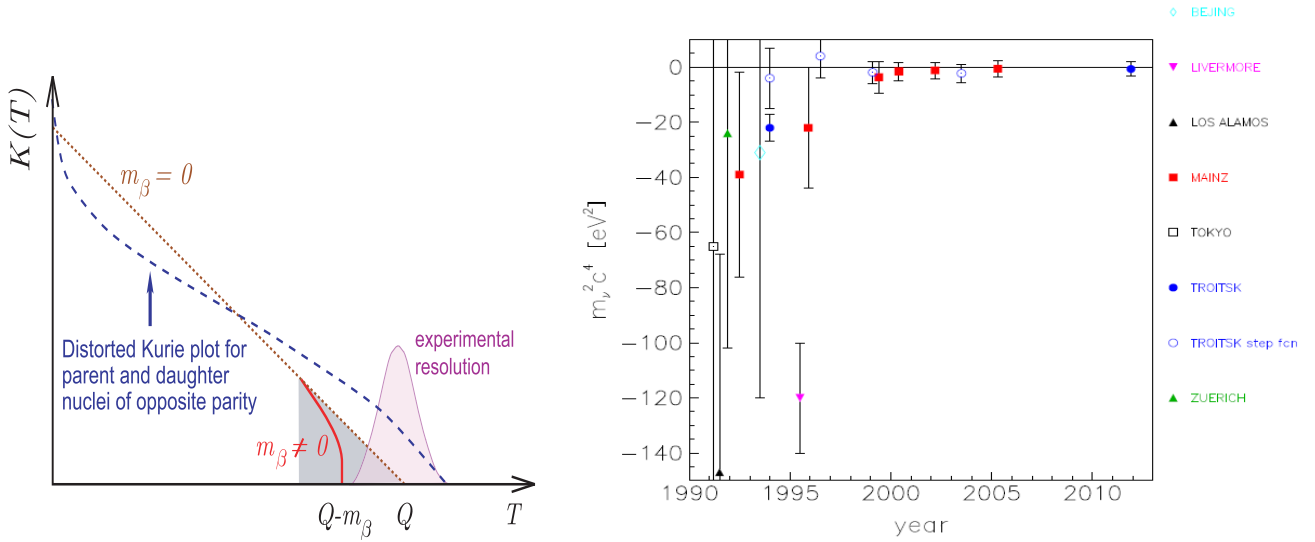


Рисунок 2.1 — На рисунке слева представлена функция $K(T)$ для $m_\beta = 0$ и $m_\beta \neq 0$. Хорошо видно искажение формы распределения в конце спектра. Также показано характерное экспериментальное разрешение. Реальная форма спектра искажается еще больше из-за ядерных эффектов и учета взаимодействия вылетевшего электрона с частицами вещества в экспериментальной установке. На рисунке справа (рисунок из обзора [70]) приведено измеренное значение эффективной массы нейтрино m_ν^2 в зависимости от года публикации.

$m_\beta^2 = (-0.67 \pm 1.89_{\text{стат}} \pm 1.68_{\text{сист}})$ эВ², откуда следует предел: $m_{\nu_e} < 2.2$ эВ для 95% У.Д., группа из Майнца [69] ранее установила сравнимый предел $m_{\nu_e} < 2.4$ эВ для 95% У.Д. Следует отметить, что значение верхнего предела на массу варьируется в зависимости от статистической методики. Так, анализ троицких данных с привлечением метода Фельдмана-Казинса дает чуть более сильный предел: $m_{\nu_e} < 2.05$ эВ для 95% У.Д. [43].

Экспериментом следующего поколения с чувствительностью к массе нейтрино на уровне 0.2 эВ является детектор KATRIN [71]. При этом, если масса нейтрино окажется заметно отличной от нуля, возможно и достаточно точное измерение массы: точность измерения составит 5σ при $m_\nu = 0.35$ эВ, или 3σ при $m_\nu = 0.3$ эВ. Спектрометр детектора полностью смонтирован, к лету 2016 будет установлен источник и транспортная секция, тогда же начнутся тестовые запуски при малой плотности. Начало набора данных запланировано на 2017 год.

2.2 Иерархия масс и нарушение CP инвариантности.

Иерархия масс нейтрино. Кратко обсудим возможные перспективы определения иерархии масс в разных подходах. Иногда в литературе можно встретить утверждение, что иерархия масс нейтрино – это всего лишь знак Δm_{31}^2 , что только отчасти правильно. Более корректно утверждать, что при разных иерархиях масс нейтрино меняется и знак, и абсолютное значение величины Δm_{31}^2 .

Обозначим верхним индексом (Н,О) массы нейтрино для нормальной $m_1^H < m_2^H < m_3^H$ и обратной $m_3^O < m_1^O < m_2^O$ иерархий. Таким образом, имеем два набора параметров Δm_{ij}^2 :

$\Delta m_{21}^{2,H}, \Delta m_{31}^{2,H}, \Delta m_{32}^{2,H}$ и $\Delta m_{21}^{2,O}, \Delta m_{31}^{2,O}, \Delta m_{32}^{2,O}$. Только две разницы квадратов масс Δm_{ij}^2 линейно независимы, поскольку:

$$\Delta m_{31}^2 = \Delta m_{32}^2 + \Delta m_{21}^2. \quad (2.4)$$

Иерархия масс определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{НИ: } \Delta m_{31}^2 &\geq 0, \Delta m_{32}^2 \geq 0, \quad |\Delta m_{31}^2| = |\Delta m_{32}^2| + \Delta m_{21}^2 \\ \text{ОИ: } \Delta m_{31}^2 &\leq 0, \Delta m_{32}^2 \leq 0, \quad |\Delta m_{31}^2| = |\Delta m_{32}^2| - \Delta m_{21}^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Вероятность вакуумных осцилляций зависит от упорядоченности масс нейтрино. Например, вероятность выживания электронного нейтрино P_{ee} есть:

$$1 - P_{ee} = \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \Delta_{21} + \sin^2 2\theta_{13} (\cos^2 \theta_{12} \sin^2 \Delta_{31} + \sin^2 \theta_{12} \sin^2 \Delta_{32}), \quad (2.6)$$

где $\Delta_{ij} \equiv \Delta m_{ij}^2 L / 4E_\nu$.

Разное упорядочивание масс нейтрино приводит к разной величине вероятности выживания:

$$P_{ee}^H - P_{ee}^O = -\sin^2 2\theta_{13} (\cos^2 \theta_{12} [\sin^2 \Delta_{31}^H - \sin^2 \Delta_{31}^O] + \sin^2 \theta_{12} [\sin^2 \Delta_{32}^H - \sin^2 \Delta_{32}^O]) \quad (2.7)$$

Из ур. (2.7) следует, что если бы иерархия масс определялась только знаком $\Delta m_{31}^2, \Delta m_{32}^2$, то разница $P_{ee}^H - P_{ee}^O$ была бы тождественно равна нулю. Поскольку, на самом деле, знак и величина $\Delta m_{31}^2, \Delta m_{32}^2$ меняются при изменении иерархии, то в общем случае, $P_{ee}^H - P_{ee}^O \neq 0$. Это наблюдение является ключевым в определении иерархии в экспериментах с реакторными антинейтрино. Оптимальным расстоянием детектора от реактора для повышения чувствительности к определению иерархии масс оказывается база 52 – 53 км [72].

Два эксперимента JUNO [73] и RENO-50 [74] планируют измерить иерархию масс нейтрино при помощи реакторных антинейтрино. Эксперимент JUNO, в котором активное участие принимают физики ОИЯИ, будет использовать жидкосцинтилляционный детектор массой 20 килотонн, просматриваемый изнутри двумя десятками тысяч ФЭУ. Спектр антинейтрино от реакторов модулируется нейтринными осцилляциями с частотами, задаваемыми $\Delta m_{21}^2 L / E_\nu$ и $\Delta m_{31}^2 L / E_\nu$, и будет зависеть от иерархии масс нейтрино. Измерение иерархии масс возможно только при хорошем энергетическом разрешении детектора, не хуже 3% при 1 МэВ выделенной энергии. В коллаборации JUNO считают возможным достичь требуемого энергетического разрешения.

Эксперименты с ускорительными нейтрино NOvA [75] (набирает данные) и DUNE (в стадии подготовки)¹ [76] используют осцилляции нейтрино и антинейтрино в веществе для определения иерархии масс нейтрино. В этих экспериментах наблюдают появление электронных (анти)нейтрино в пучке мюонных (анти)нейтрино на большом расстоянии от источника. Так как основной путь нейтрино проходит через Землю, вероятность перехода нейтрино определённых энергий модифицируется за счет влияния вещества. На качественном уровне эффект вещества можно представить себе следующим образом. Электронное нейтрино в веществе становится “тяжелее” и на выходе из вещества с более высокой вероятностью окажется в состоянии ν_τ для нормальной иерархии масс или в состоянии ν_μ для обратной иерархии.

¹ранее LBNE

Соответствующие переходы из состояний нейтрино с определенным ароматом в начальном состоянии ν_α в собственные состояния в веществе ν_i^m и, далее в состояния с определенным ароматом в конечном состоянии ν_β приведены в таб. 3. В итоге, благодаря влиянию вещества, веро-

нормальная иерархия	обратная иерархия
$\nu_e \rightarrow \nu_3^m \rightarrow \nu_\tau$	$\nu_e \rightarrow \nu_2^m \rightarrow \nu_\mu$
$\nu_\tau \rightarrow \nu_2^m \rightarrow \nu_\mu$	$\nu_\mu \rightarrow \nu_1^m \rightarrow \nu_\tau$
$\nu_\mu \rightarrow \nu_1^m \rightarrow \nu_e$	$\nu_\tau \rightarrow \nu_3^m \rightarrow \nu_e$

Таблица 3 — Схематическая цепочка переходов между состояниями определенного аромата через промежуточные собственные состояния в веществе ν_i^m для нормальной и обратной иерархии.

ятность осцилляций $P_{\mu e}$ усиливается для нормальной иерархии и подавляется для обратной, что приводит к разным отношениям регистрируемых чисел ν_μ и ν_e событий в эксперименте.

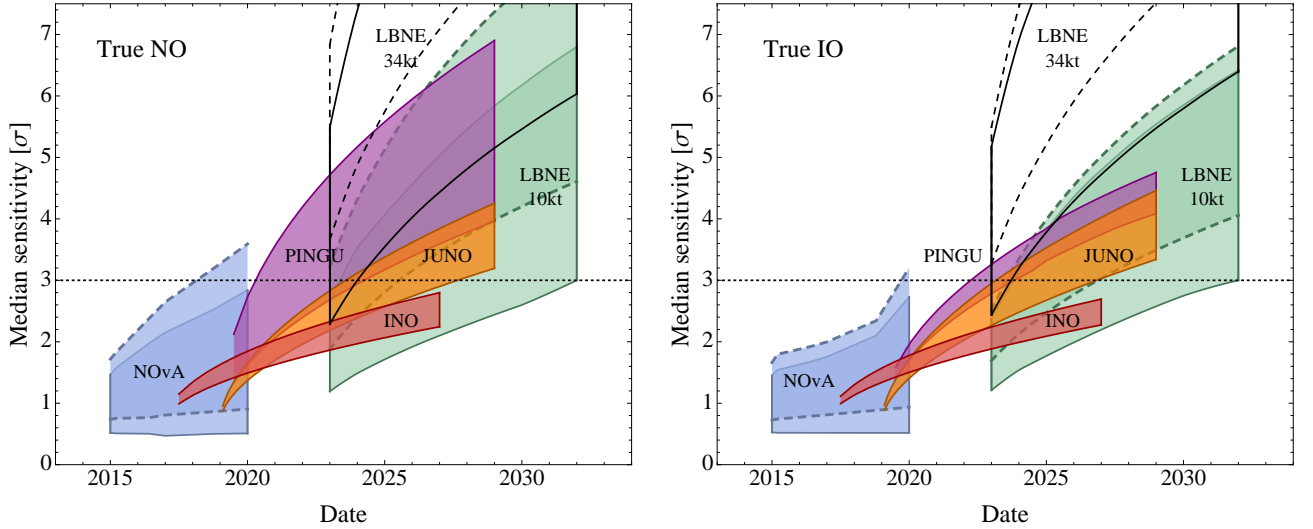
Модификация осцилляций нейтрино в веществе будет использоваться в экспериментах с атмосферными нейтрино, таких как PINGU [77] и ORCA [78], HyperKamiokaNDE [79], INO [80]. Поскольку в атмосфере рождаются как мюонные, так и электронные нейтрино и антинейтрино, такие эксперименты чувствительны сразу к четырём каналам осцилляций: $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$, $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$, $\nu_e \rightarrow \nu_e$, $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ как для нейтрино, так и для антинейтрино. Кроме того, данные эксперименты чувствительны к нейтрино, проходящим под разными углами, что соответствует различному пути, проходимому в Земле. В случае нормальной иерархии вероятность выживания атмосферных мюонных нейтрино, проходящих через Землю, имеет резонанс при энергии 5 ГэВ и зенитном угле $\cos \theta = -0.95$ по сравнению с выживанием мюонных антинейтрино. Остальные три канала имеют более ярко выраженные осцилляции для нейтрино по отношению к антинейтрино. В случае же обратной иерархии поведение меняется: антинейтрино будут иметь более ярко выраженные вероятности перехода чем нейтрино. Несмотря на то, что эксперименты с атмосферными нейтрино, как правило, не могут отличить нейтрино от антинейтрино, определение иерархии с их помощью возможно при учёте различий в потоке, сечении и кинематики (анти)нейтрино.

Космологические измерения также имеют чувствительность к иерархии масс нейтрино. В случае нормальной иерархии масс сумма $\sum_i m_i$ будет, в основном определяться самой большой массой m_3 , поскольку $|\Delta m_{31}^2| \gg \Delta m_{21}^2$ и $\sum_i m_i \simeq m_3 \geq 0.05$ эВ. Обратная иерархия подразумевает $m_3 \ll m_{1,2}$ и теперь сумма $\sum_i m_i \simeq (m_1 + m_2) \geq 0.1$ эВ. Требуется увеличение точности космологических измерений в 2 – 4 раза по сравнению с сегодняшним днем для достижения чувствительности к иерархии масс нейтрино. Ожидаемая точность данных следующего поколения каталогов скоплений и сверхскоплений галактик будет обладать достаточной чувствительностью к шкале масс нейтрино, что позволит исследовать обе иерархии масс нейтрино.

Величина эффективной массы нейтрино, получаемая из вероятности безнейтринного двойного бета распада $m_{\beta\beta}$, зависит от иерархии масс нейтрино, что более подробно обсуждается в разделе 2.3. Таким образом, поиск $0\nu\beta\beta$ распадов является дополнительным источником информации об иерархии масс нейтрино.

Оценка чувствительности некоторых экспериментов [81] представлена на рисунках 2.2а, 2.2б. Текущие и планируемые эксперименты по определению иерархии масс нейтрино

хорошо дополняют друг друга как в плане времени и чувствительности, так и в плане физических методов. Также очевидно, что достижение высокой статистической значимости будет довольно сложной задачей, особенно в случае, если в природе реализована обратная иерархия. Может оказаться, что для достоверного определения иерархии масс нейтрино потребуются совместный анализ данных нескольких экспериментов.



а) нормальная

б) обратная

Рисунок 2.2 — Сравнительная оценка чувствительности нейтринных экспериментов к определению иерархии масс нейтрино в зависимости от иерархии, реализуемой в природе [81]. Для экспериментов на большой базе области, выделенные сплошными (штрихованными) линиями, соответствуют значению $\theta_{23} = 40^\circ (50^\circ)$.

Нарушение CP инвариантности. Нарушение CP инвариантности проявляет себя как асимметрия осцилляций нейтрино и антинейтрино:

$$A_{CP} = \frac{P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) - P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e)}{P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) + P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e)}.$$

В трехнейтринной модели эта асимметрия может быть представлена в лидирующем порядке по Δm_{21}^2 как:

$$A_{CP} \sim \frac{\cos \theta_{23} \sin 2\theta_{12} \sin \delta}{\sin \theta_{23} \sin \theta_{13}} \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E_\nu} \right) + \text{эффекты вещества}. \quad (2.8)$$

Ненулевое значение угла смешивания θ_{13} открывает дорогу для измерения фазы δ , связанной с нарушением CP-четности в лептонном секторе. Из экспериментов, набирающих данные сегодня, только NOvA и T2K имеют некоторую чувствительность к нарушению CP инвариантности. На рис. 2.3 и рис. 2.4 приведены вероятности осцилляций $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ и $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ как функции энергии и длины пути распространения нейтрино для нормальной и обратной иерархий, соответственно. Видно, что точное измерение таких нейтринных осциллограмм позволит определить и иерархию масс нейтрино и параметр δ . Данному измерению будет посвящен эксперимент DUNE [82], который будет проводиться на базе 1300 км с двумя детекторами: ближним и дальним (временнo-проекционная камера с жидким аргоном). Первые результаты ожидаются в 2025-2030 годах.

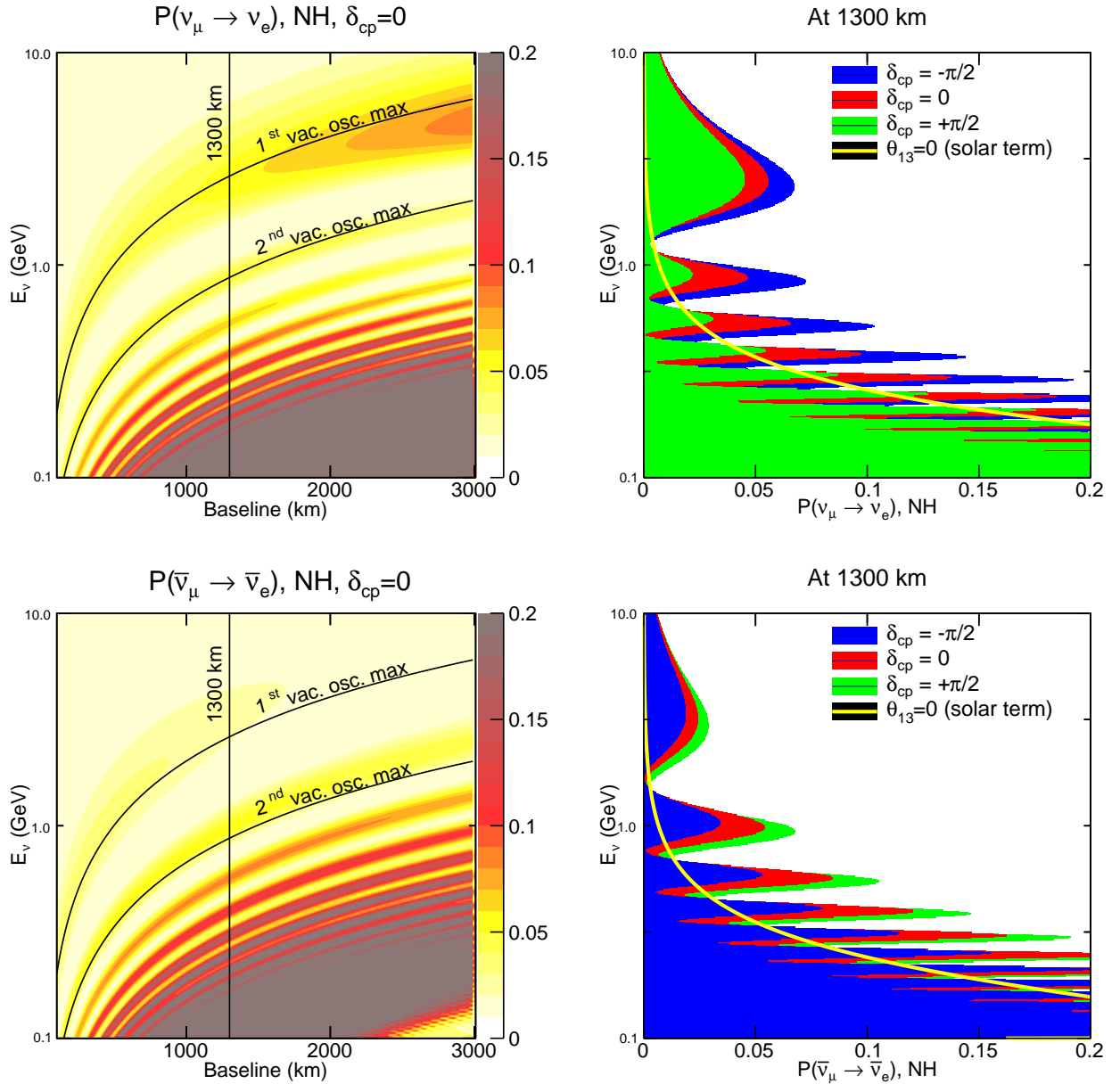


Рисунок 2.3 — Вероятность осцилляций $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ и $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ как функция энергии и длины пути распространения нейтрино для нормальной иерархии, предполагая $\delta = 0$ (левые рисунки). Вероятность осцилляций $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ и $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ как функция энергии для $L=1300$ км и трех значений δ ($-\pi/2, 0, \pi/2$). 1st vac. osc. max — первый максимум вакуумных осцилляций; 2nd vac. osc. max — второй максимум вакуумных осцилляций. Желтая линия соответствует вероятности появления электронных нейтрино только за счет смешивания ν_1 и ν_2 . Рисунки взяты из работы [82].

2.3 Безнейтринный двойной бета-распад

Идея “обычного” двойного бета-распада принадлежит Марии Гепперт-Майер. В 1935 году она первой рассмотрела процесс $(A, Z) \rightarrow (A, Z+2) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e$ [83], в котором помимо двух электронов испускаются два антинейтрино и лептонное число сохраняется ($\Delta L = 0$). Он представляет

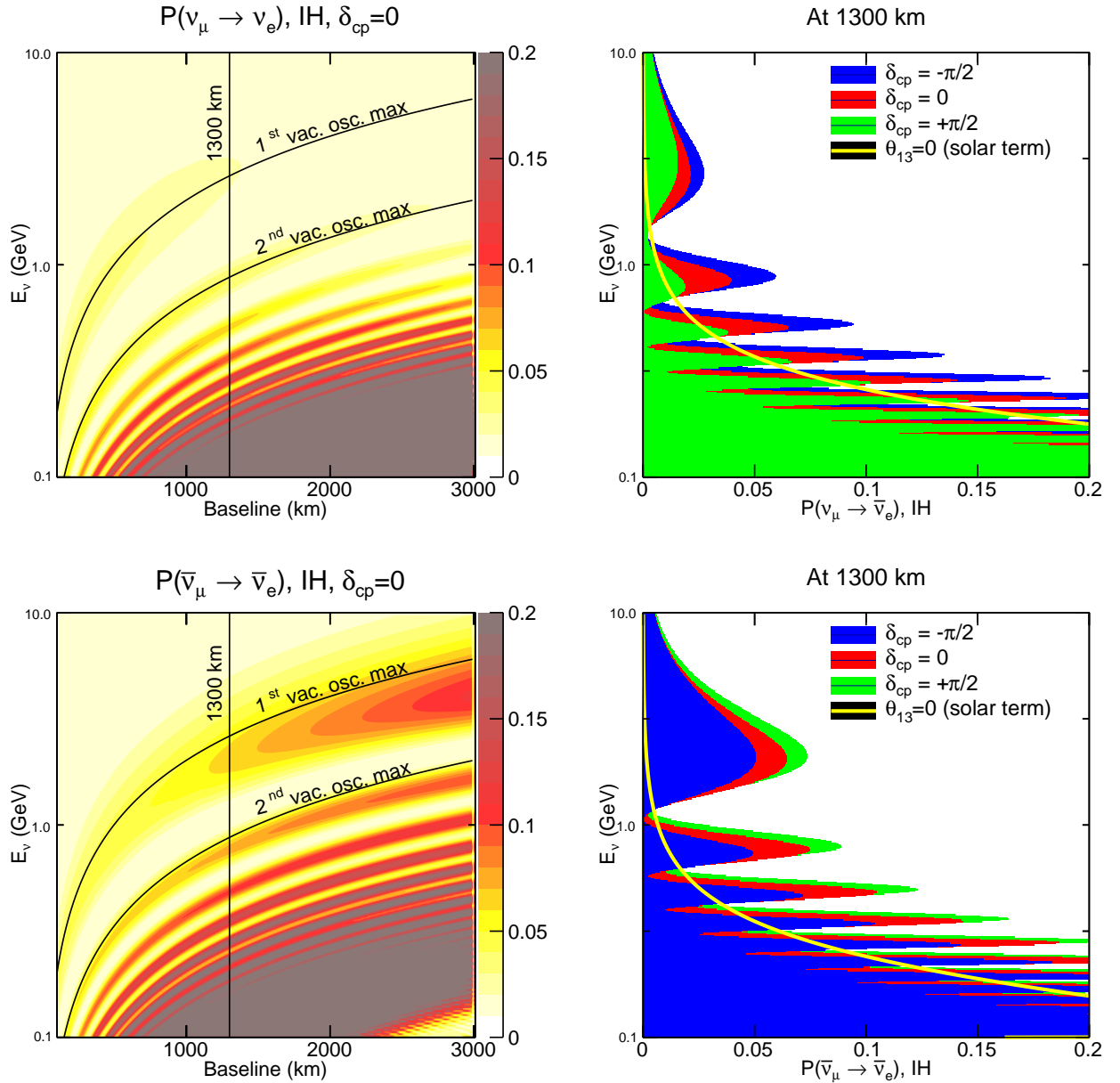


Рисунок 2.4 — Вероятность осцилляций $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ и $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ как функция энергии и длины пути распространения нейтрино для обратной иерархии, предполагая $\delta = 0$ (левые рисунки). Вероятность осцилляций $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ и $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ как функция энергии для $L=1300$ км и трех значений δ ($-\pi/2, 0, \pi/2$). 1st vac. osc. max — первый максимум вакуумных осцилляций; 2nd vac. osc. max — второй максимум вакуумных осцилляций. Желтая линия соответствует вероятности появления электронных нейтрино только за счет смешивания ν_1 и ν_2 . Рисунки взяты из работы [82].

собой два последовательных ядерных β -перехода с виртуальными промежуточными состояниями. Этот процесс разрешен в СМ независимо от природы нейтрино.

В 1937 Э.Майорана показал, что все результаты теории бета-распада не изменятся, если нейтрино является собственной античастицей (частица Майораны) [84]. В 1939 В.Фарри, основываясь на работе Майорана, показал, что если нейтрино является частицей Майораны, то возможен двойной бета-распад без испускания нейтрино (двойной безнейтринный бета-распад, $0\nu\beta\beta$): $(A, Z) \rightarrow (A, Z+2) + 2e^-$ [85].

Этот процесс является значительно более интересным, поскольку в нем происходит изменение лептонного числа на двойку ($\Delta L = 2$) – два электрона вылетают из ядра без испускания нейтрино. $0\nu\beta\beta$ -распад запрещен в СМ, если нейтрино – дираковский фермион.

Для осуществления $0\nu\beta\beta$ -распада необходимо, чтобы два нейтрона (одного и того же ядра) обменялись виртуальным нейтринным состоянием и при этом, чтобы нейтрино было тождественно антинейтрино, т.е. было майорановским фермионом. Это необходимое, но не достаточное условие для того, чтобы был возможен $0\nu\beta\beta$ -распад. Необходимо также, чтобы у нейтрино была ненулевая масса, поскольку в противном случае нейтрино, испущенное первым нейтроном, было бы правым спиральным состоянием, тогда как второй нейтрон может поглотить только левое спиральное нейтрино. Отличная от нуля масса майорановского нейтрино делает возможным распад $0\nu\beta\beta$ с амплитудой вероятности пропорциональной эффективной массе нейтрино:

$$A \propto m_{\beta\beta} = \sum_i V_{ei}^2 m_i.$$

“Меткой” $0\nu\beta\beta$ распада является моноэнергетический пик при энергии распада Q .

Один из наиболее чувствительных экспериментов, Heidelberg-Moscow, 10 лет проводил поиск $0\nu\beta\beta$ -распада ${}^{76}\text{Ge} \rightarrow {}^{76}\text{Se} + 2e^-$ на базе обогащенного изотопа ${}^{76}\text{Ge}$ ($Q_{\beta\beta} = (2039.061 \pm 0.007)$ кэВ).

В 2001 г. лидер этой коллаборации Г.В. Клапдор-Клайнгротхаус с несколькими коллегами сделал заявление о наблюдении $0\nu\beta\beta$ -распада со временем жизни $T_{1/2} = 1.5 \times 10^{25}$ лет [86]. В 2004 г. на основе окончательного анализа всех данных было получено значение эффективной нейтринной массы $\langle m_{ee} \rangle = (0.24 - 0.58)$ эВ [87]. Однако, этот результат был подвергнут критике [88; 89] и стало совершенно очевидно, что его необходимо перепроверить с помощью более чувствительных экспериментов.

В первую очередь необходимо провести более точный эксперимент с тем же изотопом ${}^{76}\text{Ge}$, чтобы избежать неопределенностей, привносимых структурой другого ядра. В 2014 году эксперимент GERDA [90], использующий детекторы на основе изотопа ${}^{76}\text{Ge}$, установил предел $T_{1/2}^{0\nu} > 2.1 \cdot 10^{25}$ лет с экспозицией 21.6 кг · лет. Поиски с ядром ${}^{136}\text{Xe}$ коллаборациями Kamland-Zen [48] и EXO-200 [49] не обнаружили двойной безнейтринный бета распад этого ядра, установив предел на время жизни $T_{1/2}^{0\nu} > 2.6 \cdot 10^{25}$ лет. Этот результат также находится в противоречии с [86; 87].

Эффективная масса $|m_{\beta\beta}|$ из $0\nu\beta\beta$ распада как функция массы самого легкого нейтрино для нормальной и обратной иерархии приведена на рис. 2.5. Следующее поколение экспериментов будет чувствительно к майорановской природе нейтрино для обратной иерархии. Увеличение чувствительности еще в десять раз потребуется в случае нормальной иерархии масс. Если же и в случае нормальной иерархии масс $0\nu\beta\beta$ -распад не будет обнаружен, то это будет сильным указанием в пользу того, что нейтрино является частицей Дирака.

Стоит отметить, что согласно теореме Шехтера-Валле [91], если наблюдается безнейтринный двойной бета-распад, то, независимо от механизма самого $0\nu\beta\beta$ -процесса, хотя бы одно из известных нейтрино – майорановская частица с ненулевой массой.

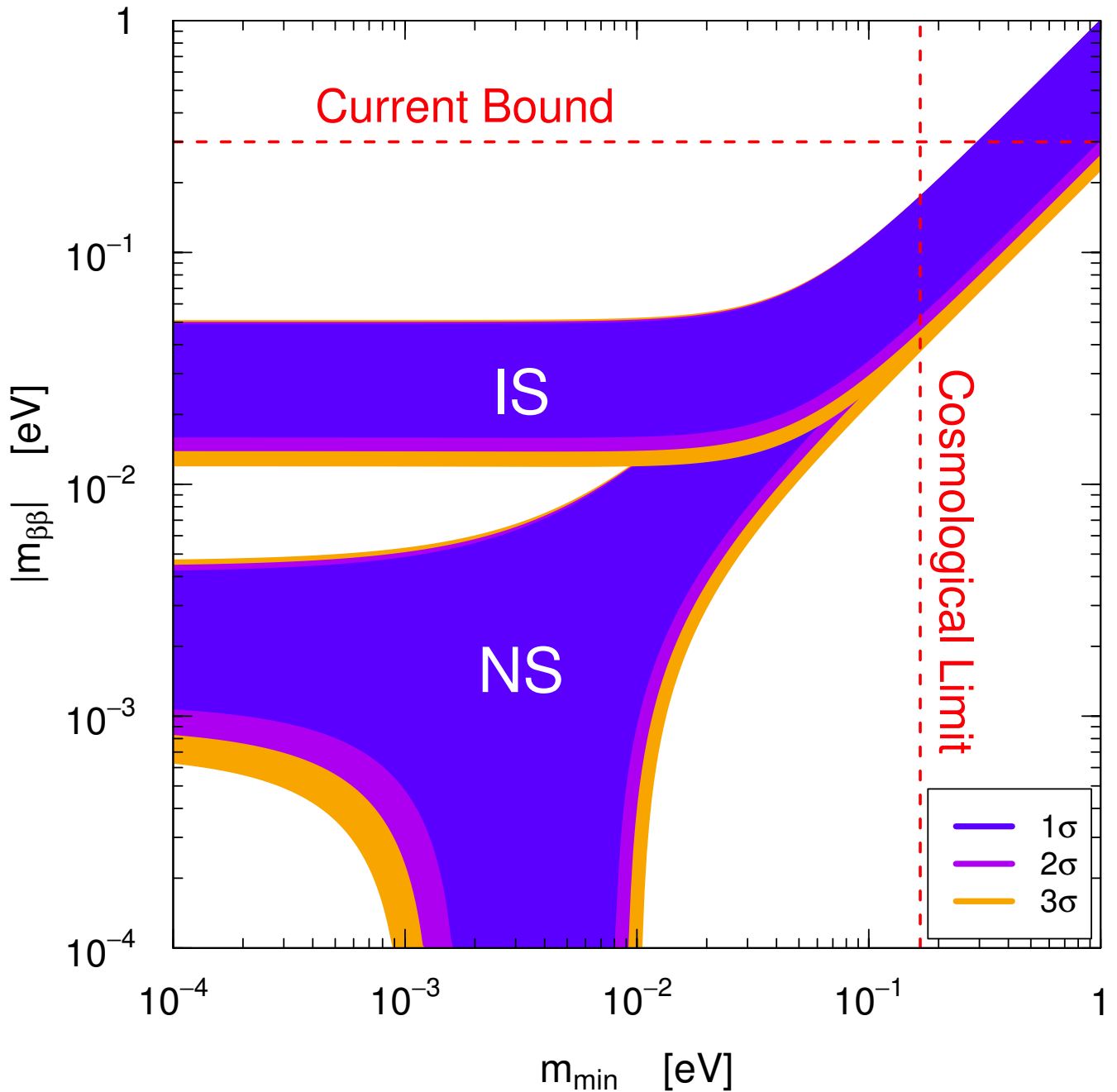


Рисунок 2.5— Эффективная масса $|m_{\beta\beta}|$ как функция минимальной массы нейтрино. В случае нормальной иерархии $m_{\min} = m_1$ (NS). Для обратной $m_{\min} = m_3$ (IS). Рисунок взят из работы [92].

2.4 Стерильные нейтрино

В нейтринной физике есть ряд аномальных результатов, объяснение которых в рамках нейтринных осцилляций требует введения стерильного нейтрино.

Коллаборация LSND обнаружила избыток $\bar{\nu}_e$ на расстоянии 30 метров от распадающихся в покое положительно заряженных мюонов $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$ [93]. Этот результат можно интерпретировать как осцилляции $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ с $\Delta m^2 \simeq 1 \text{ эВ}^2$. Средняя энергия $\bar{\nu}_e$ равна $\langle E_\nu \rangle = 30 \text{ МэВ}$.

Коллаборация MiniBOONE одной из главных своих задач ставила проверку результата LSND, изменив расстояние между источником и детектором, и энергию нейтрино, но сохранив

их отношение $L/E_\nu \simeq 500\text{м}/500\text{МэВ}$ как в LSND. MiniBOONE, в отличие от LSND, способен регистрировать как антинейтрино, так и нейтрино. Данные набирались в 2002-2012 годах в нейтринной и антинейтринной модах.

Результаты эксперимента MiniBOONE [94] таковы: в антинейтринной моде наблюдается избыток $\bar{\nu}_e$ событий 78.4 ± 28.5 (2.8σ) в области энергий $200 < E_\nu^{\text{QE}} < 1250$ МэВ, что совместимо с нейтринными осцилляциями с $0.01 < \Delta m^2 < 1$ эВ² и частично совместимо с результатами LSND; в нейтринной моде также наблюдается избыток ν_e событий 162.0 ± 47.8 (3.4σ), но форма энергетического распределения этих событий лишь минимально согласуется с простым двухнейтринным формализмом осцилляций. Если формализм осцилляций расширить за счет включения нескольких стерильных нейтрино и предположить нарушение CP-инвариантности, то можно уменьшить рассогласование в нейтринной и антинейтринной модах. Таким образом, результаты MiniBOONE не внесли ясности в аномалию LSND.

Радиохимические галлиевые детекторы солнечных нейтрино SAGE [95; 96] и GALLEX [97; 98] калибровались с помощью искусственных источников нейтрино. Использовались два типа радиоактивных источников: на основе ⁵¹Cr (электронный захват, энергия нейтрино 752.7 кэВ) и на основе ³⁷Ar (электронный захват, энергия нейтрино 813.5 кэВ). Оба эксперимента обнаружили дефицит наблюдаемых нейтрино по сравнению с ожиданием. Совместное среднее отношение наблюдаемого счета к ожидаемому составляет 0.87 ± 0.05 . Интерпретация данного результата в рамках нейтринных осцилляций требует $\Delta m^2 > 0.1$ эВ².

Еще одной аномалией является так называемая реакторная аномалия. Этот термин появился в 2011 году после публикации [99], в которой были представлены новые расчеты реакторных антинейтринных спектров для ²³⁵U, ²³⁹Pu, ²⁴¹Pu, и ²³⁸U. Переоценка спектров привела к 3%-ному увеличению ожидаемых потоков антинейтрино, причем в хорошем приближении данная оценка верна для всех проводившихся ранее реакторных экспериментов. Совместный анализ всех опубликованных данных экспериментов для расстояний менее 100 метров дает отношение наблюдаемого потока к ожидаемому 0.943 ± 0.023 , то есть отклонение от единицы имеет статистическую значимость 98.6%.

Все обсуждаемые выше результаты требуют для своего объяснения в рамках гипотезы нейтринных осцилляций $\Delta m^2 \simeq (0.01 - 1)$ эВ², что не укладывается в трех-нейтринную схему осцилляций, для которой есть только два независимых значения Δm_{21}^2 , Δm_{31}^2 , измеренные значения которых намного меньше. Прямолинейное увеличение числа нейтринных типов до четырех и более также невозможно, поскольку оно войдет в противоречие с наблюдаемой шириной Z^0 бозона, которая согласуется в рамках СМ с тремя поколениями нейтрино с массой меньше $m_Z/2$. Попыткой согласования обсуждаемых аномалий с наблюдаемой шириной Z^0 бозона является введение так называемого *стерильного* нейтрино.

Стерильное нейтрино – это невзаимодействующая с W^\pm, Z^0 суперпозиция состояний четырех (или более) массивных нейтрино, каждое из которых, однако, взаимодействует с W^\pm, Z^0 бозонами. Каким образом следует понимать эти два, кажущиеся противоречащими друг другу, условия? Для этого дополнительные нейтрино вводятся в СМ без введения новых заряженных лептонов. Проиллюстрируем эту идею, ограничившись только одним таким дополнительным нейтрино. Возникает четыре комбинации нейтрино, являющихся суперпозицией всех четырех массовых со-

стояний:

$$\begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{3 \times 3} & K_{3 \times 1} \\ U_{1 \times 3} & M_{1 \times 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_m \\ \nu_4 \end{pmatrix},$$

где $V_{3 \times 3}$ – привычная лептонная 3×3 матрица смешивания, а $K_{3 \times 1}$, $U_{1 \times 3}$, $M_{1 \times 1}$ – дополнительные матричные блоки новой унитарной 4×4 матрицы смешивания. $\nu_m = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. Условия унитарности новой 4×4 матрицы смешивания

$$\begin{aligned} V^\dagger V + U^\dagger U &= 1_{3 \times 3}, & K^\dagger K + M^\dagger M &= 1_{1 \times 1}, & V^\dagger K + U^\dagger M &= 0_{3 \times 1}, \\ V^\dagger V + K^\dagger K &= 1_{3 \times 3}, & U^\dagger U + M^\dagger M &= 1_{1 \times 1}, & VU^\dagger + KM^\dagger &= 0_{3 \times 1}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Нейтрино с определенным ароматом $|\nu_\alpha\rangle = \sum_i V_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle + K_{\alpha 1}^* |\nu_4\rangle$ содержит в своём состоянии $|\nu_4\rangle$. Состоянию $|\nu_s\rangle = \sum_i U_{1i}^* |\nu_i\rangle + M_{11}^* |\nu_4\rangle$ не соответствует никакой заряженный лептон. Поэтому амплитуда рождения заряженного лептона ℓ_α состоянием $|\nu_s\rangle$ с хорошей точностью (но не тождественно) равна нулю:

$$\mathcal{A}^W(\nu_s + W^- \rightarrow \ell_\alpha^-) = \sum_{i=1}^3 U_{1i}^* V_{\alpha i} \mathcal{A}_i^W + M_{11}^* K_{\alpha 1} \mathcal{A}_4^W \simeq (VU^\dagger + KM^\dagger)_{\alpha 1} \mathcal{A}_0^W = 0,$$

где мы воспользовались условием унитарности ур. (2.9) и $\mathcal{A}_i^W, \mathcal{A}_4^W$ – амплитуды рождения, не зависящие от аромата, но зависящие от массы нейтрино. \mathcal{A}_0^W – соответствующая амплитуда в случае пренебрежимо малой массы нейтрино. Подчеркнем, что равенство нулю амплитуды $\mathcal{A}^W(\nu_s + W^- \rightarrow \ell_\alpha^-)$ выполняется в приближении пренебрежимо малой массы нейтрино и только в случае когерентного сложения всех вкладов от массивных нейтрино. Последнее условие может нарушаться в случае достаточно большой разницы масс нейтрино в полной аналогии с объяснением подавления осцилляций заряженных лептонов (см. раздел 1.3). В таком случае, стерильное нейтрино ν_s , являясь некогерентной смесью массовых состояний, будет взаимодействовать с W^\pm, Z^0 и заряженными лептонами ℓ_α .

Аналогично, продемонстрируем, что амплитуда взаимодействия стерильного нейтрино с нейтральным Z^0 бозоном в тех же приближениях равна нулю:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^Z(\nu_s + Z^0 \rightarrow \nu_i) &= \sum_j U_{1j}^* \mathcal{A}_{ji}^Z + M_{11}^* \mathcal{A}_{4i}^Z \simeq \mathcal{A}_0^Z (V^\dagger [VU^\dagger + KM^\dagger])_{i1} = 0, \\ \mathcal{A}^Z(\nu_s + Z^0 \rightarrow \nu_4) &= \sum_j U_{1j}^* \mathcal{A}_{j4}^Z + M_{11}^* \mathcal{A}_{44}^Z \simeq \mathcal{A}_0^Z (K^\dagger [VU^\dagger + KM^\dagger])_{11} = 0. \end{aligned}$$

Также нетрудно показать, что парциальные ширины распадов W^\pm, Z^0 бозонов с нейтрино или антинейтрино в конечном состоянии пропорциональны числу типов нейтрино равному трем, а не четырем, несмотря на то, что каждое массивное нейтрино взаимодействует с калибровочными бозонами². Каким образом можно было бы обнаружить дополнительные нейтрино?

Во-первых, в плазме ранней Вселенной четвертое массивное нейтрино должно проявлять себя как полноценная дополнительная релятивистская степень свободы, к которой чувствительны

²Отметим, что в литературе встречаются другие определения стерильных нейтрино. Иногда стерильными считаются безмассовые состояния нейтрино, не имеющие взаимодействий с W^\pm, Z^0 бозонами, но смешанные с безмассовыми нейтрино определенного аромата во взаимодействии Юкавы.

космологические и астрофизические наблюдения. Во-вторых, активные ароматовые комбинации четырех полей ν_α в результате эволюции состояния во времени могут получить ненулевую примесь стерильной комбинации ν_s , приводя к периодическому исчезновению аромата α , что можно было бы обнаружить в экспериментах с относительно короткой базой. В-третьих, дополнительные типы нейтрино будут давать вклад в эффективные массы нейтрино в распадах частиц. Наконец, отметим, что в обсуждаемом сценарии матрица $V_{3 \times 3}$ должна быть неунитарной, что можно было бы обнаружить, точно измерив все ее элементы.

На сегодня обсуждается большое число проектов по поиску осцилляций на короткой базе [100]. В проекте SOX [101] предлагается использовать детектор BOREXINO, обладающий хорошей точностью реконструкции энергии и точки взаимодействия. В 2016-2017 годах будет проведен эксперимент с источником антинейтрино ^{144}Ce . Размеры детектора и пространственное разрешение позволяют регистрировать осцилляционную картину для осцилляций с $\Delta m^2 \sim 1 \text{ эВ}^2$.

Проект BEST (Baksan Experiment on stErile Transitions) с источником моноэнергетических нейтрино на основе изотопа Cr^{51} предлагается провести в Баксанской лаборатории [102]. Для детектирования нейтрино предлагается использовать галлий из эксперимента SAGE, размещенный вокруг источника в двух отдельных зонах на разном среднем расстоянии от источника. Данный эксперимент имеет чувствительность на уровне нескольких процентов к исчезновению электронных нейтрино и обладает потенциалом поиска переходов активных нейтрино в стерильные для параметров осцилляций $\Delta m^2 > 0.5 \text{ эВ}^2$ и $\sin^2 2\theta > 0.1$.

Поиск осцилляций на короткой базе возможен и на ядерных реакторах. Предпочтительно, чтобы размер активной зоны реактора был много меньше длины осцилляций. Подходящими реакторами являются исследовательский реактор ПИК в Гатчине (высота активной зоны 50 см при диаметре 39 см [103]) и исследовательский реактор в Димитровграде (размер зоны $42 \times 42 \times 35 \text{ см}^3$ [104]). Поиск осцилляций можно проводить с помощью жидкосцинтилляционного детектора сравнительно малого объема, например, в предложении эксперимента POSEIDON [105] авторами рассматривается ЖС детектор с размером центральной зоны $1 \times 1 \times 1.5 \text{ м}^3$ на расстоянии 5-15 метров от 100 МВт реактора, область чувствительности такого детектора к параметрам осцилляций лежит в пределах $\Delta m^2 = (0.3 - 6) \text{ эВ}^2$ и $\sin^2(2\theta) > 0.01$.

Эксперимент DANSS (Detector Anti Neutrino from Solid Scintillator), предложенный группой ученых из ОИЯИ и ИТЭФ, осуществляется на Калининской атомной станции [106; 107]. Впервые для регистрации реакторных антинейтрино будет использован твердый сцинтиллятор. Детектор антинейтрино нового поколения DANSS будет представлять собой сцинтилляционный пластиковый детектор объемом 1 м^3 , разбитый на 2500 ячеек и десять самостоятельных секций, по 250 ячеек в каждой. Скорость счета антинейтрино составит около 10000 событий в сутки на расстоянии 11 м от реактора, что соответствует статистической точности измерений 1%. Помимо других задач, спектрометр DANSS планируют использовать для поиска стерильных нейтрино. Отметим важную особенность эксперимента DANSS – изменяемое пределах от 9.7 м до 12.2 м расстояние от центра детектора до центра реактора.

Еще один проект, предложенный российскими участниками – NEUTRINO-4 [108], с изменяемым расстоянием как и в проекте DANSS, но с исследовательским реактором мощностью до 100 МВт.

Унитарность матрицы смешивания может быть проверена в экспериментах следующего поколения, таких как JUNO и DUNE, в которых параметры смешивания будут измерены с точностью лучше 1%.

2.5 Проблема солнечной металличности и CNO цикл

Регистрация солнечных нейтрино не только подтвердила теорию ядерных реакций, происходящих в Солнце, но и произвела настоящую революцию в физике частиц, когда выяснилось, что нейтрино осциллируют и, таким образом, являются массивными частицами. Но полная теория ядерных реакций в звездах до сих пор не имеет экспериментального подтверждения. Теория предполагает, что энергия в звездах генерируется в двух основных последовательностях ядерных реакций: протон-протонной цепочке реакций и в ядерных реакциях углеродно-азотного цикла (CNO). В протон-протонной цепочке реакций синтезируется гелий из водорода. Эта цепочка является основным источником энергии для звезд с массой Солнца или меньше. CNO цикл является доминирующим для более массивных звезд. Реакции углеродно-азотного цикла дают маленький вклад в полную энергию, выделяемую Солнцем, но, тем не менее, этот поток уже может быть зарегистрирован при современном уровне чувствительности нейтринных детекторов. Более крупные звезды, с более высокими центральными температурами, по современным представлениям должны генерировать энергию за счет CNO-цикла. Модель генерации энергии в массивных звездах до сих пор не проверялась экспериментально. Нейтрино от далеких массивных звезд не могут быть зарегистрированы на Земле в силу их ничтожно малых потоков, но возможна регистрация нейтрино из углеродно-азотного цикла от Солнца. Регистрация этих нейтрино от Солнца экспериментально проверит теоретические представления о механизме генерации энергии в массивных звездах.

В таблице 4 представлены результаты измерения потоков солнечных нейтрино в сравнении с теоретическими предсказаниями стандартной модели Солнца (СМС) в двух ее вариантах, соответствующих разным методам определения относительной концентрации тяжелых элементов на Солнце или металличности³. Распространенность химических элементов на поверхности Солнца была рассчитана более 10 лет тому назад в одномерной модели (статическая модель для отдельных слоев атмосферы Солнца – фотосферы, хромосферы), использующей данные спектроскопических наблюдений фотосферы (модель GS98 [109]). Эта модель согласуется с гелиосейсмологическими данными, а именно с измерениями скорости прохождения механических волн в Солнце.

Ситуация изменилась с публикацией группы Асплунда в 2007 году данных по химическому составу солнечной поверхности [110], рассчитанных с помощью трехмерной магнитогидродинамической модели конвективной зоны, фотосферы, хромосферы и короны. В этой модели содержание таких распространенных элементов как C, N и O значительно уменьшилось по сравнению с данными GS98. Металличность Солнца в целом уменьшилась до значения $Z/X = 0.0178$ (низкая

³металличность в астрофизике – относительная концентрация элементов тяжелее гелия; обычно используется отношение Z/X массы элементов тяжелее гелия (Z) к массе водорода (X)

поток ν	GS98 [109]	AGS09 [110]	$\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}$	Измерение/Эксперимент
				6.0 ± 0.8 SAGE+SNO+Homestake [111]
pp	5.98 ± 0.04	6.03 ± 0.04	$\times 10^{10}$	6.6 ± 0.7 BOREXINO [112] 6.37 ± 0.46 все солнечные
pep	1.44 ± 0.012	1.47 ± 0.012	$\times 10^8$	1.6 ± 0.3 BOREXINO [113]
${}^7\text{Be}$	5.00 ± 0.07	4.56 ± 0.07	$\times 10^9$	4.87 ± 0.24 BOREXINO [114]
${}^8\text{B}$	5.58 ± 0.14	4.59 ± 0.14	$\times 10^6$	5.2 ± 0.3 SNO+SK+BOREXINO+KamLAND $5.25 \pm 0.16_{-0.013}^{+0.011}$ SNO-LETA [115]
hep	8.0 ± 2.4	8.3 ± 2.5	$\times 10^3$	$< 2.3 \times 10^4 \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$ (90% У.Д.) SNO [116]
${}^{13}\text{N}$	2.96 ± 0.14	2.17 ± 0.14	$\times 10^8$	интегральный поток CNO:
${}^{15}\text{O}$	2.23 ± 0.15	1.56 ± 0.15	$\times 10^8$	< 7.4 BOREXINO (90% У.Д.) [113]
${}^{17}\text{F}$	5.52 ± 0.17	3.40 ± 0.16	$\times 10^6$	

Таблица 4 — Предсказания стандартной модели Солнца и экспериментальные измерения потоков солнечных нейтрино.

металличность) по сравнению с предыдущим значением $Z/X = 0.0229$ (высокая металличность). Трехмерная модель воспроизводит наблюдаемый профиль атомных и молекулярных линий в солнечной атмосфере, но находится в противоречии с гелиосейсмологическими данными. В настоящее время нет удовлетворительного объяснения данному факту [117].

Потоки солнечных нейтрино из углеродно-азотного цикла относительно малы и до сих пор непосредственно не измерялись. Существуют интегральные измерения полных потоков солнечных нейтрино в двух радиохимических экспериментах.

Измерение потока CNO-нейтрино включено в программу второй фазы эксперимента BOREXINO и в программу солнечной фазы эксперимента SNO+ [118].

2.6 Астрофизические нейтрино и нейтринные телескопы

23 февраля 1987 года в большом Магеланом облаке вспыхнула сверхновая на расстоянии 51.4 кПк от Солнца. Согласно современным теоретическим представлениям во вспышке сверхновой излучается около $10^{58}\nu$. 99% энергии вспышки, 10^{46} Джоулей, переносится нейтрино и анти-нейтрино.

Три эксперимента Kamiokande II [119], IMB [120] и Баксанский подземный сцинтилляционный телескоп (БПСТ) [121] обнаружили нейтрино от вспышки сверхновой 1987 года на два часа раньше светового сигнала, что согласуется с теоретическим представлением о механизме взрыва сверхновой. Советско-итальянский нейтринный телескоп LSD под горой Монблан зарегистрировал 5 нейтринных событий [122; 123], но за 7.5 часов до видимой вспышки. При уровне фона в детекторе, флуктуации фона могут имитировать подобное событие лишь раз в три года [124]. Ве-

роятность совпадения нейтринного сигнала со световой вспышкой от сверхновой в течение суток меньше вероятности имитации фоновыми событиями нейтринного сигнала от сверхновой в 365 раз. Соответственно, случайно такое совпадение может произойти раз в тысячу лет [124]. Обычно данные LSD не учитываются при анализе, хотя наблюдение LSD может свидетельствовать о двухстадийном характере высвечивания нейтрино. Возможный механизм обсуждался, например, в работе [125].

Для раннего обнаружения сверхновых создана специальная сеть Super Nova Early Warning System (SNEWS) [126], объединяющая действующие детекторы, чувствительные к нейтрино сверхновых: LVD, Super Камиоканде, Amanda/Ice Cube, BOREXINO, KamLAND, Daya Bay. После запуска к сети подключится и SNO+. Триангуляция нейтринных сигналов позволит выделить направление на сверхновую, что даст возможность наблюдать момент рождения сверхновой в оптическом диапазоне – нейтрино излучаются до световой вспышки.

В детекторах следующего поколения HyperKamiokaNDE, JUNO, RENO-50, LENA, с массой мишени от 20 до 400 ктонн, количество событий, вызванных нейтрино от вспышек сверхновой, ожидается на 2-3 порядка больше, чем для детекторов предыдущего поколения.

В 2013 году коллаборация IceCube объявила [127] об обнаружении трех событий с энергиями 1.0, 1.1 и 2.2 ПэВ⁴. Эти события интерпретируются как события взаимодействия астрофизических нейтрино. Это революционный результат, означающий рождение новой области науки – нейтринной астрономии.

Из сравнения наблюдаемого спектра энергии с ожиданием в предположении существования только атмосферных нейтрино и мюонов, в коллаборации IceCube пришли к выводу о дополнительных 87_{-10}^{+14} нейтрино, которые могут быть вызваны астрофизическими источниками [128]. Однако на сегодня источник этих нейтрино остается загадкой.

Невысокая точность углового разрешения ливневых событий во льду на южном полюсе не позволяет определить возможный источник наблюдаемых событий. Обнаружение источников астрофизических нейтрино – задача проектов BAIKAL GVD, KM3NET [129], ANTARES [130], IceCube.

Революционное открытие коллаборацией IceCube нейтрино от астрофизических источников придало огромный импульс в развертывании новых нейтринных телескопов. Коллаборация IceCube планирует увеличение просматриваемого объема своей установки до 5-10 км³ с увеличенным расстоянием между тросами с ФЭУ. Как следствие, порог чувствительности по энергии возрастет. Также планируется увеличение поверхностного вето детектора до площади в 100 км² для подавления атмосферных ливней от нейтрино и мюонов, что позволит существенно увеличить эффективный объем установки.

В средиземном море планируется развернуть установку KM3NET с просматриваемым объемом 3-6 км³ и 12 000 ФЭУ. На Байкале развертывается установка BAIKAL GVD с просматриваемым объемом порядка км³. Нейтринные телескопы имеют богатую физическую программу. Кроме исследования астрофизических нейтрино, их спектров и источников, нейтринные телескопы могут быть использованы для измерения иерархии масс нейтрино, томографии Земли, поиска темной материи и других интригующих исследований.

⁴1 ПэВ = 10¹⁵ эВ.

2.7 Нейтринная геофизика

Геонейтрино – электронные антинейтрино, сопровождающие распад естественных радиоактивных β -изотопов в Земле. Основной вклад в естественную радиоактивность Земли дают элементы из цепочек распадов доживущих изотопов ^{238}U , ^{232}Th , а также из распадов ^{40}K .

Хотя профиль плотности Земли восстанавливается по сейсмическим данным, химический состав глубин Земли остается неисследованным, поэтому точное измерение потоков геонейтрино позволит восстановить пространственное распределение порождающих их радиоактивных изотопов, и, таким образом, позволит определить содержание соответствующих радиоактивных элементов.

Естественная радиоактивность Земли является мощным тепловым источником, влияющим на тепловую историю нашей планеты. Знание содержания радиоактивных элементов в ее глубинах необходимо для решения многих проблем геофизики. Механизм генерации тепла в недрах планеты является фундаментальной проблемой геологии. Измерения показали, что это тепло составляет (47 ± 2) ТВт [131]. Основными внутренними источниками тепла в Земле являются радиогенное тепло и тепло, запасенное нашей планетой во время гравитационной дифференциации вещества. Вклад других источников не превышает 1% от полного тепловыделения.

Интерес к изучению геонейтринных потоков возник параллельно с недавним развитием сцинтилляционных детекторов большого объема, обладающих достаточной чувствительностью для регистрации потоков антинейтрино на уровне $\sim 10^6 \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$ с энергиями несколько МэВ.

Определение потоков геонейтрино позволит пролить свет на остающиеся открытыми вопросы относительно естественной радиоактивности нашей планеты: каков радиогенный вклад в полное генерирование тепла Землей; сколько урана и тория содержит земная кора и мантия; существует ли в центре Земли геореактор или скрытый избыток ^{40}K , как это предполагается рядом авторов; совместима ли с геонейтринными данными стандартная геохимическая модель?

Экспериментальная нейтринная геофизика родилась как наука в 2005 году, с первой публикацией на эту тему коллаборации KamLAND. Существование геонейтрино и, соответственно, вклада радиоактивных элементов в разогрев Земли, подтверждено на уровне 4.2σ и 5.9σ независимо в двух экспериментах: KamLAND [132] и BOREXINO [133] соответственно. Точность измерения суммарных потоков геонейтрино при анализе с фиксированным отношением масс U/Th пока что низкая в обоих экспериментах, порядка 30%. Анализ с нефиксированным отношением масс U/Th практически не дает осмысленных ограничений.

В настоящий момент разные геофизические модели хорошо согласуются с измерениями, для фиксации параметров моделей требуются более точные измерения потока геонейтрино. С другой стороны, уже сегодня можно утверждать, что экзотические сценарии разогрева Земли за счет внутреннего геореактора практически исключены, вклад такого реактора в полную генерацию тепла с вероятностью 95% не превышает 4.5 ТВт по данным детектора Borexino [134] или 3.7 ТВт по данным KamLAND [132]. Реакторные детекторы третьего поколения (JUNO и RENO-50) будут обладать чувствительностью к геонейтрино. Оценки чувствительности детектора JUNO были сделаны

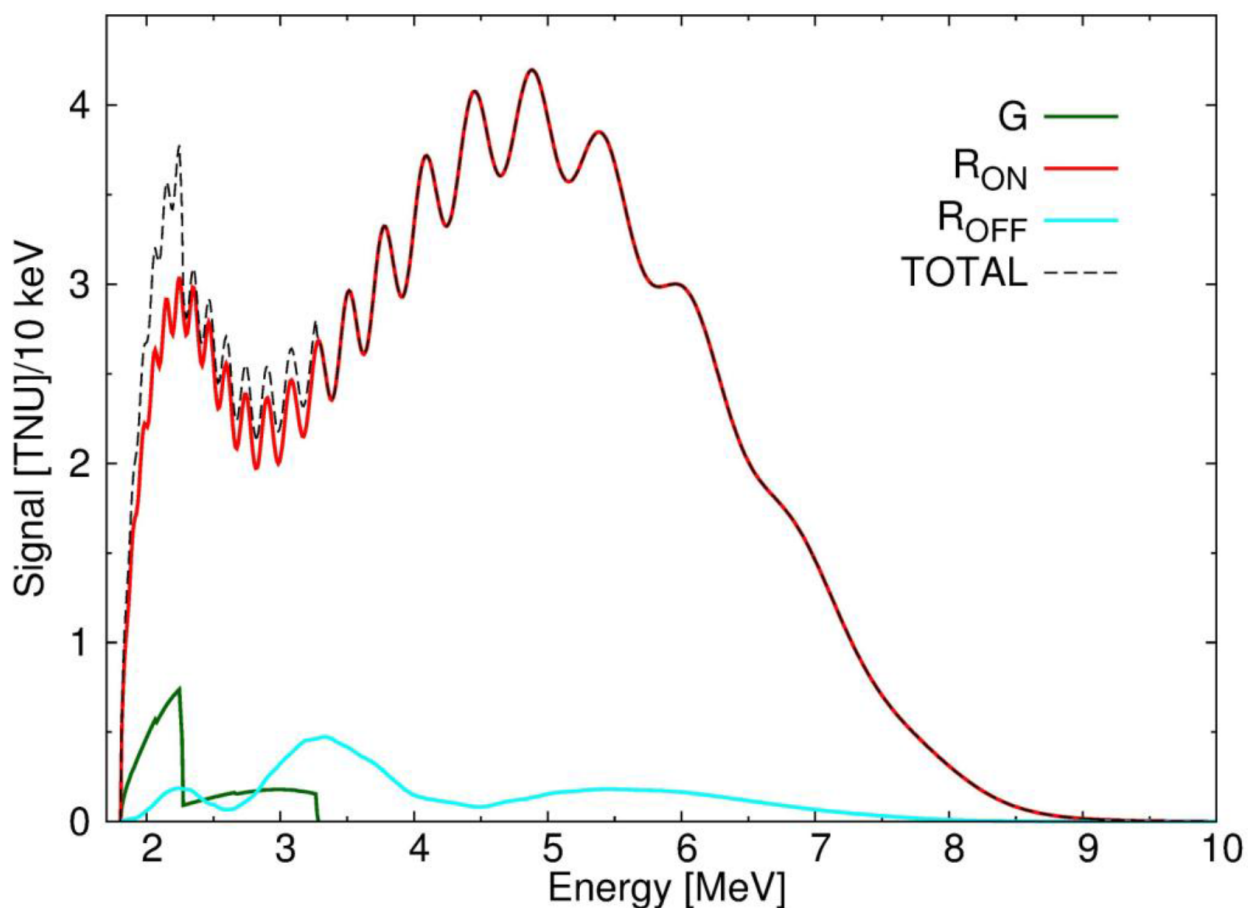


Рисунок 2.6 — Ожидаемый геонейтринный сигнал в детекторе JUNO (кривая G) в сравнении с сигналом от реакторов до включения (кривая R_{OFF}) и после включения (кривая R_{ON}) реакторов в Яньджиане (17.4 ГВт) и Тайшане (18.4 ГВт). Штриховая линия соответствует суммарному сигналу после включения детектора. Рисунок из работы [135].

в работе [135] (см. рис. 2.6). Ожидаемый геонейтринный сигнал составляет $39.7^{+6.5}_{-5.2}$ TNU⁵. Сигнал от реакторов (в “геонейтринном” энергетическом “окне”) по состоянию на 2013 год составит $26.0^{+2.2}_{-2.3}$ TNU, точность измерения геонейтринного сигнала в этом случае составит 10% за ~ 100 дней набора данных.

После включения “ближних” реакторов в Янцзяне и Тайшане реакторный сигнал увеличится до 354^{+45}_{-41} TNU, что сделает более сложным точное выделение геонейтринного сигнала. Тем не менее, в проекте JUNO [73], возможность измерения геонейтринного потока оценивается позитивно, несмотря на высокий уровень фона от реакторов. В предположении 80%-ой эффективности регистрации нейтрино в объеме 18.35 ктонн ЖС и фиксированного при хондритном значении отношения масс U и Th в Земле ($M(\text{Th})/M(\text{U})=3.9$) статистическая точность восстановления геонейтринного сигнала составляет 17%, 10%, 8% и 6% для 1, 3, 5 и 10 лет набора данных соответственно.

⁵Terrestrial Neutrino Unit (TNU) соответствует 1 взаимодействию на 10^{32} протонов мишени в год. Одна килотонна жидкого сцинтиллятора содержит приблизительно 10^{32} протонов и время экспозиции в соответствующих экспериментах обычно составляет несколько лет, таким образом единицы TNU дают скорость счета событий обратного бета-распада на протоне для килотонного детектора за год.

Интересные возможности для определения химического состава земного ядра должны предоставить нейтринные телескопы следующего поколения. Идея измерения состава Земли основана на зависимости нейтринных осцилляций от плотности n_e электронов в среде (нейтринная томография). Резонансные осцилляции атмосферных нейтрино внутри Земли, возможные вследствие относительно большой величины угла θ_{13} , могут служить чувствительным инструментом для определения химического состава земного ядра.

Одной из задач готовящегося проекта PINGU будет нейтринная томография Земли. Предполагается использовать большую статистику данных по атмосферным нейтрино для дискриминации различных моделей земного ядра [77]. Систематические неопределенности, связанные с параметрами осцилляций, будут уменьшены за счет регистрации потоков нейтрино, не проходящих через земное ядро.

2.8 Заключение к главе

Несмотря на более чем полувековую историю изучения свойств нейтрино, есть еще ряд вопросов, на которые пока нет ответа. Вот лишь некоторые из них.

- Чему равна масса самого легкого нейтрино?
- Какова иерархия масс нейтрино?
- Отлична ли от нуля фаза δ , ответственная за нарушение CP-четности?
- Каков знак $\cos 2\theta_{23}$ (или октант, в котором лежит угол θ_{23}), что важно для измерения иерархии масс нейтрино?
- Является ли нейтрино частицей Дирака или Майорана?
- Существует ли стерильное нейтрино?
- Есть ли у нейтрино “нестандартные” свойства?
- Каковы источники астрофизических нейтрино сверхвысоких энергий открытых в эксперименте IceCube?
- Как обнаружить реликтовые нейтрино?

Помимо изучения физических свойств нейтрино в специализированных экспериментах, в последнее время на первый план выходит использование нейтрино в смежных областях наук, в частности для изучения химического состава Земли, в связи с чем в последнее десятилетие активно формируется новая область науки – нейтринная геофизика. Ожидается, что новое поколение нейтринных телескопов, кроме решения своих основных задач (обнаружение источников, исследование иерархии масс и т.д.) сможет осуществлять “нейтринную томографию” Земли с помощью атмосферных нейтрино, что будет совершенно новым шагом в нашем понимании ее структуры.

Эксперименты по исследованию солнечных нейтрино в последнее десятилетие также перенесли фокус с изучения свойств нейтрино на исследование с их помощью процессов, протекающих внутри Солнца, и его химического состава.

Некоторая часть из этих вопросов обсуждается в этой главе.

Текущее состояние исследований по прямому измерению массы нейтрино обсуждается в начале главы. Экспериментом следующего поколения с чувствительностью к массе нейтрино на уровне 0.2 эВ является детектор KATRIN [71]. При этом, если масса нейтрино окажется заметно отличной от нуля, возможно и достаточно точное измерение массы: точность измерения составит 5σ при $m_\nu = 0.35$ эВ, или 3σ при $m_\nu = 0.3$ эВ. Спектрометр детектора полностью смонтирован, к лету 2016 будет установлен источник и транспортная секция, тогда же начнутся тестовые запуски при малой плотности. Начало набора данных запланировано на 2017 год.

Затем обсуждается вопрос о методах определения иерархии масс нейтрино. Мы формулируем постановку задачи и обсуждаем как можно определить иерархию масс нейтрино экспериментами с осцилляциями в вакууме и с осцилляциями в веществе.

Примером первого подхода являются два эксперимента JUNO [73] и RENO-50 [74], которые планируют измерить иерархию масс нейтрино при помощи реакторных антинейтрино. Эксперимент JUNO будет использовать жидкосцинтилляционный детектор массой 20 килотонн, просматриваемый изнутри двумя десятками тысяч ФЭУ. Спектр антинейтрино от реакторов модулируется нейтринными осцилляциями с частотами, задаваемыми $\Delta m_{21}^2 L/E_\nu$ и $\Delta m_{31}^2 L/E_\nu$, и будет зависеть от иерархии масс нейтрино. Измерение иерархии масс возможно только при хорошем энергетическом разрешении детектора, не хуже 3% при 1 МэВ выделенной энергии. В коллаборации JUNO считают возможным достичь требуемого энергетического разрешения.

Второй метод используется в экспериментах с ускорительными нейтрино, такими как NOvA [75] (набирает данные), DUNE (в стадии подготовки)⁶ [76] и T2HK [136; 137], которые используют осцилляции нейтрино и антинейтрино в веществе для определения иерархии масс нейтрино. В этих экспериментах наблюдают появление электронных (анти)нейтрино в пучке мюонных (анти)нейтрино на большом расстоянии от источника. Так как основной путь нейтрино проходит через Землю, вероятность перехода нейтрино определенных энергий модифицируется за счет влияния вещества. На качественном уровне эффект вещества можно представить себе следующим образом. Электронное нейтрино в веществе становится “тяжелее” и на выходе из вещества с более высокой вероятностью окажется в состоянии ν_τ для нормальной иерархии масс или в состоянии ν_μ для обратной иерархии.

Также иерархию масс нейтрино можно будет определить в экспериментах с атмосферными нейтрино, таких как PINGU [77] и ORCA [78], HyperKamiokaNDE [79; 136], INO [80]. Космологические измерения также имеют чувствительность к иерархии масс нейтрино.

Затем, в главе обсуждаются методы экспериментов, планирующих определение фазы δ , ответственной за нарушение CP-четности. Из экспериментов, набирающих данные сегодня, только NOvA и T2K чувствительны к нарушению CP инвариантности. Наибольшей чувствительностью к δ будут обладать эксперименты T2HK [136; 137] и DUNE [82]. HyperKamiokaNDE – дальний водно-черенковский детектор эксперимента T2HK, будет расположен на расстоянии 295 км от ускорительного комплекса JPARC. Дальний детектор DUNE, представляющий собой время-проекционную камеру с жидким аргоном, будет расположен на расстоянии 1300 км от ускорителя в лаборатории имени Ферми. Первые результаты ожидаются в 2025-2030 годах.

⁶ранее LBNE

Далее, мы обсуждаем физику безнейтринного двойного бета-распада, достигнутые результаты и перспективы исследований. Следующее поколение экспериментов будет чувствительно к майрановской природе нейтрино для обратной иерархии. Чтобы обнаружить обратный бета-распад и в случае нормальной иерархии масс, потребуется увеличение чувствительности этих экспериментов еще в десять раз. Если же и в случае нормальной иерархии масс $0\nu\beta\beta$ -распад не будет обнаружен, то это будет сильным указанием в пользу того, что нейтрино является частицей Дирака.

В следующем разделе мы обсуждаем очень “горячую” в последнее время тему стерильных нейтрино. Мы подробно останавливаемся на том, что по нашему мнению может представлять собою стерильное нейтрино, поскольку в литературе на эту тему существует определенная путаница. Далее, обсуждаются текущие и будущие эксперименты, которые либо подтвердят существование стерильных нейтрино с массой порядка $0.1 - 1$ эВ, либо исключат такую возможность.

Следующей темой нашего обзора является проблема солнечной металличности и CNO цикл. После надежного обнаружения солнечных нейтрино от разных ядерных реакций, протекающих в Солнце, а также обнаружения их осцилляций, фокус исследований смещается на прецизионные измерения, такие как изучение механизмов генерации энергии в массивных звездах. Различные сценарии горения ядерного топлива в Солнце предсказывают разную степень металличности (содержания всех элементов тяжелее гелия) Солнца и вариацию вклада от CNO цикла.

Далее, мы обсуждаем революционное открытие коллаборацией IceCube нейтрино от астрофизических источников [127; 128], что придало огромный импульс в разворачивании новых нейтринных телескопов следующего поколения: IceCube, KM3NET, BAIKAL GVD. С помощью разворачиваемых установок мы планируем найти источники астрофизических нейтрино сверхвысоких энергий и понять их природу.

Наконец, глава завершается обсуждением результатов и перспектив новой области исследований – нейтринной геофизики, родившейся после обнаружения геонейтрино коллаборациями KamLAND [132] и BOREXINO [133].

Часть II

**Разработка квантово-полевого подхода к
описанию нейтринных осцилляций.**

Глава 3. Квантовомеханическая теория осцилляций нейтрино в плосковолновом приближении и в модели с волновым пакетом

3.1 Квантовые состояния

Начнем обсуждение квантовомеханической теории осцилляций нейтрино с того, что напомним основные понятия квантовой механики, важные для этой задачи, введя заодно используемые далее определения. Начнем с одномерного случая и свободной теории.

В гильбертовом пространстве квантовая система описывается абстрактным состоянием $|\psi(t)\rangle$, зависящим от времени. Эволюция этого состояния во времени дается уравнением Шредингера

$$i\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi(t)\rangle, \quad (3.1)$$

где $\hat{H} = \hat{H}_0$ – гамильтониан. Пусть $|p\rangle$ есть собственное состояние свободного гамильтониана \hat{H}_0 с собственным значением E_p :

$$\hat{H}_0|p\rangle = E_p|p\rangle. \quad (3.2)$$

Пусть $|x\rangle$ будет собственным состоянием оператора координаты \hat{X} с собственным значением x :

$$\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle. \quad (3.3)$$

Нормировки состояний: $\langle q|p\rangle = 2\pi\delta(p - q)$, $\langle y|x\rangle = \delta(x - y)$, где $\delta(x - y)$ – дельта функция Дирака. Квантовое состояние $|\psi(t)\rangle$ можно характеризовать либо координатным распределением $\psi_x(t, x)$ в координатном представлении, либо импульсным $\psi_p(t, p)$ в импульсном представлении для свободного или полного гамильтониана:

$$|\psi(t)\rangle = \int dx\psi_x(t, x)|x\rangle = \int \frac{dp}{2\pi}\psi_p(t, p)|p\rangle. \quad (3.4)$$

Состояния $|x\rangle$, $|p\rangle$ связаны между собой таким образом:

$$|x\rangle = \int \frac{dp}{2\pi}e^{-ipx}|p\rangle, \quad |p\rangle = \int dx e^{+ipx}|x\rangle. \quad (3.5)$$

С учетом ур. (3.4), ур. (3.5) очевидна связь:

$$\psi_x(t, x) = \int \frac{dp}{2\pi}e^{ipx}\psi_p(t, p), \quad \psi_p(t, p) = \int dx e^{-ipx}\psi_x(t, x) \quad (3.6)$$

Формальное решение ур. (3.1)

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t}|\psi(0)\rangle \quad (3.7)$$

с учетом ур. (3.4) даёт:

$$|\psi(t)\rangle = \int \frac{dp}{2\pi}e^{-iE_p t}\psi_p(0, p)|0, p\rangle = \int dx\psi_x(0, x)|t, x\rangle, \quad (3.8)$$

где

$$|t; x\rangle = e^{-i\hat{H}_0 t} |x\rangle. \quad (3.9)$$

При выводе ур. (3.8) мы использовали ур. (3.5), ур. (3.6):

$$\begin{aligned} \int \frac{dp}{2\pi} e^{-iE_p t} \psi_p(0, p) |p\rangle &= e^{-i\hat{H}_0 t} \int \frac{dp}{2\pi} \psi_p(0, p) |p\rangle = e^{-i\hat{H}_0 t} \int \frac{dp dx}{2\pi} e^{+ipx} \psi_p(0, p) |x\rangle \\ &= \int dx \psi_x(0, x) |t, x\rangle. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Если $\psi_p(0, p) = 2\pi\delta(p - k)$, где k – импульс, от которого функция $\psi_p(0, p)$ может зависеть как от параметра, решение ур. (3.8) приобретает хорошо знакомый вид:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iE_k t} |k\rangle = \int dx e^{-iE_k t + ikx} |x\rangle, \quad (3.11)$$

т.е. эволюция во времени состояния со строго определенным импульсом описывается фактором $e^{-iE_k t}$, умноженным на состояние с определенным импульсом $|k\rangle$ в импульсном представлении или суперпозицией состояний с определенной координатой $|x\rangle$ с весовым множителем $e^{-iE_k t + ikx}$. Это решение известно как плоская волна.

3.2 Плосковолновая теория осцилляций нейтрино в вакууме

Определим ароматное состояние $|\nu_\alpha\rangle$ как когерентную суперпозицию массовых состояний $|\nu_i(p)\rangle$:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i V_{\alpha i}^* |\nu_i(p)\rangle, \quad (3.12)$$

где каждое массовое состояние есть собственное состояние свободного гамильтониана с собственным значением p . Эволюция состояния ур. (3.12) дается

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = e^{-i\hat{H} t} |\nu_\alpha\rangle = \sum_i V_{\alpha i}^* e^{-iE_i t} |\nu_i(p)\rangle, \quad (3.13)$$

где $E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2}$. Предположим, что в каком-то слабом процессе родилась когерентная суперпозиция состояний со строго определенными импульсами ур. (3.12). Проекция этого состояния на состояние с произвольным ароматом $|\nu_\beta\rangle$ не сводится к $\delta_{\alpha\beta}$:

$$\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle = \sum_i V_{\alpha i}^* V_{\beta i} e^{-iE_i t}. \quad (3.14)$$

Соответствующая вероятность

$$P_{\alpha\beta}(t) = |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle|^2 = \sum_{i,j} V_{\alpha i}^* V_{\alpha j} V_{\beta i} V_{\beta j}^* e^{-i(E_i - E_j)t}. \quad (3.15)$$

Используем далее приближения $E_i - E_j \simeq (m_i^2 - m_j^2)/2p$ и $t = L$, где L – расстояние, пройденное нейтрино за время t , получим хорошо известную формулу:

$$P_{\alpha\beta}(t) = \sum_{i,j} V_{\alpha i}^* V_{\alpha j} V_{\beta i} V_{\beta j}^* e^{-i\Delta m_{ij}^2 L/2p} = \sum_{i,j} V_{\alpha i}^* V_{\alpha j} V_{\beta i} V_{\beta j}^* e^{-i2\pi L/L_{ij}^{\text{osc}}}, \quad (3.16)$$

где $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ и $L_{ij}^{\text{osc}} = 2\pi \frac{2p}{\Delta m_{ij}^2}$. В двухнейтринном случае вероятность $P_{\alpha\beta}^{2\nu}(L)$ это периодическая функция расстояния L с периодом, равным длине L_{12}^{osc} . Такая зависимость $P_{\alpha\beta}^{2\nu}(L + L_{12}^{\text{osc}}) = P_{\alpha\beta}^{2\nu}(L)$ от расстояния и дала название “нейтринные осцилляции”. В трехнейтринном случае, строго говоря, такое название уже не вполне уместно, поскольку периодичности у вероятности осцилляций может и не оказаться, за исключением специальных случаев определенных отношении длин $L_{12}^{\text{osc}}, L_{23}^{\text{osc}}, L_{13}^{\text{osc}}$. Мы полагаем, что более уместным было бы называть нейтринные осцилляции квази-периодическими.

3.3 Лоренц-инвариантность нейтринных осцилляций

В литературе можно встретить утверждение о том, что ковариантный подход к проблеме нейтринных осцилляций приводит к другой фазе осцилляций. Например, в работе [138] утверждается, что стандартная длина осцилляций $L_{ij}^{\text{osc}} = 2\pi \frac{2p}{\Delta m_{ij}^2}$ завышена в два раза. Ниже мы рассмотрим пример, в котором фаза осцилляций нейтрино записана в системе центра масс состояний ν_i и ν_j . Несмотря на то, что формула в этой системе отсчета заметно отличается от привычной формулы в лабораторной системе отсчета, они полностью эквивалентны как только совершен переход из системы центра масс в лабораторную систему отсчета. Это простое упражнение демонстрирует лоренц-инвариантность вероятности нейтринных осцилляций, если используется одинаковый набор гипотез в разных системах отсчета.

Рассмотрим интерференцию состояний ν_i и ν_j в системе их центра масс. В лабораторной системе интерференция этих состояний определяется экспонентой

$$e^{-i(E_i - E_j)t}, \quad (3.17)$$

где $E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2}$ и импульс p одинаков для всех массовых состояний. Совершим преобразование Лоренца в систему центра масс ν_i и ν_j . Соответствующая скорость равна

$$\begin{aligned} u &= \frac{2p}{E_i + E_j} \approx \left(1 - \frac{m_i^2 + m_j^2}{4p^2}\right), \\ \gamma_u &= \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \approx \frac{p}{\sqrt{\frac{m_i^2 + m_j^2}{2}}}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где приближенные равенства справедливы для $m_i \ll p$. Время t' и координата x' в системе центра масс можно найти равными

$$\begin{aligned} t' &= \gamma_u (t - ux) = \gamma_u t (1 - u), \\ x' &= \gamma_u (x - ut) = \gamma_u t (1 - u), \end{aligned} \quad (3.19)$$

где t, x соответствуют времени и координате в лабораторной системе, для которой в последнем равенстве использована гипотеза $x = t$. Находим, что

$$x' = t' \equiv \tau \approx \frac{t}{2\sqrt{2}p} \sqrt{m_i^2 + m_j^2} \quad (3.20)$$

время и координата в системе центра масс также равны друг другу, как и должно быть, поскольку интервал $s = (t^2 - x^2) = (t'^2 - x'^2) = 0$ инвариантен. Приближенное равенство в ур. (3.20) справедливо для $m_i \ll p$. Найдем энергию и импульс нейтрино в системе центра масс:

$$\begin{aligned} E'_i &= \gamma_u (E_i - up) = \frac{\gamma_u}{E_i + E_j} (E_i^2 + E_i E_j - 2p^2) \approx \frac{3m_i^2 + m_j^2}{2\sqrt{2}\sqrt{m_i^2 + m_j^2}}, \\ p'_i &= \gamma_u (p - uE_i) = \frac{\gamma_u p}{E_i + E_j} (E_j - E_i) \approx \frac{m_j^2 - m_i^2}{2\sqrt{2}\sqrt{m_i^2 + m_j^2}}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где приближенное равенство снова справедливо для $m_i \ll p$. Несмотря на довольно непривычный вид E'_i и p'_i , зависящий от обоих индексов i, j , нетрудно убедиться в том, что $(E'_i)^2 - (p'_i)^2 = m_i^2$.

В системе центра масс ур. (3.17) следует заменить на

$$e^{-i(E_i - E_j)t} \rightarrow e^{-i(E'_i t'_i - p'_i x'_i) + i(E'_j t'_j - p'_j x'_j)} = e^{-i\tau((E'_i - E'_j) - (p'_i - p'_j))}. \quad (3.22)$$

Используя ур. (3.21), получим как выглядит интерференционная экспонента в системе центра масс пары нейтрино ν_i и ν_j :

$$e^{-i(E'_i t'_i - p'_i x'_i) + i(E'_j t'_j - p'_j x'_j)} \approx e^{-i\tau \frac{m_i^2 - m_j^2}{\sqrt{\frac{m_i^2 + m_j^2}{2}}}}. \quad (3.23)$$

Время осцилляций нейтрино в системе центра масс можно получить из условия

$$(\tau + T) \frac{m_i^2 - m_j^2}{\sqrt{\frac{m_i^2 + m_j^2}{2}}} = \tau \frac{m_i^2 - m_j^2}{\sqrt{\frac{m_i^2 + m_j^2}{2}}} + 2\pi, \quad (3.24)$$

что дает

$$T = \frac{2\pi \sqrt{\frac{m_i^2 + m_j^2}{2}}}{m_i^2 - m_j^2}. \quad (3.25)$$

Сделав обратное преобразование в лабораторную систему, мы вернемся к стандартному результату

$$e^{-i(E'_i t'_i - p'_i x'_i) + i(E'_j t'_j - p'_j x'_j)} \approx e^{-i\tau \frac{m_i^2 - m_j^2}{\sqrt{\frac{m_i^2 + m_j^2}{2}}}} \approx e^{-it \frac{m_i^2 - m_j^2}{2p}}, \quad (3.26)$$

опровергая, тем самым утверждение работы [138].

3.4 Плосковолновая теория осцилляций нейтрино в веществе

Нейтрино, распространяясь сквозь вещество, рассеивается на частицах вещества. Электронные нейтрино ν_e могут рассеиваться на электронах посредством обмена W^+ бозонов, в то время как ν_μ, ν_τ нейтрино в таких реакциях не участвуют. Присутствие электронов и отсутствие мюонов и тау-лептонов в веществе приводит к недиагональной (в ароматном базисе) добавке в гамильтониан взаимодействия $\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{H}^{\text{int}}$, что может быть важным для осцилляций нейтрино.

Энергия $\sqrt{2}G_F n_e$, отвечающая в гамильтониане взаимодействия упругому рассеянию $\nu_e e \rightarrow \nu_e e$, составляет $(10^{-10} - 10^{-11})$ эВ в центре Солнца. Эта величина мала по сравнению с характерной энергией солнечных нейтрино $0.1 - 15$ МэВ. Однако она оказывается одного порядка с разницей энергий $\Delta E_{ij} = \Delta m_{ij}^2 / 2E_\nu$ при $\Delta m^2 \simeq 10^{-4} - 10^{-5}$ эВ² и E_ν на уровне нескольких МэВ. Для таких энергий и Δm^2 нельзя пренебречь влиянием вещества на картину осцилляций.

3.4.1 Представления или выбор удобного базиса

Запишем уравнение Шредингера для состояния нейтрино $|\nu(t)\rangle$:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\nu(t)\rangle = \hat{H} |\nu(t)\rangle. \quad (3.27)$$

Состояние $|\nu(t)\rangle$ может быть представлено как линейная комбинация базисных векторов. Рассмотрим три ортогональных набора базисных векторов с определенным импульсом.

- $|\nu_i(p)\rangle$ – состояние нейтрино с определенными массой m_i и импульсом p . Это состояние является собственным состоянием операторов импульса и свободного гамильтониана.
- $|\nu_\alpha(p)\rangle$ – состояние нейтрино с определенным ароматом. $|\nu_\alpha(p)\rangle$ является собственным состоянием оператора импульса, но не является собственным состоянием свободного гамильтониана.
- $|\tilde{\nu}_i(t; p)\rangle$ – собственное состояние гамильтониана, включающего в себя взаимодействие. Собственное значение гамильтониана обозначим $\tilde{E}_i(\mathbf{x}(t); p)$.

Представим $|\nu(t)\rangle$ через каждое из этих состояний:

$$\begin{aligned} |\nu(t)\rangle &= \sum_i \psi_i(t; p) |\nu_i(p)\rangle, & \text{с } \psi_i(t; p) &= \langle \nu_i(p) | \nu(t) \rangle, \\ &= \sum_\alpha \psi_\alpha(t; p) |\nu_\alpha(p)\rangle, & \text{с } \psi_\alpha(t; p) &= \langle \nu_\alpha(p) | \nu(t) \rangle, \\ &= \sum_i \tilde{\psi}_i(t; p) |\tilde{\nu}_i(t; p)\rangle, & \text{с } \tilde{\psi}_i(t; p) &= \langle \tilde{\nu}_i(t; p) | \nu(t) \rangle. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Связь базисных состояний можно получить, используя

$$|\nu_\alpha(p)\rangle = \sum_i V_{\alpha i}^* |\nu_i(p)\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^*(t; p) |\tilde{\nu}_i(t; p)\rangle, \quad (3.29)$$

где $U(t; p)$ – унитарная матрица смешивания в веществе, которую мы обсуждаем далее. Заметим, что $U(t; p)$ не постоянная матрица, в отличие от V . $U(t; p)$ зависит от времени и импульса. Нетрудно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} |\nu_i(p)\rangle &= \sum_j (VU^\dagger(t; p))_{ij} |\tilde{\nu}_j(t; p)\rangle = \sum_\alpha V_{i\alpha} |\nu_\alpha(p)\rangle, \\ |\tilde{\nu}_i(t; p)\rangle &= \sum_j (U(t; p)V^\dagger)_{ij} |\nu_j(p)\rangle = \sum_\alpha U_{i\alpha}(t; p) |\nu_\alpha(p)\rangle. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Матричные элементы гамильтониана. Чтобы записать уравнение Шредингера в любом из представлений, необходимо уметь вычислять матричные элементы гамильтониана в выбранном базисе. Это легко сделать, используя ур. (3.29) и ур. (3.30). Если, к примеру, матричные элементы гамильтониана известны в базисе ароматов нейтрино

$$H_{\alpha\beta} = \langle \nu_\beta(p) | \hat{H} | \nu_\alpha(p) \rangle \quad (3.31)$$

тогда в вакуумном массовом:

$$H_{ij} = \langle \nu_j(p) | \hat{H} | \nu_i(p) \rangle = \sum_{\alpha\beta} V_{i\alpha} V_{\beta j}^\dagger \langle \nu_\beta(p) | \hat{H} | \nu_\alpha(p) \rangle = (V H_f V^\dagger)_{ij}, \quad (3.32)$$

где H_f матрица с матричными элементами в базисе ароматов. Наконец, в базисе собственных состояний гамильтониана в веществе, матричные элементы гамильтониана

$$\tilde{H}_{ij} = \langle \tilde{\nu}_j(p) | \hat{H} | \tilde{\nu}_i(p) \rangle = \sum_{\alpha\beta} U_{i\alpha}(t;p) U_{\beta j}^\dagger(t;p) \langle \nu_\beta(p) | \hat{H} | \nu_\alpha(p) \rangle = (U H_f U^\dagger)_{ij}. \quad (3.33)$$

Матрица \tilde{H} диагональна в базисе собственных состояний гамильтониана в веществе, поэтому $|\tilde{\nu}_i(p)\rangle$ – собственное состояние \hat{H} :

$$\hat{H} |\tilde{\nu}_i(t;p)\rangle = \tilde{E}_i(\mathbf{x}(t);p) |\tilde{\nu}_i(t;p)\rangle.$$

Матричный элемент

$$\tilde{H}_{ij} = \tilde{E}_i(\mathbf{x}(t);p) \delta_{ij}. \quad (3.34)$$

Уравнение Шредингера в базисе собственных массовых состояний в вакууме. Умножив ур. (3.27) на $\langle \nu_i(p) |$, получаем

$$\begin{aligned} \langle \nu_i(p) | i \frac{\partial}{\partial t} | \nu(t) \rangle &= \langle \nu_i(p) | \hat{H} | \nu(t) \rangle, \\ i \frac{\partial}{\partial t} \psi_i(t;p) &= \hat{H}_{ij} \psi_j(t;p), \end{aligned} \quad (3.35)$$

где матричные элементы гамильтониана:

$$H_{ij} = H_{ij}^0 + H_{ij}^{\text{int}} = \left(p + \frac{m_i^2}{2p} \right) \delta_{ij} + V_{ei}^* V_{ej} \sqrt{2} G_F n_e(\mathbf{x}). \quad (3.36)$$

Уравнение Шредингера в базисе собственных состояний аромата. Умножив ур. (3.27) на $\langle \nu_\alpha(p) |$, получаем

$$\begin{aligned} \langle \nu_\alpha(p) | i \frac{\partial}{\partial t} | \nu(t) \rangle &= \langle \nu_\alpha(p) | \hat{H} | \nu(t) \rangle, \\ i \frac{\partial}{\partial t} \psi_\alpha(t;p) &= \hat{H}_{\alpha\beta} \psi_\beta(t;p), \end{aligned} \quad (3.37)$$

где матричные элементы гамильтониана:

$$H_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}^0 + H_{\alpha\beta}^{\text{int}} = p \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2p} (V^\dagger M^2 V)_{\alpha\beta} + \sqrt{2} G_F n_e \delta_{\alpha e} \delta_{\beta e}, \quad (3.38)$$

где $M^2 = \text{diag}(m_1^2, m_2^2, m_3^2)$.

Уравнение Шредингера в базисе собственных состояний в веществе. Умножив ур. (3.27) на $\langle \tilde{\nu}_i(t; p) |$, получаем

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nu}_i(t; p) | i \frac{\partial}{\partial t} | \nu(t) \rangle &= \langle \tilde{\nu}_i(t; p) | \hat{H} | \nu(t) \rangle, \\ i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}_i(t; p) &= \tilde{E}_i(t; p) \tilde{\psi}_i(t; p) + \left(i \frac{\partial}{\partial t} \langle \tilde{\nu}_i(t; p) | \right) | \nu(t) \rangle, \end{aligned} \quad (3.39)$$

3.4.2 Решение для вещества с постоянной плотностью

Рассмотрим для простоты случай двух нейтрино и постоянной плотности. Тогда матрица \tilde{H}

$$\tilde{H} = U(t; p) H_f U^\dagger(t; p) = \begin{pmatrix} \tilde{E}_1(t; p) & 0 \\ 0 & \tilde{E}_2(t; p) \end{pmatrix} = p + \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} \tilde{m}_1^2 & 0 \\ 0 & \tilde{m}_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

принимает диагональный вид в результате диагонализации $U^\dagger H_f U$ при помощи матрицы поворота

$$U = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta} & \sin \tilde{\theta} \\ -\sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

с углом $\tilde{\theta}$, определяемым соотношением

$$\sin^2 2\tilde{\theta} = \frac{\sin^2 2\theta}{(\cos 2\theta - A/\Delta m^2)^2 + \sin^2 2\theta}. \quad (3.42)$$

Вакуумные квадраты масс нейтрино в веществе заменяются на эффективные:

$$\tilde{m}_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(m_1^2 + m_2^2 + A \mp \Delta m^2 \sqrt{(\cos 2\theta - A/\Delta m^2)^2 + \sin^2 2\theta} \right), \quad (3.43)$$

где $A = 2\sqrt{2}G_F n_e p$. Разность квадратов масс есть:

$$\Delta \tilde{m}^2 = \Delta m^2 \frac{\sin 2\theta}{\sin 2\tilde{\theta}}. \quad (3.44)$$

Собственные состояния нейтрино в веществе можно выразить в виде линейной комбинации состояний нейтрино с определенным ароматом или посредством вакуумных состояний с определенной массой:

$$|\tilde{\nu}_1\rangle = |\nu_e\rangle \cos \tilde{\theta} - |\nu_\mu\rangle \sin \tilde{\theta} = |\nu_1\rangle \cos(\tilde{\theta} - \theta) - |\nu_2\rangle \sin(\tilde{\theta} - \theta), \quad (3.45)$$

$$|\tilde{\nu}_2\rangle = |\nu_e\rangle \sin \tilde{\theta} + |\nu_\mu\rangle \cos \tilde{\theta} = |\nu_1\rangle \sin(\tilde{\theta} - \theta) + |\nu_2\rangle \cos(\tilde{\theta} - \theta). \quad (3.46)$$

Длина осцилляций нейтрино в веществе равна

$$\tilde{L}^{\text{osc}} = L^{\text{osc}} \frac{\sin 2\tilde{\theta}}{\sin 2\theta}.$$

В случае среды с постоянной плотностью, член $(i \frac{\partial}{\partial t} \langle \tilde{\nu}_i(t; p) |) |\nu(t)\rangle$ в ур. (3.39) равен нулю, и ур. (3.39) решается в полной аналогии с вакуумным случаем. В частности, вероятность осцилляций записывается в точности так же, как в вакууме, но с заменами $\theta \rightarrow \tilde{\theta}$, $L^{\text{osc}} \rightarrow \tilde{L}^{\text{osc}}$:

$$P_{e\mu} = \sin^2 2\tilde{\theta} \sin^2 \pi L / \tilde{L}^{\text{osc}}, \quad P_{ee} = 1 - \sin^2 2\tilde{\theta} \sin^2 \pi L / \tilde{L}^{\text{osc}}.$$

Рассматривая, для определенности, случай $|\theta| < \pi/4$, нетрудно видеть, что $|\nu_1\rangle$ дает наибольший вклад в $|\nu_e\rangle$. Вещество может как усиливать, так и ослаблять осцилляции в зависимости от знака Δm^2 . Для $\Delta m^2 < 0$ получаем, что $\tilde{\theta} < \theta$, и в этом случае вещество ослабляет смешивание нейтрино и осцилляции. Разница квадратов масс $\Delta \tilde{m}^2$ увеличивается по модулю, по сравнению с вакуумным случаем. В случае $\Delta m^2 > 0$, угол $\tilde{\theta}$ может достичь своего максимального значения $\pi/2$ даже при малом значении в вакууме. При этом, осцилляции нейтрино усиливаются, а модуль $\Delta \tilde{m}^2$ уменьшается по сравнению с вакуумным случаем.

Обсудим три важных физических случая осцилляций нейтрино в веществе более подробно.

- $A \rightarrow 0$ соответствует пренебрежимо малой плотности числа электронов $n_e \rightarrow 0$. В этом случае, осцилляции в веществе совпадают с вакуумными:

$$\tilde{\theta} \rightarrow \theta, \quad |\tilde{\nu}_1\rangle = |\nu_1\rangle \text{ и } |\tilde{\nu}_2\rangle = |\nu_2\rangle.$$

- $A \rightarrow \infty$ соответствует бесконечно большой плотности числа электронов $n_e \rightarrow \infty$. Тогда, $\tilde{\theta} \rightarrow \pi/2$, $|\tilde{\nu}_1\rangle = -|\nu_\mu\rangle$ и $|\tilde{\nu}_2\rangle = |\nu_e\rangle$. Осцилляции нейтрино в этом пределе сильно подавлены:

$$P_{e\mu} = \left(\frac{\Delta m^2}{A} \right)^2 \sin^2 2\theta \sin^2 \pi LA / 2p \ll 1.$$

- $A \rightarrow \Delta m^2 \cos 2\theta$. В этом случае в осцилляциях нейтрино наблюдается резонансный эффект: $\tilde{\theta} \rightarrow \pi/4$. Длина осцилляций становится $\tilde{L}^{\text{osc}} = L^{\text{osc}} / \sin 2\theta$ и вероятность осцилляций $P_{e\mu} = \sin^2 \pi (\sin 2\theta L / L^{\text{osc}})$. Резонансная плотность

$$n_e^{\text{res}} = \frac{\Delta m^2 \cos 2\theta}{2\sqrt{2}G_F p}$$

зависит от импульса нейтрино p . Таким образом, в веществе с постоянной плотностью можно наблюдать $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ переходы для энергий нейтрино, удовлетворяющих соотношению $n_e p = \Delta m^2 \cos 2\theta / 2\sqrt{2}G_F$. Заметим, что одного резонанса не достаточно для полного перехода $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$, поскольку обратный процесс $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ происходит столь же эффективно.

3.4.3 Решение для вещества с медленно меняющейся плотностью.

Адиабатическое приближение

Рассмотрим теперь более реалистичный случай среды с медленно меняющейся плотностью. То, насколько медленно меняется плотность, будет уточнено далее. Плотность вещества зависит от положения в пространстве \mathbf{x} . В случае медленно меняющейся плотности, можно пренебречь

членом с производной по времени $(i \frac{\partial}{\partial t} \langle \tilde{\nu}_i(t; p) | | \nu(t) \rangle)$ в ур. (3.39) и решить это уравнение, учитывая зависимость от времени собственных значений гамильтониана. Такое приближение называется *адиабатическим*. Параметр γ , ответственный за аккуратность этого приближения называется параметром адиабатичности [139]:

$$\gamma = \frac{1}{4p} \left[\frac{\Delta \tilde{m}^2}{\dot{\theta}} \right]. \quad (3.47)$$

Адиабатическое приближение работает тем лучше, чем больше γ . Для оценки плотности числа электронов в Солнце возьмем следующую параметризацию

$$n_e(r) = n_0 \exp \left[-\frac{r}{r_0} \right], \quad (3.48)$$

где n_0 соответствует плотности вещества $\simeq 150 \text{ г/см}^3$, $r_0 = \frac{R_\odot}{10.56}$, что позволяет оценить

$$\gamma \simeq 2 \cdot 10^4 \left(\frac{\text{МэВ}}{p} \right). \quad (3.49)$$

Таким образом, для Солнца и импульса нейтрино в диапазоне (0.2МэВ – 16МэВ), $\gamma \gg 1$ и адиабатическое приближение будет достаточно аккуратным. Вычисленная для Солнца зависимость параметра адиабатичности γ от энергии нейтрино приведена на рис. 3.1.

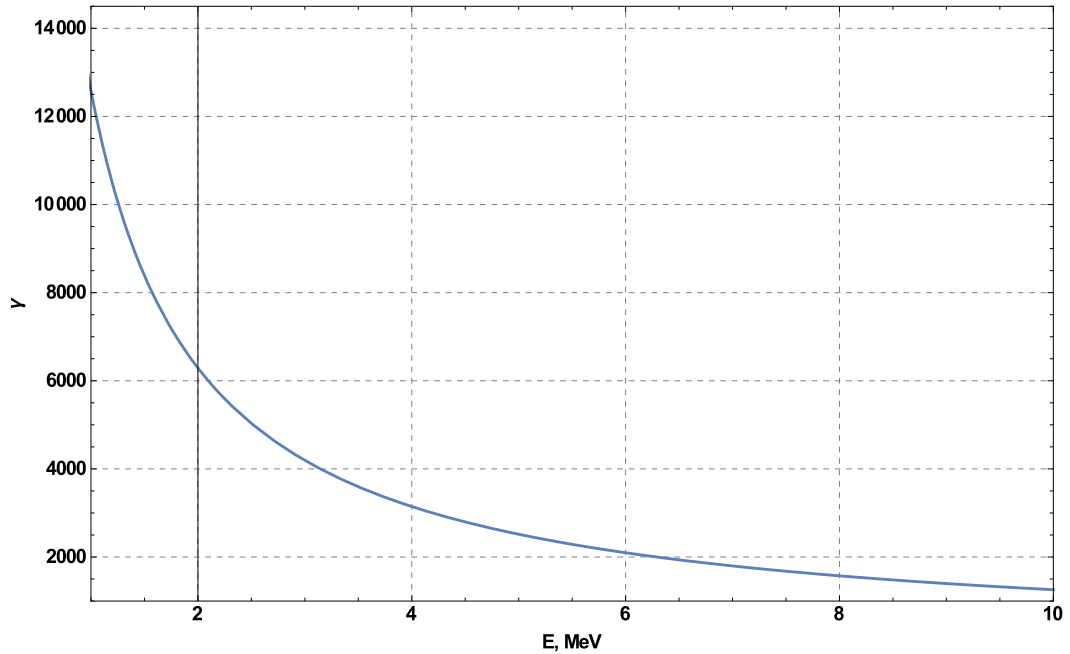


Рисунок 3.1 — Параметр адиабатичности γ в зависимости от энергии нейтрино, вычисленный для Солнца.

В адиабатическом приближении, решение ур. (3.39)

$$\tilde{\psi}_i(t; p) = \exp \left(-i \int_0^t d\tau \tilde{E}_i(\mathbf{x}(\tau); p) \right) \tilde{\psi}_i(t_0; p). \quad (3.50)$$

Заметим, что в случае адиабатического изменения плотности числа электронов, все три режима осцилляций нейтрино в веществе, обсуждаемые выше, реализуются при распространении нейтрино от центра Солнца наружу. На рис. 3.2 в зависимости от энергии нейтрино приведена вероятность выживания ν_e , рожденного в Солнце. Обсудим на качественном уровне результаты модели, представленные на рисунке.

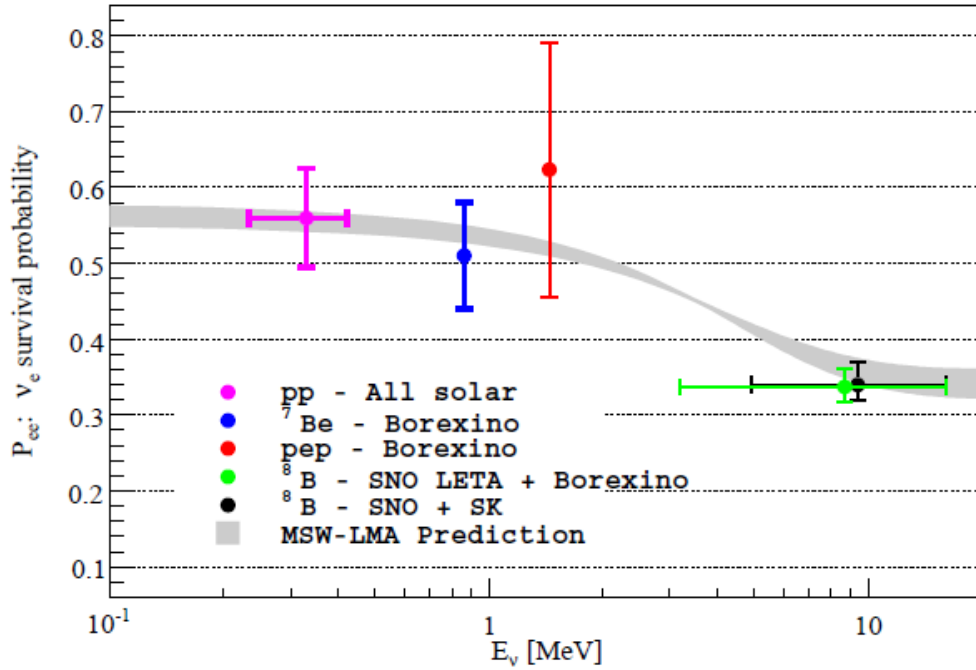


Рисунок 3.2 — Вероятность выживания электронного нейтрино, рожденного в Солнце, как функция энергии этой частицы. Модельные предсказания (заштрихованная область), данные (точки с ошибками). Рисунок взят из работы [140].

- Нейтрино с энергиями меньше 1 МэВ почти не испытывают влияния вещества и их осцилляции определяются вакуумной формулой. Интегрирование по объему Солнца усредняет осцилляционный член $\langle \sin^2 \pi L / L^{\text{osc}} \rangle = \frac{1}{2}$. Поэтому, следует ожидать

$$\langle P_{ee} \rangle = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta.$$

- Нейтрино с энергиями от 1 МэВ до 6 МэВ испытывают влияние резонанса (эффект Михеева-Смирнова-Вольфенштейна (МСВ), в результате которого быстрые осцилляции с почти максимальной амплитудой $\sin^2 2\tilde{\theta} \simeq 1$ усредняют $\langle \sin^2 \pi L / L^{\text{osc}} \rangle = \frac{1}{2}$. Поэтому, следует ожидать в среднем

$$\langle P_{ee} \rangle = \frac{1}{2}$$

с плавным переходом от вакуумных осцилляций к сильному влиянию вещества, соответствующему $A \rightarrow \infty$ при больших энергиях нейтрино.

- При энергиях нейтрино выше 6-8 МэВ, A становится достаточно большой, чтобы $|\nu_e\rangle \simeq |\tilde{\nu}_2\rangle$ в точке рождения. Поскольку $|\tilde{\nu}_2\rangle$ – собственное состояние гамильтониана на всем пути вдоль траектории нейтрино от точки рождения до выхода из Солнца и благодаря выполнению условия адиабатичности, нейтрино остается в состоянии $|\tilde{\nu}_2\rangle$ пока $|\tilde{\nu}_2\rangle$ не превратится в вакуумное состояние $|\nu_2\rangle$. Далее, достигнув Земли, $|\nu_2\rangle$ взаимодействует с электроном с вероятностью, пропорциональной $\sin^2 \theta$. Поэтому, в этом случае, следует ожидать

$$\langle P_{ee} \rangle = \sin^2 \theta.$$

Все обсуждаемые особенности нейтринных осцилляций в Солнце отражены на рис. 3.2.

3.5 Неполнота и парадоксы плосковолнового приближения. Обзор предлагаемых решений

Представленная в этой главе теория нейтринных осцилляций в вакууме и веществе довольно проста и богата предсказаниями, многие из которых подтверждены экспериментом. Первые варианты теории были разработаны в середине 1970х [141—143]. Несмотря на успешное применение при описании экспериментальных данных, используемое плосковолновое приближение несамосогласованно и приводит к ряду парадоксов [144; 145]. Применимость плосковолнового приближения подробно обсуждается в работах [23; 27; 28; 144]. Мы приведем лишь несколько критических замечаний, которые представляются существенными для понимания сути проблемы.

Перечислим ключевые предположения и приближения, используемые при выводе формулы, описывающей вероятность осцилляций нейтрино:

- (I) в процессах рождения и детектирования нейтрино взаимодействует когерентная суперпозиция состояний с определенной массой m_i ($i = 1, 2, 3$), часто называемая состоянием с определенным ароматом $|\nu_\alpha\rangle = \sum_i V_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle$, где $V_{\alpha i}$ – матричные элементы унитарной вакуумной матрицы смешивания Понтекорво–Маки–Накагавы–Сакаты;
- (II) состояния $|\nu_i\rangle$ обладают определенными импульсами \mathbf{p}_i ;
- (III) все импульсы \mathbf{p}_i одинаковы ($\mathbf{p}_i = \mathbf{p}$);
- (IV) нейтрино являются ультрарелятивистскими, т.е. $\mathbf{p}^2 \gg \max(m_i^2)$;
- (V) время распространения нейтрино заменяется пройденным расстоянием $t = L$.

Обсудим критически каждое из этих положений. Предположение (I) о том, что в процессах рождения и детектирования нейтрино взаимодействует как состояние $|\nu_\alpha\rangle$ представляется, на первый взгляд, вполне естественным. Более того, в литературе часто можно встретить утверждение, звучащее как очевидная парадигма, о том, что нейтрино взаимодействует как состояние аромата, а эволюционирует как массовое. Однако, как вписать в такую парадигму рассмотренный выше случай осцилляций нейтрино в веществе Солнца с энергиями выше 6-8 МэВ, при которых из Солнца выходит и взаимодействует на Земле состояние $|\nu_2\rangle$? Более того, после обнаружения ненулевых масс нейтрино, состояние $|\nu_\alpha\rangle = \sum_i V_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle$ столь же обоснованно, как и состояние $|\ell_i\rangle = \sum_\alpha V_{\alpha i}^* |\ell_\alpha\rangle$, поскольку такие переопределения оставляют лагранжиан СМ (см. ур. (1.1)) инвариантным. Тогда будет уместно задать вопрос: “может ли родиться и взаимодействовать когерентная суперпозиция состояний $|\ell_i\rangle = \sum_\alpha V_{\alpha i}^* |\ell_\alpha\rangle$, и можно ли наблюдать осцилляции заряженных лептонов по аналогии с нейтрино?” Поскольку экспериментальных свидетельств осцилляций заряженных лептонов мы пока не имеем, следует признать, что они рождаются (и взаимодействуют) некогерентно. Поэтому, предположение (I) для заряженных лептонов нарушается и, в общем случае, требует количественного обоснования.

Обратимся теперь к предположению (II) и рассмотрим, в качестве примера, распад $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$. Поскольку состояние $|\nu_\mu\rangle$ не имеет определенной энергии, то по крайней мере у одной из двух других участвующих в распаде частиц энергия тоже не определена. Поскольку же пион и мюон обладают определенными массами, то у одной из этих частиц (или у обеих) нет и определенного импульса. Но тогда и нейтрино не может иметь определенного импульса, что противоречит (II).

Еще один аргумент против этого предположения состоит в том, что при полностью определенном импульсе пространственные координаты областей рождения и поглощения нейтрино (источника и детектора), а значит и расстояние между этими областями, входящее в формулу для вероятности переходов ароматов, полностью неопределенны.

Здесь уместно вспомнить, что нестабильная частица не может обладать определенным 4-импульсом уже потому, что пространственная делокализация такой частицы ограничена величиной порядка ее распадного пробега. Другими словами, неопределенность 4-импульса частицы заведомо не может быть меньше ее распадной ширины. Как следствие, нейтрино, возникающие в результате распадов частиц, тоже не могут иметь определенных импульсов, т.е. предположение (II) может быть разве лишь приближением, адекватность которого может быть проверена только в рамках более общей теории.

Предположение (III), равно как и аналогичное предположение о равенстве энергий, которое встречается в литературе, противоречит релятивистской инвариантности. В самом деле, пусть предположение (III) справедливо в лабораторной системе отсчета K . Но тогда в системе отсчета K' , движущейся относительно K со скоростью \mathbf{v} , уже не только энергии E'_i , но и импульсы \mathbf{p}'_i не равны друг другу, поскольку из преобразований Лоренца следует, что

$$E'_i - E'_j = \Gamma_{\mathbf{v}} (E_i - E_j) \neq 0, \quad \mathbf{p}'_i - \mathbf{p}'_j = \Gamma_{\mathbf{v}} (E_j - E_i) \mathbf{v} \neq 0, \quad \Gamma_{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}. \quad (3.51)$$

Нетрудно видеть, в частности, что $|\mathbf{p}'_i - \mathbf{p}'_j| \geq |E_i - E_j| \approx |m_i^2 - m_j^2|/(2|\mathbf{p}|)$ при $|\mathbf{v}| \geq 1/\sqrt{2}$. Если скорость системы K' удовлетворяет условию $\Gamma_{\mathbf{v}} \ll \min(E'_i/m_i)$, то нейтрино все еще остаются ультрарелятивистскими в K' , т.е. условие (IV) выполняется, но условие (III) нарушается. Разумеется, это нарушение ничтожно, если скорость \mathbf{v} мала, а точнее, если $|\mathbf{v}\mathbf{p}| \ll |\mathbf{p}|$. В общем же случае, трактуя преобразование Лоренца как активное, заключаем, что условие (III) не может одновременно выполняться для пучков нейтрино, вылетающих из одинаковых, но движущихся с разными скоростями источников.

Условие (IV) констатирует: (а) массы известных нейтрино чрезвычайно малы (заведомо меньше 1-2 эВ) и (б) современные методы детектирования не позволяют зарегистрировать нейтрино с энергией ниже ~ 100 кэВ; так что нейтринные эксперименты действительно имеют дело исключительно с ультрарелятивистскими нейтрино. Однако, это условие не выполняется для реликтовых нейтрино.

Наконец, обратимся к условию (V). Это условие не эквивалентно и не следует из условия (IV), позволяющее сделать разложение $E_i \simeq p + m_i^2/2p + \dots$, поскольку в (IV) сохраняется не только первый член разложения $E = p$, но и второй, а в некоторых работах, и третий. Условие (V), напротив, использует только первый член разложения $t = L$. Приведем, для начала, элементарную выкладку, учитывающую точную связь времени t и пройденных расстояний состояниями $|\nu_k\rangle$ и $|\nu_j\rangle$:

$$t = \frac{L_k}{v_k} = \frac{L_j}{v_j},$$

что позволяет переписать осцилляционную фазу $(E_k - E_j)t$ в виде:

$$(E_k - E_j)t = \frac{E_k L_k}{v_k} - \frac{E_j L_j}{v_j} = \frac{E_k^2 L_k}{p} - \frac{E_j^2 L_j}{p} \approx \frac{(E_k^2 - E_j^2)L}{p} = \frac{\Delta m_{kj}^2}{p},$$

где в предпоследнем равенстве было сделано приближение $L_k \approx L_j \approx L$. В итоге, получилась в два раза большая фаза осцилляций по сравнению с ур. (3.16). Этот обескураживающий результат – следствие произвольного обращения порядками малости $\frac{\Delta m_{kj}^2}{p^2}$, присущего как только что представленному “альтернативному выводу”, так и самому условию (V). Можно задаться таким вопросом: “Почему разница между временами детектирования и рождения нейтрино t приравнивается расстоянию L ? В большей части экспериментов время рождения нейтрино неизвестно, поэтому необходимо по нему проинтегрировать.” Прделав такое интегрирование, мы обнаружим, что все интерференционные члены исчезают, поскольку $\int dt \exp[-i(E_k - E_j)t] \propto \delta(E_k - E_j)$, т.е. в этом случае

$$\langle P_{\alpha\beta}(t) \rangle_t \propto \sum_k |V_{\alpha k}|^2 |V_{\beta k}|^2. \quad (3.52)$$

Теория нейтринных осцилляций основана на гипотезах (I)-(V). При этом, только условие (IV) выполняется для современных экспериментов, нарушаясь, однако, для реликтовых нейтрино. Условия (II), (III) с очевидностью нефизичны. Условие (I) требует количественного обоснования. Условие (V) необоснованно. Небольшие поправки к этому условию приводят к большим изменениям в итоговой формуле вероятности нейтринных осцилляций.

После создания первых вариантов плосковолновой теории, в работах [146—149] была указана необходимость описания осцилляций нейтрино в рамках модели с волновым пакетом.

3.6 Общие свойства волнового пакета

Рассмотрим волновой пакет при $t = 0$:

$$|\psi(0)\rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\rangle, \quad (3.53)$$

где $\langle \mathbf{q} | \mathbf{p} \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{p})$. Эволюция состояния в ур. (3.53) со временем дается

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi(0)\rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-iE_{\mathbf{p}} t} \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\rangle, \quad (3.54)$$

чему в координатном пространстве соответствует волновая функция

$$\psi_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-iE_{\mathbf{p}} t + i\mathbf{p}\mathbf{x}} \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}). \quad (3.55)$$

Состояние в ур. (3.54) нормируем на единицу:

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} |\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{p})|^2 = 1. \quad (3.56)$$

Определим средние энергию, импульс и скорость пакета следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{H}_0 | \psi(t) \rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} |\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{p})|^2 E_{\mathbf{p}}, \\ \langle \mathbf{P} \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{\mathbf{P}} | \psi(t) \rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} |\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{p})|^2 \mathbf{p}, \\ \langle \mathbf{v} \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{\mathbf{V}} | \psi(t) \rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} |\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{p})|^2 \mathbf{v}_{\mathbf{p}}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

где одночастичный оператор скорости определен при помощи

$$\hat{V} = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathbf{v}_p |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}|. \quad (3.58)$$

Волновой пакет по некоторым своим свойствам похож на классический объект: у него сохраняется энергия и импульс и он движется по классической траектории. Чтобы доказать последнее утверждение, сделаем явное вычисление.

3.6.1 Средняя траектория волнового пакета

По определению, средняя координата волнового пакета есть:

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \langle \psi(t) | \hat{X} | \psi(t) \rangle. \quad (3.59)$$

Явным вычислением найдем правую часть ур. (3.59), выразив $|\psi(t)\rangle$ согласно ур. (3.54), воспользовавшись тем, что $|\mathbf{p}\rangle = \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} |\mathbf{x}\rangle$ и очевидным свойством $\hat{X} |\mathbf{x}\rangle = \mathbf{x} |\mathbf{x}\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | \hat{X} | \psi(t) \rangle &= \int \frac{d\mathbf{k}d\mathbf{q}}{(2\pi)^6} \psi_p^*(\mathbf{q}) \psi_p(\mathbf{k}) e^{-i(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{q}})t} \langle \mathbf{q} | \int d\mathbf{x} \mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} |\mathbf{x}\rangle \\ &= \int \frac{d\mathbf{k}d\mathbf{q}}{(2\pi)^6} \psi_p^*(\mathbf{q}) \psi_p(\mathbf{k}) e^{-i(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{q}})t} \int d\mathbf{x} \mathbf{x} e^{+i(\mathbf{k} - \mathbf{q})\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

где мы использовали $\langle \mathbf{q} | \mathbf{x} \rangle = e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}}$. Чтобы снять интеграл по $\int d\mathbf{x}$ воспользуемся

$$\int d\mathbf{x} \mathbf{x} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{q})\mathbf{x}} = \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right) \int d\mathbf{x} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{q})\mathbf{x}} = \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right) (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \quad (3.61)$$

Тогда,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}(t) \rangle &= \frac{1}{2i} \int \frac{d\mathbf{k}d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \psi_p^*(\mathbf{q}) \psi_p(\mathbf{k}) e^{-i(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{q}})t} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \\ &= -\frac{1}{2i} \int \frac{d\mathbf{k}d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right) \psi_p^*(\mathbf{q}) \psi_p(\mathbf{k}) e^{-i(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{q}})t} \\ &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\psi_p(\mathbf{k})|^2 \mathbf{v}_k t = \langle \mathbf{v} \rangle t, \end{aligned} \quad (3.62)$$

где $\langle \mathbf{v} \rangle$ дается третьей строчкой из ур. (3.57). Чтобы перейти от первой строчки ко второй в ур. (3.62), мы воспользовались интегрированием по частям. Таким образом, доказано, что в среднем координата волнового пакета следует классической траектории:

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle t. \quad (3.63)$$

При выводе мы предполагали явно, что средняя координата волнового пакета равна нулю при $t = 0$.

3.6.2 Расплывание волнового пакета в конфигурационном пространстве

Волновой пакет расплывается со временем. Покажем это явным вычислением. По определению, дисперсия пространственной координаты есть

$$\sigma_x^2(t) = \langle \mathbf{x}^2(t) \rangle - \langle \mathbf{x}(t) \rangle^2. \quad (3.64)$$

Вычислим $\langle \mathbf{x}^2(t) \rangle$:

$$\langle \mathbf{x}^2(t) \rangle \equiv \langle \psi(t) | \hat{\mathbf{X}}^2 | \psi(t) \rangle = \int d\mathbf{x} \mathbf{x}^2 \int \frac{d\mathbf{k}d\mathbf{q}}{(2\pi)^6} \psi_p^*(\mathbf{q}) \psi_p(\mathbf{k}) e^{-i(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{q}})t + i(\mathbf{k} - \mathbf{q})\mathbf{x}}. \quad (3.65)$$

Воспользуемся приемом, аналогичным ур. (3.61):

$$\int d\mathbf{x} \mathbf{x}^2 e^{+i(\mathbf{k} - \mathbf{q})\mathbf{x}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{k}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}^2} \right) \int d\mathbf{x} e^{+i(\mathbf{k} - \mathbf{q})\mathbf{x}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{k}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}^2} \right) (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \quad (3.66)$$

и проинтегрируем в ур. (3.65) по частям аналогично ур. (3.62):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}^2 \rangle &= -\frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{k}d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{k}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}^2} \right) \psi_p^*(\mathbf{q}) \psi_p(\mathbf{k}) e^{-i(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{q}})t} \\ &= \langle \mathbf{v}^2 \rangle t^2 - \text{Re} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\psi_p^*(\mathbf{k}) \partial^2 \psi_p(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}^2}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Таким образом,

$$\sigma_x^2(t) = (\langle \mathbf{v}^2 \rangle - \langle \mathbf{v} \rangle^2) t^2 - \text{Re} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\psi_p^*(\mathbf{k}) \partial^2 \psi_p(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}^2}.$$

Выражение

$$- \text{Re} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\psi_p^*(\mathbf{k}) \partial^2 \psi_p(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}^2}$$

имеет смысл дисперсии в начальный момент времени $t = 0$:

$$\sigma_x^2(0) = - \text{Re} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\psi_p^*(\mathbf{k}) \partial^2 \psi_p(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}^2},$$

так что

$$\sigma_x^2(t) = \sigma_x^2(0) + (\langle \mathbf{v}^2 \rangle - \langle \mathbf{v} \rangle^2) t^2 = \sigma_x^2(0) + \sigma_v^2 t^2, \quad (3.68)$$

где $\sigma_v^2 = \langle \mathbf{v}^2 \rangle - \langle \mathbf{v} \rangle^2$ — дисперсия скорости волнового пакета. Мы получили общий закон для дисперсии нерелятивистского волнового пакета. Однако, этот результат не является новым, ранее он был получен в работе [150].

Исследуем теперь, как скорость расплывания волнового пакета зависит от релятивистских эффектов. Запишем σ_v^2 в следующем виде:

$$\sigma_v^2 = \langle \mathbf{v}^2 \rangle - \langle \mathbf{v} \rangle^2 = \langle \mathbf{v}_T^2 \rangle + \langle \mathbf{v}_L^2 \rangle - \langle \mathbf{v} \rangle^2 = \langle \mathbf{v}_T^2 \rangle + \langle (\mathbf{v}_L - \langle \mathbf{v} \rangle)^2 \rangle, \quad (3.69)$$

где $\langle \mathbf{v}_T^2 \rangle$ и $\langle \mathbf{v}_L^2 \rangle$ — средние квадраты продольной и поперечной проекций скорости волнового пакета относительно вектора средней скорости $\langle \mathbf{v} \rangle$, соответственно. Перепишем $\langle \mathbf{v}_T^2 \rangle$ и $\langle (\mathbf{v}_L - \langle \mathbf{v} \rangle)^2 \rangle$ через

переменные в системе покоя волнового пакета:

$$E_{\mathbf{k}} = \gamma_{\langle \mathbf{v} \rangle} (E_{\mathbf{k}}^* + \langle \mathbf{v} \rangle \mathbf{k}_L^*), \quad (3.70)$$

$$\mathbf{k}_L = \gamma_{\langle \mathbf{v} \rangle} (\mathbf{k}_L^* + \langle \mathbf{v} \rangle E_{\mathbf{k}^*}), \quad \mathbf{k}_T = \mathbf{k}_T^*, \quad (3.71)$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{k}L} = \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{k}L}^* + \langle \mathbf{v} \rangle}{1 + \mathbf{v}_{\mathbf{k}L}^* \langle \mathbf{v} \rangle}, \quad \gamma_{\langle \mathbf{v} \rangle} = \frac{1}{\sqrt{1 - \langle \mathbf{v} \rangle^2}} \quad (3.72)$$

следующим образом:

$$\langle \mathbf{v}_T^2 \rangle = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\psi_p(\mathbf{k})|^2 \mathbf{v}_{\mathbf{k}T}^2 = \frac{1}{\gamma_{\langle \mathbf{v} \rangle}^2} \int \frac{d\mathbf{k}^*}{(2\pi)^3} |\psi_p(\mathbf{k}^*)|^2 \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{k}T}^{*2}}{(1 + \langle \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}_{\mathbf{k}L}^*)^2} \quad (3.73)$$

и

$$\langle (\mathbf{v}_L - \langle \mathbf{v} \rangle)^2 \rangle = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\psi_p(\mathbf{k})|^2 (\mathbf{v}_{\mathbf{k}L} - \langle \mathbf{v} \rangle)^2 = \frac{1}{\gamma_{\langle \mathbf{v} \rangle}^4} \int \frac{d\mathbf{k}^*}{(2\pi)^3} |\psi_p(\mathbf{k}^*)|^2 \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{k}L}^{*2}}{(1 + \langle \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}_{\mathbf{k}L}^*)^2}. \quad (3.74)$$

Сравнивая ур. (3.73) с ур. (3.74), можно заметить, что в первом порядке для волновых пакетов достаточно узких в импульсном пространстве

$$\langle \mathbf{v}_T^2 \rangle = \frac{1}{\gamma_{\langle \mathbf{v} \rangle}^2} \langle \mathbf{v}_T^{*2} \rangle, \quad (3.75)$$

$$\langle (\mathbf{v}_L - \langle \mathbf{v} \rangle)^2 \rangle = \frac{1}{\gamma_{\langle \mathbf{v} \rangle}^4} \langle \mathbf{v}_L^{*2} \rangle. \quad (3.76)$$

Таким образом, в режиме полного расплывания, имея в виду, что в системе покоя волнового пакета $\langle \mathbf{v}_L^{*2} \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}_T^{*2} \rangle = \frac{1}{3} \langle \mathbf{v}^{*2} \rangle$, и, используя ур. (3.68), получаем:

$$\sigma_{xL}^2(t) = \frac{1}{3\gamma_{\langle \mathbf{v} \rangle}^4} \langle \mathbf{v}^{*2} \rangle t^2, \quad (3.77)$$

$$\sigma_{xT}^2(t) = \frac{2}{3\gamma_{\langle \mathbf{v} \rangle}^2} \langle \mathbf{v}^{*2} \rangle t^2, \quad (3.78)$$

$$\sigma_{xL}^2(t) = \frac{1}{2\gamma_{\langle \mathbf{v} \rangle}^2} \sigma_{xT}^2(t). \quad (3.79)$$

Скорость продольного расплывания волнового пакета в $1/\gamma_{\langle \mathbf{v} \rangle}$ раз медленнее скорости расплывания в поперечном направлении. Очевидно, что в системе покоя волнового пакета

$$\sigma_x^2(t) = \sigma_{xL}^2(t) + \sigma_{xT}^2(t) = \langle \mathbf{v}^{*2} \rangle t^2.$$

3.6.3 Поперечное расплывание волнового пакета ведет к закону обратных квадратов

Волновые пакеты расплываются со временем. Другими словами, пространственная дисперсия волнового пакета растет со временем, во время как его амплитуда уменьшается. Это хорошо известное и неизбежное свойство волновых пакетов часто рассматривается как их “недостаток”,

что стимулировало попытки найти решения стабильные во времени для ассоциации волнового пакета с частицей. В частности, хотя хорошо известно, что невозможно построить согласованную теорию рассеяния без волновых пакетов [151; 152], нередко можно встретить утверждение о том, что уменьшение со временем амплитуды волновых пакетов делает их не вполне адекватными объектами для начальных и конечных состояний, которые формально определены при $t = -\infty$ и $t = +\infty$, соответственно. Однако, как мы покажем в этом разделе, и это новый результат, расплывание волновых пакетов не критично для S -матричного формализма, поскольку оно имеет прозрачную интерпретацию. Расплывание волнового пакета приводит к подавлению, пропорциональному фактору $1/|\mathbf{x}|^2$, для проинтегрированной по времени вероятности обнаружить частицу на расстоянии \mathbf{x} от точки ее рождения, аналогично ансамблю классических частиц. Таким образом, полученный результат ведет к простым нормировочным факторам для начальных и конечных состояний, взятых при достаточно больших, но конечных временах.

В нашей работе [153] утверждение о природе закона обратных квадратов доказано тремя разными способами:

- для двух явных примеров формы $\psi_p(\mathbf{p})$, взятой в виде гауссовой функции – инвариантной и неинвариантной относительно релятивистских преобразований;
- для произвольной формы волнового пакета $\psi_p(\mathbf{p})$;
- исходя из уравнения непрерывности.

Если утверждение верное, то неудивительно, что его можно доказать из самых разных соображений. Тут мы приведем самое простое рассмотрение, основанное на уравнении непрерывности, которому удовлетворяют все известные уравнения движения – релятивистские и нерелятивистские.

Запишем уравнение непрерывности для произвольного квантового состояния со скалярной функцией $\rho(t, \mathbf{x}')$, являющейся плотностью вероятности обнаружить частицу в точке \mathbf{x}' в момент времени t , и с векторной функцией $\mathbf{j}(t, \mathbf{x}')$, являющейся плотностью потока:

$$\frac{\partial \rho(t, \mathbf{x}')}{\partial t} + \nabla \mathbf{j}(t, \mathbf{x}') = 0. \quad (3.80)$$

Уравнение (3.80) можно переписать тождественно:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{|\mathbf{x}'| \leq |\mathbf{x}|} d\mathbf{x}' \rho(t, \mathbf{x}') = - \int_S d\mathbf{S} \mathbf{j}(t, \mathbf{x}'), \quad (3.81)$$

где интегрирование ограничено сферой S с радиусом $|\mathbf{x}|$. Если радиус $|\mathbf{x}|$ достаточно большой, а время, напротив, настолько мало, что волновой пакет еще не успел расплыться (оба условия удовлетворяются, если $|\mathbf{x}| \gg \sigma_x(t)$), то следует ожидать, что интеграл равен единице из условия нормировки:

$$\int_{|\mathbf{x}'| \leq |\mathbf{x}|} d\mathbf{x}' \rho(t, \mathbf{x}') \approx 1$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{|\mathbf{x}'| \leq |\mathbf{x}|} d\mathbf{x}' \rho(t, \mathbf{x}')$$

ничтожно мало. Поэтому, правая часть ур. (3.81) также исчезающе мала. Это означает, что плотность потока должна убывать быстрее, чем $1/|\mathbf{x}|^2$. Пример гауссова волнового пакета, рассматриваемого далее, согласуется с этим утверждением.

Проинтегрируем теперь по времени от нуля до бесконечности правую и левую части ур. (3.81):

$$\int_{|\mathbf{x}'| \leq |\mathbf{x}|} d\mathbf{x}' \rho(\infty, \mathbf{x}') - \int_{|\mathbf{x}'| \leq |\mathbf{x}|} d\mathbf{x}' \rho(0, \mathbf{x}') = - \int_S d\mathbf{S} \Phi(\mathbf{x}'), \quad (3.82)$$

где $\Phi(\mathbf{x}') = \int_0^\infty dt \mathbf{j}(t, \mathbf{x}')$ – интеграл по времени от плотности потока. По определению,

$$P(t, |\mathbf{x}|) \equiv \int_{|\mathbf{x}'| \leq |\mathbf{x}|} d\mathbf{x}' \rho(t, \mathbf{x}') \quad (3.83)$$

дает вероятность найти частицу внутри сферы радиусом $|\mathbf{x}|$ в момент времени t . Очевидно, что из-за дисперсии волнового пакета, вероятность обнаружить частицу в любом конечном объеме стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, поскольку волновой пакет покидает этот объем. С другой стороны, при значениях $|\mathbf{x}|$ много больших размеров волнового пакета, значение $P(0, |\mathbf{x}|)$ очень близко к единице, поскольку изначально волновой пакет почти полностью был локализован в достаточно большом объеме. При таких условиях ур. (3.82) становится

$$\int_{|\mathbf{x}'| \leq |\mathbf{x}|} d\mathbf{x}' \rho(0, \mathbf{x}') = \int_S d\mathbf{S} \Phi(\mathbf{x}') \simeq 1. \quad (3.84)$$

В системе покоя волнового пакета модуль вектора $\Phi(\mathbf{x}')$ не зависит от направления вектора \mathbf{x}' . Поэтому для такой системы отсчета

$$|\Phi(|\mathbf{x}|)| \simeq \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|^2}.$$

Таким образом, закон обратных квадратов $1/|\mathbf{x}|^2$ справедлив для любых решений уравнений Клейна-Гордона и/или Дирака с конечными нормировками (в то время как плоские волны не нормированны). В любой данный момент времени плотность потока $\nabla \mathbf{j}(t, \mathbf{x}')$ убывает быстрее, чем $1/|\mathbf{x}|^2$.

3.6.4 Нековариантный гауссовый волновой пакет

Рассмотрим, в качестве полезной иллюстрации, широко известный нековариантный гауссовый волновой пакет с волновой функцией в импульсном пространстве:

$$\psi_p(\mathbf{k}) = \left(\frac{2\pi}{\sigma_p^2} \right)^{3/4} e^{-\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}{4\sigma_p^2}}, \quad (3.85)$$

где σ_p – константная дисперсия распределения Гаусса или “ширина” импульсного распределения в волновом пакете. Волновую функцию в координатном представлении можно получить, предполагая дисперсию σ_p достаточно малой для аккуратного вычисления интеграла с разложением

$$E_{\mathbf{k}} = E_p + \mathbf{v}_p(\mathbf{k} - \mathbf{p}) + \frac{m^2}{2E_p^3}(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + \frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{k})^2}{2E_p^3} + \dots, \quad (3.86)$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{p}/E_p$. Интегрирование сводится к гауссовой квадратуре, что позволяет вычислить

$$\psi_x(t, \mathbf{x}) = \frac{\exp \left[-ipx - \frac{(\mathbf{x}_L - \mathbf{v}t)^2}{4\sigma_x^2(1+it/\tau_L)} - \frac{\mathbf{x}_T^2}{4\sigma_x^2(1+it/\tau_T)} \right]}{(2\pi\sigma_x^2)^{3/4} \sqrt{(1+it/\tau_L)(1+it/\tau_T)}}, \quad (3.87)$$

где $p = (E_p, \mathbf{p})$, $\sigma_x^2 = 1/4\sigma_p^2$ и

$$\tau_L = \gamma_p^3 \tau, \quad \tau_T = \gamma_p \tau, \quad \tau = 2\sigma_x^2 m, \quad \gamma_p = \frac{E_p}{m}. \quad (3.88)$$

\mathbf{x}_L и \mathbf{x}_T – компоненты вектора \mathbf{x} , параллельные и перпендикулярные среднему вектору скорости \mathbf{v} , соответственно.

Как нетрудно видеть, $\psi_x(t, \mathbf{x})$ из ур. (3.87) описывает волновой пакет, расплывающийся со временем. Чтобы увидеть это в более простой форме, рассмотрим

$$|\psi_x(t, \mathbf{x})| = \frac{\exp \left[-\frac{(\mathbf{x}_L - \mathbf{v}t)^2}{4\sigma_x^2(1+t^2/\tau_L^2)} - \frac{\mathbf{x}_T^2}{4\sigma_x^2(1+t^2/\tau_T^2)} \right]}{(2\pi\sigma_x^2)^{3/4} (1+t^2/\tau_L^2)^{1/4} \sqrt{1+t^2/\tau_T^2}}. \quad (3.89)$$

Таким образом, гауссовый волновой пакет, описываемый при $t = 0$ волновой функцией в конфигурационном пространстве,

$$\psi_x(0, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_x^2)^{3/4}} \exp \left[ip\mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}^2}{4\sigma_x^2} \right] \quad (3.90)$$

со временем расплывается в продольном и поперечном направлениях. Квадраты продольной $\sigma_{xL}^2(t)$ и поперечной $\sigma_{xT}^2(t)$ дисперсий равны:

$$\sigma_{xL}^2(t) = \sigma_x^2(1+t^2/\tau_L^2), \quad (3.91)$$

$$\sigma_{xT}^2(t) = \sigma_x^2(1+t^2/\tau_T^2), \quad (3.92)$$

где τ_L и τ_T , даваемые ур. (3.88), связаны друг с другом соотношением $\tau_L = \gamma_p^2 \tau_T$. Параметры τ_L и τ_T имеют физический смысл продольного и поперечного времен расплывания, соответственно. Параметр τ – время дисперсии волнового пакета в его системе покоя, в которой, $\tau_L = \tau_T = \tau$.

Обратим внимание, что нековариантный гауссовый пакет расплывается в продольном направлении медленнее в γ_p^2 раз, по сравнению со скоростью расплывания в поперечном направлении. У гауссового волнового пакета есть два режима расплывания: в поперечном ($t \gg \tau_T$) и в продольном ($t \gg \tau_L$) направлениях. В случае полного расплывания по всем направлениям

$$\sigma_{xL}(t) = \sigma_x \frac{t}{\tau} \frac{1}{\gamma_p^3}, \quad t \gg \tau_L, \quad (3.93)$$

$$\sigma_{xT}(t) = \sigma_x \frac{t}{\tau} \frac{1}{\gamma_p}, \quad t \gg \tau_T. \quad (3.94)$$

Сравнив полученные скорости продольного и поперечного расплываний с расчетами, использующими релятивистские соотношения ур. (3.79), обнаруживаем, что нековариантный гауссовый пакет предсказывает в $\frac{1}{\gamma_p}$ более медленное расплывание. Ковариантный гауссовый пакет, рассматриваемый в следующем разделе, согласуется с общей формулой ур. (3.79).

Проверим, что расплывание гауссова волнового пакета ведет к формуле $1/|\mathbf{x}|^2$ в подавлении проинтегрированного по времени потока. Плотность потока вычисляется по стандартной формуле

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = -\frac{i}{2m} (\psi_{\mathbf{x}}^*(t, \mathbf{x}) \nabla \psi_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}) - \psi_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}) \nabla \psi_{\mathbf{x}}^*(t, \mathbf{x})). \quad (3.95)$$

Проведем вычисление в системе покоя волнового пакета. Тогда, плотность потока

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} (t/\tau) \exp \left[-\frac{\mathbf{x}^2}{2\sigma_x^2(1+(t/\tau)^2)} \right]}{(2\pi)^{3/2} 2m\sigma_x^5 (1 + (t/\tau)^2)^{5/2}} \quad (3.96)$$

Интеграл по времени может быть вычислен точно:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_0^\infty dt \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{4\pi|\mathbf{x}|^3} \operatorname{erf} \left[\sqrt{\mathbf{x}^2/2\sigma_x^2} \right] - \frac{\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2} |\mathbf{x}|^2 \sigma_x} e^{-\mathbf{x}^2/2\sigma_x^2}. \quad (3.97)$$

На расстояниях, много больших размера пакета $|\mathbf{x}|^2 \gg \sigma_x^2$, мы снова получаем очень прозрачную формулу:

$$\Phi(\mathbf{x}) \simeq \frac{\mathbf{x}}{4\pi|\mathbf{x}|^3}. \quad (3.98)$$

3.7 Теория осцилляций нейтрино в вакууме в модели волнового пакета

Применим теперь развитую теорию волнового пакета к описанию осцилляций нейтрино. В предыдущем разделе продемонстрировано, что поперечное расплывание волнового пакета ведет к подавлению вероятности за бесконечно большое время наблюдения обнаружить частицу на расстоянии \mathbf{x} от источника ее рождения, в виде множителя $\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|^2}$. Предположим, что поперечные степени свободы не оказывают существенного влияния на картину осцилляций нейтрино, за исключением упомянутого фактора подавления в вероятности наблюдения (далее мы освободимся от этой гипотезы и проведем полное вычисление в трехмерном пространстве, которое, в итоге, подтвердит правильность сделанного предположения).

3.7.1 Состояние нейтрино в модели волнового пакета и амплитуда перехода из источника в детектор

Рассмотрим одномерный волновой пакет нейтрино со средней координатой x_s в момент времени t_s :

$$|\nu_\alpha^s\rangle = \sum_k V_{\alpha i}^* \int \frac{dk}{2\pi} \psi_p^s(k) e^{-iE_i t_s + ikx_s} |\nu_i(k)\rangle, \quad (3.99)$$

где $E_i = \sqrt{k^2 + m_i^2}$, состояние $|\nu_i(k)\rangle$ нормировано согласно $\langle \nu_j(q) | \nu_i(k) \rangle = 2\pi \delta(q - k)$ и

$$\psi_p^s(k) = \left(\frac{2\pi}{\sigma_s^2} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{(k-p_s)^2}{4\sigma_s^2}}. \quad (3.100)$$

Нормировка состояния в ур. (3.100) равна $\langle \nu_\alpha^s | \nu_\alpha^s \rangle = 1$. Детектируемое состояние также должно описываться волновым пакетом со средней координатой x_d в момент времени t_d . В общем, состояние в детекторе может отличаться своим ароматом:

$$|\nu_\beta^d\rangle = \sum_i V_{\beta i}^* \int \frac{dk}{2\pi} \psi_p^d(k) e^{-iE_i t_d + ikx_d} |\nu_i(k)\rangle, \quad (3.101)$$

где $\psi_p^d(k)$ определено также как в ур. (3.100) с очевидными заменами $s \rightarrow d$. Проекция состояния $|\nu_\alpha^s\rangle$ на $|\nu_\beta^d\rangle$ дает амплитуду перехода:

$$A_{\alpha\beta}(t, L) \equiv \langle \nu_\beta^d | \nu_\alpha^s \rangle = \sum_j V_{\alpha j}^* V_{\beta j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \psi_p^s(k) \psi_p^{d*}(k) e^{-iE_j t + ikL}, \quad (3.102)$$

где $L = |x_d - x_s|$ это расстояние между средними положениями волновых пакетов нейтрино в источнике и детекторе, а $t = (t_d - t_s)$. Произведение гауссовых форм-факторов в ур. (3.102) может быть представлено как гауссовая функция в ур. (3.100) с импульсом

$$p = \frac{p_s \sigma_d^2 + p_d \sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_d^2} = \sigma_p^2 \left(\frac{p_s}{\sigma_s^2} + \frac{p_d}{\sigma_d^2} \right) \quad (3.103)$$

и дисперсией σ_p , определенной согласно:

$$\frac{1}{\sigma_p^2} = \frac{1}{\sigma_s^2} + \frac{1}{\sigma_d^2}. \quad (3.104)$$

Амплитуда в ур. (3.102) принимает вид

$$A_{\alpha\beta}(t, L) = \sum_j V_{\alpha i}^* V_{\beta i} \left(\frac{4\pi^2}{\sigma_s^2 \sigma_d^2} \right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp \left[-iE_j t + ikL - \frac{(k-p)^2}{4\sigma_p^2} - \frac{(p_s - p_d)^2}{4(\sigma_s^2 + \sigma_d^2)} \right]. \quad (3.105)$$

Интеграл по импульсу может быть вычислен в приближении малой ширины эффективного волнового пакета¹ ($\sigma_p \ll p$), с учетом одномерного аналога разложения в ур. (3.86)

$$E_{kj} \simeq E_{pj} + v_{pj} (k - p) + \frac{m_j^2}{2E_{pj}^3} (k - p)^2, \quad (3.106)$$

где $v_{pj} = dE_j/dp = p/E_{pj}$ – групповая скорость волнового пакета состояния с определенной массой m_j , что позволяет вычислить амплитуду:

$$A_{\alpha\beta}(t, L) = \left(2\pi \tilde{\delta}(p_s - p_d) \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi \sigma_x^2} \right)^{1/4} \sum_j V_{\alpha j}^* V_{\beta j} \frac{\exp \left[-iE_{pj} t - \frac{(L - v_{pj} t)^2}{4\sigma_x^2 (1 + it/\tau_{Lj})} \right]}{(1 + it/\tau_{Lj})^{1/2}}, \quad (3.107)$$

где

$$2\pi \tilde{\delta}(p_s - p_d) = \left(\frac{2\pi}{\sigma_s^2 + \sigma_d^2} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(p_s - p_d)^2}{2(\sigma_s^2 + \sigma_d^2)} \right] \quad (3.108)$$

отвечает “размазанному” аналогу $2\pi\delta(p_s - p_d)$ функции, контролирующей закон сохранения импульса, $\tau_{Lj} = E_{pj}^3 / 2m_j^2 \sigma_p^2$ – характерное время расплывания волнового пакета нейтрино с определенной массой m_j в продольном направлении в точном соответствии с ур. (3.88) и $\sigma_x = 1/2\sigma_p$.

¹ волновой пакет назван “эффективным“, поскольку он включает в себя процессы рождения и детектирования нейтрино.

3.7.2 Макроскопическое усреднение вероятности перехода

Как определить вероятность нейтринных осцилляций в модели с волновым пакетом? Плотность вероятности, отвечающая амплитуде $A_{\alpha\beta}(t, L)$ из ур. (3.105) зависит не только от расстояния $L = x_d - x_s$ и разницы времен $t = (t_d - t_s)$, но и от средних импульсов нейтринного волнового пакета в источнике и детекторе. При этом, все эти параметры совершенно произвольны, т.е. мы не накладываем условий $t = L$, а также $p_s = p_d$. Экспериментально наблюдаемой величиной является макроскопическое число “событий”, усредненное по ненаблюдаемым величинам – времени рождения t_s и среднего импульса при рождении p_s :

$$\int dt_s dp_s \frac{d^2 n_\nu}{dt_s dp_s} |A_{\alpha\beta}(t_d - t_s, p_s, p_d)|^2 \simeq \left\langle \frac{d^2 n_\nu}{dt_s dp_s} \right\rangle P_{\alpha\beta}(L), \quad (3.109)$$

где $d^2 n_\nu(t_s, p_s)/dt_s dp_s$ – плотность числа нейтрино в источнике в единицу времени dt_s и единицу импульса dp_s . Скобки $\langle \dots \rangle$ означают величины, усредненные по времени и импульсу внутри интервалов, в которых $|A_{\alpha\beta}(t - t_s, p_s - p_d)|^2$ быстро убывает. Усредненная по времени и импульсу в источнике вероятность осцилляций равна

$$P_{\alpha\beta}(L) = \int dt_s dp_s |A_{\alpha\beta}(t - t_s; p_s, p_d)|^2. \quad (3.110)$$

Интегрирование по импульсу p_s может быть легко произведено при помощи ур. (3.108). Интегрирование по времени можно выполнить, учтя, что по сравнению с экспоненциальным подавлением, которое происходит на временах $(L - v_j t)^2/4\sigma_x^2 \gtrsim 1$, члены вида t/τ_{Lj} – медленно меняющиеся функции, поскольку соотношение

$$\frac{t}{\tau_{Lj}} \lesssim \frac{(L - 2\sigma_x)m_j^2}{p^2 E_{pj} \sigma_x^2} \ll 1 \quad (3.111)$$

выполняется для широкой области значений нейтринных масс $m_j \lesssim 1$ эВ и пространственных дисперсий σ_x . Таким образом, интеграл по времени t_s сводится к гауссовому, что позволяет получить формулу для вероятности осцилляций нейтрино в модели волнового пакета:

$$P_{\alpha\beta}(L) = \sum_{i,j} \frac{V_{\beta i} V_{\alpha i}^* V_{\alpha j} V_{\beta j}^*}{\sqrt[4]{1 + (L/L_{ij}^d)^2}} \exp[-i(\varphi_{ij} + \varphi_{ij}^d) - \mathcal{A}_{ij}^2 - \mathcal{B}_{ij}^2], \quad (3.112)$$

где

$$\mathcal{A}_{ij}^2 = \frac{1}{1 + (L/L_{ij}^d)^2} \left(\frac{L}{L_{ij}^{\text{coh}}} \right)^2, \quad (3.113)$$

$$\mathcal{B}_{ij}^2 = \left(\frac{\sqrt{2}\pi\sigma_x}{L_{ij}^{\text{osc}}} \right)^2. \quad (3.114)$$

Вероятность осцилляций в ур. (3.112) зависит от четырех параметров размерности длины:

$$L_{ij}^{\text{osc}} = 2\pi \frac{2p}{\Delta m_{ij}^2}, \quad (3.115)$$

$$L_{ij}^{\text{coh}} = \frac{2\sqrt{2}p^2}{\sigma_p \Delta m_{ij}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma_{\text{rel}}} L_{ij}^{\text{osc}}, \quad (3.116)$$

$$L_{ij}^{\text{d}} = \frac{p^3}{\sigma_p^2 \Delta m_{ij}^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}\sigma_{\text{rel}}} L_{ij}^{\text{coh}}, \quad (3.117)$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2\sigma_p}, \quad (3.118)$$

где безразмерный параметр $\sigma_{\text{rel}} \equiv \sigma_p/p$. Фаза $\varphi_{ij}(L)$ линейно зависит от расстояния L :

$$\varphi_{ij}(L) = 2\pi \frac{L}{L_{ij}^{\text{osc}}},$$

и обратно пропорциональна длине осцилляций L_{ij}^{osc} , которая оказалась в точности такой же как и в плосковолновом случае. Однако, в модели волнового пакета к стандартной фазе появилась добавка

$$\varphi_{ij}^{\text{d}}(L) = -\frac{1}{1 + (L/L_{ij}^{\text{d}})^2} \left(\frac{L}{L_{ij}^{\text{coh}}} \right)^2 \frac{L}{L_{ij}^{\text{d}}} + \frac{1}{2} \arctan \frac{L}{L_{ij}^{\text{d}}}. \quad (3.119)$$

Обсудим на качественном уровне полученные результаты.

3.7.3 Качественное обсуждение формулы для вероятности осцилляций в модели волнового пакета

Как следует из ур. (3.112), осцилляции нейтрино в модели волнового пакета зависят от четырех величин, размерности длины:

- длины осцилляций L_{ij}^{osc} ,
- длины когерентности L_{ij}^{coh} ,
- длины дисперсии L_{ij}^{d} ,
- и эффективного пространственного размера волнового пакета нейтрино σ_x .

Обсудим их физический смысл. Длина когерентности L_{ij}^{coh} соответствует расстоянию, на котором два волновых пакета с массами m_i и m_j , распространяющимися с разными групповыми скоростями $v_i \simeq 1 - m_i^2/2p^2$ и $v_j \simeq 1 - m_j^2/2p^2$, перестают перекрываться в пространстве. Это происходит на временах t , когда $(v_i - v_j)t \simeq \sigma_x$, где σ_x – пространственный размер волнового пакета нейтрино. Оценка времени $t \simeq 2\sigma_x p^2 / \Delta m_{ij}^2$ с точностью до числового множителя совпадает с определением длины когерентности L_{ij}^{coh} из ур. (3.116). Заметим, что длина когерентности пропорциональна осцилляционной длине L_{ij}^{osc} и обратно пропорциональна относительной дисперсии импульса волнового пакета σ_{rel} . Поэтому, чем меньше относительная дисперсия импульса волнового пакета, тем дольше волновые пакеты сохраняют свою когерентность. Фактор $\left(\frac{L}{L_{ij}^{\text{coh}}} \right)^2$ в экспоненте в ур. (3.112) отвечает подавлению, связанному с длиной когерентности.

Длина дисперсии L_{ij}^d возникает в результате разложения энергии до второго порядка (см. ур. (3.106)), что, как мы видели в разделе 3.6.4, соответствует расплыванию волнового пакета в конфигурационном пространстве. Заметим, что L_{ij}^d обратно пропорциональна квадрату σ_{rel} . Расплывание волновых пакетов увеличивает их пространственные размеры и частично компенсирует потерю перекрытия двух волновых пакетов ν_i и ν_j за счет разницы их групповых скоростей. Характерное время расплывания волнового пакета нейтрино с определенной массой m_j в продольном направлении – параметр $\tau_{Lj} = E_{pj}^3/2m_j^2\sigma_p^2$, оказался в точности такой же как в ур. (3.88). Производная по времени параметра пространственной дисперсии волнового пакета $\sigma_x(t)$, определенного согласно ур. (3.91), можно интерпретировать как скорость расплывания:

$$\frac{d|\sigma_{x,j}(t)|}{dt} = \frac{\sigma_x t / (\tau_{Lj})^2}{\sqrt{1 + (t/\tau_{Lj})^2}} = \begin{cases} \sigma_x t / (\tau_{Lj})^2, & t \ll \tau_{Lj}, \\ \sigma_x / \tau_{Lj} = \frac{m_j^2 \sigma_p}{E_p^2 E_p} \ll 1, & t \gg \tau_{Lj}. \end{cases} \quad (3.120)$$

Как можно видеть, $d\sigma_{x,j}(t)/dt$ сначала линейно растет со временем до тех пор, пока не достигнет своего асимптотического значения скорости расплывания σ_x/τ_{Lj} . Скорость расплывания много меньше скорости нейтрино, но не обязательно меньше разности их групповых скоростей $v_i - v_j$. Действительно,

$$v_i - v_j = \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E_p^2} \simeq \frac{\Delta m_{ij}^2}{2m_{\text{max}}^2} \frac{E_p}{\sigma_p} \frac{d\sigma_{x,j}(t)}{dt}, \quad (3.121)$$

где m_{max} – максимальное значение массы нейтрино. С учетом космологического ограничения, $m_{\text{max}} \lesssim 0.2$ эВ и взяв в качестве оценки $\Delta m_{ij}^2 = 2.45 \cdot 10^{-3}$ эВ², получим, что $v_i - v_j$ будет сравнимо со скоростью расплывания волнового пакета $d\sigma_{x,j}(t)/dt$, если $\sigma_p \simeq 0.03E_p$. Для пакетов с много меньшими пространственными дисперсиями скорость расплывания будет много меньше разницы $v_i - v_j$. Для много больших значений σ_{rel} , (но, по-прежнему, с условием $\sigma_{\text{rel}} \ll 1$), расплывание волновых пакетов будет эффективнее частично компенсировать потерю перекрытия волновых пакетов. Например, на расстояниях от источника $L = L_{ij}^{\text{osc}}/2$, на которых разумно устанавливать детекторы для наибольшей чувствительности к исследованию осцилляций нейтрино, нетрудно показать, что максимальное подавление интерференционных членов в ур. (3.112) равно $e^{-\pi/8}$ при $\sigma_{\text{rel}} = 1/\sqrt{2\pi} \simeq 0.4$.

В пределе $L \rightarrow \infty$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + (L/L_{ij}^d)^2} \left(\frac{L}{L_{ij}^{\text{coh}}} \right)^2 = \left(\frac{L_{ij}^d}{L_{ij}^{\text{coh}}} \right)^2 = \frac{p^2}{8\sigma_p^2} \gg 1 \quad (3.122)$$

расплывание не способно полностью компенсировать потерю когерентности в ур. (3.112). Таким образом, осцилляции нейтрино, распространяющихся на расстояния, много больших длин когерентности и дисперсии, *сильно подавлены*. По-видимому, можно утверждать, что нейтрино от астрофизических и космологических источников некогерентны и не осциллируют.

Может показаться удивительным, что частичное восстановление когерентности из-за расплывания волнового пакета чувствительно к *разнице* скоростей расплывания, а не к их *сумме*, как следовало бы ожидать для волновых пакетов с увеличивающимися со временем пространственными ширинами. Действительно, для вещественных гауссовых ширин нетрудно получить, что ком-

пенсация потери когерентности зависит от суммы скоростей расплывания. Объяснение заключается в том, что эффект расплывания проявляет себя как комплекснозначная функция $\sigma_x^2(1 + it/\tau_{Lj})$, которая характеризуется как абсолютным значением, так и фазой. Поэтому, эффект расплывания волновых пакетов, зависящий от it/τ_{Lj} будет зависеть от разницы фаз $\propto it(1/\tau_{Lj} - 1/\tau_{Li})$ в интерференционных членах квадрата модуля амплитуды в ур. (3.107), аналогично тому, как длина осцилляций зависит от разницы энергий $(E_i - E_j)t$.

Поскольку пространственная ширина волнового пакета – это комплекснозначная функция $\sigma_x^2(1 + it/\tau_{Lj})$, то расплывание волновых пакетов оказывает влияние не только на перекрытие волновых пакетов, но и дает поправку в интерференционную фазу. Поэтому, фаза осцилляций получает добавку $\varphi_{ij}^d(L)$, определенную в ур. (3.119).

Дополнительный фактор подавления \mathcal{B}_{ij}^2 , определенный в ур. (3.114), не зависит от расстояния пройденного нейтрино. Это подавление можно интерпретировать как подавление осцилляций в случае, если пространственная ширина волнового пакета сопоставима по порядку величины или больше длины осцилляций $L = L_{ij}^{\text{osc}}$. Такое подавление отвечает плосковолновому пределу, при котором пространственная ширина стремится к бесконечности, что имеет прозрачную интерпретацию – интерференционные члены усредняются на размерах пакета. Формулу (3.112) можно переписать в виде

$$\mathcal{B}_{kj}^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{\sigma_{m^2}} \right)^2, \quad (3.123)$$

что позволяет интерпретировать подавление интерференции состояний $|\nu_i\rangle$ и $|\nu_j\rangle$, если $\Delta m_{ij}^2 \gg \sigma_{m^2}$, где $\sigma_{m^2} = 2\sqrt{2}p\sigma_p$ можно формально интерпретировать как неопределенность квадрата массы нейтрино [147]. Именно этот фактор дает объяснение тому, почему на практике не осциллируют заряженные лептоны. Формально развитую теорию осцилляций в модели волнового пакета можно применить к осцилляциям заряженных лептонов, заменив ν_1, ν_2, ν_3 на e, μ, τ , предполагая, по прежнему, что все заряженные лептоны ультрарелятивистские. Однако, все интерференционные члены сильнейшим образом подавлены из-за того, что $|\Delta m_{e\mu}^2| \equiv |m_\mu^2 - m_e^2|$ много больше любого реалистичного значения σ_p из-за фактора $\exp[-\mathcal{B}_{e\mu}] \ll 1$.

Заметим также, что интерференционные члены ур. (3.112) подавлены также числителем $\sqrt[4]{1 + (L/L_{kj}^d)^2}$. В пределах $\sigma_p \rightarrow 0$ и $\sigma_p \rightarrow \infty$, интерференция в ур. (3.112) исчезает, и вероятность осцилляций становится некогерентной суммой

$$P_{\alpha\beta} = \sum_k |V_{\alpha k}|^2 |V_{\beta k}|^2, \quad (3.124)$$

которая не зависит ни от энергии, ни от расстояния. Отметим, наконец, что предел $\sigma_p \rightarrow 0$, который формально соответствует плосковолновому пределу, в отличие от плосковолновой модели предсказывает отсутствие осцилляций нейтрино. Этот результат, хотя и является очевидным, может показаться на первый взгляд удивительным, поскольку в пределе $\sigma_p \rightarrow 0$ волновые пакеты превращаются в состояния с определенным импульсом, что возвращает нас к модели с плоскими волнами. Однако, в модели с волновым пакетом делается еще один необходимый шаг – интегрирование по времени испускания нейтрино, в отличие от необоснованного приравнивания $t = L$ в плосковолновой модели. Если действовать согласованным образом и в плосковолновой модели, то следовало бы также проинтегрировать по времени, как по ненаблюдаемой величине. В этом

случае, плосковолновая модель также предсказывает вероятность в виде некогерентной суммы в ур. (3.124).

Обсудим, наконец, выполняются ли гипотезы, сделанные при выводе формулы осцилляций, даваемой ур. (3.16), и обсуждаемые в разделе 3.5.

Гипотеза (I) о том, что в процессах рождения и детектирования нейтрино взаимодействует когерентная суперпозиция состояний с определенной массой m_i ($i = 1, 2, 3$) $|\nu_\alpha\rangle = \sum_i V_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle$, может нарушаться, если $\exp[-\mathcal{B}_{ij}^2] \lesssim 1$. В частности, эта гипотеза сильнейшим образом нарушена для заряженных лептонов, что объясняет отсутствие их осцилляций.

Гипотеза (II) о том, что состояния $|\nu_i\rangle$ обладают определенными импульсами \mathbf{p}_i нарушается, поскольку она соответствует бесконечно большой пространственной ширине $\sigma_x = (2\sigma_p)^{-1} = \infty$, при которой $\exp[-\mathcal{B}_{ij}^2] \rightarrow 0$, что приводит к формуле (3.124).

Гипотеза (III) говорит о том, что все импульсы \mathbf{p}_i одинаковы ($\mathbf{p}_i = \mathbf{p}$), что противоречит релятивистской инвариантности. Обсуждаемая в этой главе нековариантная теория нейтринных осцилляций в модели волнового пакета не устранила данный недостаток.

Приближение (IV) о том, что нейтрино являются ультрарелятивистскими, т.е. $\mathbf{p}^2 \gg \max(m_i^2)$, было также использовано в развитой теории нейтринных осцилляций в модели волнового пакета.

Гипотеза (V) о том, что время распространения нейтрино равно $t = L$ не выполняется. В действительности, последовательное вычисление требует интегрирования по времени, выполненное в ур. (3.109). Наибольший вклад в интеграл по времени дают времена около $t = L/v_{ij}$, где

$$\frac{1}{v_{ij}} = \frac{v_i + v_j}{v_i^2 + v_j^2},$$

что соответствует моменту времени максимального перекрытия двух волновых пакетов, отвечающих ν_i и ν_j .

3.8 Заключение к главе

В главе обсуждаются базовые квантовомеханические понятия: квантовые состояния, их представления в импульсном и координатном пространствах, соответствующие волновые функции. Обсуждаются теории нейтринных осцилляций в вакууме и веществе в плосковолновом приближении. Вводятся основные понятия и даются качественные объяснения полученных результатов. Затем, мы критически обсуждаем все гипотезы и приближения, используемые при выводе теории нейтринных осцилляций в плосковолновом приближении. Таких гипотез и приближений оказывается пять. Выясняется, что только одно приближение (IV) о том, что нейтрино являются ультрарелятивистскими, не вызывает возражений при описании данных современных экспериментов, нарушаясь, впрочем, для реликтовых нейтрино. Все остальные гипотезы

- либо нефизичны: гипотеза (II) о том, что состояния $|\nu_i\rangle$ обладают определенными импульсами \mathbf{p}_i , что означает полностью делокализованные состояния в пространстве, не позволяющие ввести понятие расстояния между источником и детектором; гипотеза (III) о том,

что все импульсы \mathbf{p}_i одинаковы ($\mathbf{p}_i = \mathbf{p}$), что противоречит релятивистской инвариантности,

- либо требуют количественного обоснования: гипотеза (I) о том, что в процессах рождения и детектирования нейтрино взаимодействует когерентная суперпозиция состояний с определенной массой m_i ($i = 1, 2, 3$) $|\nu_\alpha\rangle = \sum_i V_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle$,
- либо необоснованны: гипотеза (V) о том, что время распространения нейтрино следует приравнять расстоянию между источником и детектором.

Таким образом, несмотря на значительный успех плосковолновой теории нейтринных осцилляций при описании экспериментальных данных, эта теория неполна и внутренне противоречива. Корректное рассмотрение нейтринных осцилляций требует выхода за рамки плосковолнового приближения. Одним из таких возможных расширений является модель волнового пакета. В этой главе обсуждается волновой пакет, его общие свойства. В частности, воспроизводятся такие известные свойства волнового пакета, что средняя координата квантового волнового пакета следует классической траектории, а также общий закон распыливания волнового пакета в конфигурационном пространстве. Новым результатом автора в теории волновых пакетов является доказательство того, что распыливание волнового пакета приводит к закону обратных квадратов $\sim 1/|x|^2$ для вероятности обнаружения состояния на расстоянии x от источника за бесконечно большое время наблюдения. Это утверждение доказано двумя общими способами, а также продемонстрировано явно для примера гауссова волнового пакета.

Наконец, в модели нековариантного гауссова волнового пакета построена теория осцилляций нейтрино. Предложен корректный способ для получения формулы вероятности осцилляций нейтрино посредством макроскопического усреднения квадрата модуля амплитуды перехода. В итоге, получена общая формула для вероятности осцилляций, которая зависит от четырех величин размерности длины:

- длины осцилляций L_{ij}^{osc} ,
- длины когерентности L_{ij}^{coh} ,
- длины дисперсии L_{ij}^{d} ,
- эффективного пространственного размера волнового пакета нейтрино σ_x .

Например, для вероятности выживания электронного нейтрино, общая формула принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 1 - P_{ee} = & \cos^2 \theta_{12} \sin^2 \theta_{12} \cos^4 \theta_{13} \left(1 - \frac{e^{-\frac{(L/L_{21}^{\text{coh}})^2}{1+(L/L_{21}^{\text{d}})^2} - \mathcal{B}_{21}^2}}{\sqrt[4]{1+(L/L_{21}^{\text{d}})^2}} \cos(\varphi_{21} + \varphi_{21}^{\text{d}}) \right) \\
 & + \cos^2 \theta_{12} \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{13} \left(1 - \frac{e^{-\frac{(L/L_{31}^{\text{coh}})^2}{1+(L/L_{31}^{\text{d}})^2} - \mathcal{B}_{31}^2}}{\sqrt[4]{1+(L/L_{31}^{\text{d}})^2}} \cos(\varphi_{31} + \varphi_{31}^{\text{d}}) \right) \\
 & + \sin^2 \theta_{12} \cos^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{13} \left(1 - \frac{e^{-\frac{(L/L_{32}^{\text{coh}})^2}{1+(L/L_{32}^{\text{d}})^2} - \mathcal{B}_{32}^2}}{\sqrt[4]{1+(L/L_{32}^{\text{d}})^2}} \cos(\varphi_{32} + \varphi_{32}^{\text{d}}) \right).
 \end{aligned} \tag{3.125}$$

Формула предсказывает:

- Потерю когерентности для пары состояний ν_i и ν_j на расстояниях, превышающих $L \gg L_{ij}^{\text{coh}}$. В результате, вероятность осцилляций сводится к некогерентной сумме $P_{\alpha\beta} = \sum_k |V_{\alpha k}|^2 |V_{\beta k}|^2$, которая не зависит ни от энергии, ни от расстояния.
- Некогерентное рождение или детектирование нейтрино, что определяется фактором $\exp[-\mathcal{B}_{ij}^2] = \exp\left[-1/4 (\Delta m_{kj}^2 / \sigma_{m^2})^2\right]$, где $\sigma_{m^2} = 2\sqrt{2}p\sigma_p$, если $\Delta m_{ij}^2 \gg \sigma_{m^2}$. Именно этот фактор дает объяснение тому, почему не осциллируют заряженные лептоны.
- Поправки к фазе осцилляций за счет эффекта дисперсии волнового пакета нейтрино.
- Частичную компенсацию потери когерентности для пары состояний ν_i и ν_j за счет расплывания волнового пакета.
- Дополнительное подавление интерференционных членов за счет факторов вида $\left(1 + (L/L_{kj}^d)^2\right)^{-1/4}$.

В главе приводится качественное обсуждение полученных результатов. Наконец, мы обсуждаем какие из гипотез (I-V) оказались справедливыми, а какие нарушенными. Выяснилось, что гипотеза (IV) не вызывает возражений при описании данных современных экспериментов. Представленная модель не противоречит гипотезе (III) о том, что все импульсы \mathbf{p}_i одинаковы ($\mathbf{p}_i = \mathbf{p}$), что связано с нековариантным подходом. Остальные три гипотезы нарушаются.

Несмотря на то, что обсуждаемая теория нейтринных осцилляций в модели волнового пакета, предложенная также и в других работах (однако, в нашей работе последовательно учтены эффекты дисперсии волнового пакета), успешно справляется с концептуальными проблемами плосковолнового подхода, она все же оставляет чувство неудовлетворенности. Во-первых, рассмотренная модель нековариантна, что не является удовлетворительным при описании релятивистских нейтрино. Указанием на эту трудность является то, что развитая модель согласуется с гипотезой о том, что все импульсы \mathbf{p}_i одинаковы, что противоречит релятивистской инвариантности. Во-вторых, и это самое главное, нам пришлось постулировать, что состояние нейтрино описывается волновым пакетом с дисперсией импульса, которую мы в рамках данной модели никак не можем охарактеризовать количественно. Желательно разработать теоретическую схему, которая обладала бы явной ковариантностью, и при этом, не постулировала явного вида волновой функции нейтрино. Это является программой действий для двух последующих глав.

Глава 4. Квантово-полевая теория релятивистского волнового пакета

4.1 Релятивистский волновой пакет

4.1.1 Определения

Пусть $|\mathbf{k}\rangle$ – собственное состояние оператора 4-импульса $\hat{P} = (\hat{P}_0, \hat{\mathbf{P}})$ частицы с массой m :

$$\hat{P}_\mu |\mathbf{k}\rangle = k_\mu |\mathbf{k}\rangle \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \quad (4.1)$$

Состояния $|\mathbf{k}\rangle$ нормированы релятивистски-инвариантным образом: $\langle \mathbf{q} | \mathbf{k} \rangle = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}} \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{k})$. В дальнейшем будем обозначать $k_0 = E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Соотношение полноты имеет вид

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}| = 1.$$

Произвольное “одночастичное” бесспиновое состояние $|a\rangle$ можно представить в виде разложения по полному набору состояний $|\mathbf{k}\rangle$, т.е. в виде *волнового пакета*:

$$|a\rangle = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle, \quad \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}) = \frac{\langle \mathbf{k} | a \rangle}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}}. \quad (4.2)$$

Состояние $|a\rangle$ можно разложить по собственным состояниям любого другого самосопряженного оператора, в частности, – оператора 3-мерной координаты $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3)$ ($\hat{X}_i |x\rangle = x_i |x\rangle$, $i = 1, 2, 3$). Выбрав для $|x\rangle$ нормировку $\langle \mathbf{y} | x \rangle = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x})$, при которой $\int d\mathbf{x} |x\rangle \langle x| = 1$, запишем

$$|a\rangle = \int d\mathbf{x} \psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) |x\rangle, \quad \psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \langle x | a \rangle. \quad (4.3)$$

Поскольку оператор \hat{P} при действии на состояние $\langle x|$ имеет вид $-i\nabla_{\mathbf{x}}$, то

$$\mathbf{k} \langle x | \mathbf{k} \rangle = \langle x | \hat{P} | \mathbf{k} \rangle = -i\nabla_{\mathbf{x}} \langle x | \mathbf{k} \rangle.$$

Отсюда, с учетом выбранных нормировок, находим, что $\langle x | \mathbf{k} \rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$ и, следовательно,

$$|x\rangle = \int \frac{d\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} |\mathbf{k}\rangle, \quad |\mathbf{k}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} |x\rangle. \quad (4.4)$$

Т.о. функции $\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k})$ и $\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ являются Фурье-образами друг друга:

$$\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}), \quad \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}). \quad (4.5)$$

Приведем еще полезные соотношения, которые понадобятся нам далее.

$$\frac{\partial |x\rangle}{\partial \mathbf{x}} = -i \int \frac{d\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \mathbf{k} |\mathbf{k}\rangle, \quad \frac{\partial |\mathbf{k}\rangle}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{k}}}{2E_{\mathbf{k}}} |\mathbf{k}\rangle + i\sqrt{2E_{\mathbf{k}}} \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mathbf{x} |x\rangle. \quad (4.6)$$

Норма состояния $|a\rangle$ имеет вид

$$\langle a|a\rangle = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\psi_p(\mathbf{k})|^2 = \int d\mathbf{x} |\psi_x(\mathbf{x})|^2. \quad (4.7)$$

Если $\psi_x(\mathbf{x})$ – вещественная функция, то волновой пакет $|a\rangle$ имеет среднюю координату $\langle \mathbf{x}_a \rangle = 0$, при $t = 0$. Для дальнейших расчетов нам понадобится волновой пакет, имеющий трехмерную координату $\langle \mathbf{x}_a \rangle$, в общем случае, отличную от нуля, в момент времени t_a . Для этого достаточно подействовать на состояние $|a\rangle$ оператором трансляции $e^{i\hat{P}x_a}$:

$$|a\rangle \rightarrow |\mathbf{p}_a, x_a\rangle = e^{i\hat{P}x_a} |a\rangle = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} e^{ikx_a} \psi_p(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a) |\mathbf{k}\rangle, \quad (4.8)$$

где мы указали, что волновая функция $\psi_p(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a)$ зависит не только от переменной – вектора \mathbf{k} , но и от параметра – вектора среднего импульса \mathbf{p}_a . $\psi_p(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a)$ характеризуется также параметром дисперсии σ в импульсном пространстве. При устремлении $\sigma \rightarrow 0$ мы потребуем для удобства, чтобы волновой пакет переходил в состояние с определенным импульсом: $\lim_{\sigma \rightarrow 0} |\mathbf{p}_a, x_a\rangle = |\mathbf{p}_a\rangle$. Это подразумевает, что в волновой функции $\psi_p(\mathbf{k})$ присутствует множитель $e^{-ip_a x_a}$ для компенсации множителя e^{ikx_a} . В дальнейшем, мы будем подразумевать наличие этого множителя для существования однозначного перехода к плосковолновому пределу, однако, поскольку этот множитель постоянный, он не оказывает никакого влияния на предсказываемое число взаимодействий. Поэтому, чтобы не загромождать формулы, мы будем такие множители опускать.

Для установления трансформационных свойств волновой функции $\psi_p(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a)$ удобно ее переписать в виде $\psi_p(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a) = \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a) / \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}$. Пользуясь трансформационными свойствами состояния $|\mathbf{k}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$ при преобразовании Лоренца

$$|\mathbf{k}\rangle \rightarrow U(\Lambda) |\mathbf{k}\rangle = |\Lambda \mathbf{k}\rangle, \quad k \rightarrow \Lambda k, \quad (4.9)$$

где $U(\Lambda)$ – унитарный оператор, легко видеть, что функция $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a)$ – релятивистский инвариант:

$$\phi(\mathbf{k}', \mathbf{p}'_a) = \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a) \quad (k' = \Lambda k, \quad p'_a = \Lambda p_a). \quad (4.10)$$

Состояние в ур. (4.8) можно выразить через лоренц-инвариантную функцию $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a)$:

$$|\mathbf{p}_a, x_a\rangle = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} e^{-ikx_a} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a) |\mathbf{k}\rangle. \quad (4.11)$$

Волновая функция в конфигурационном пространстве, соответствующая состоянию в ур. (4.8), есть

$$\psi_{x,a}(\mathbf{x}) \equiv \psi_x(\mathbf{x}, x_a, \mathbf{p}_a) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i[\mathbf{k}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_a) - k^0 x_a^0]} \psi_p(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a). \quad (4.12)$$

Норму состояния

$$\langle a|a\rangle \equiv \langle \mathbf{p}_a, x_a | \mathbf{p}_a, x_a \rangle = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\psi_p(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a)|^2 = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} |\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a)|^2 \quad (4.13)$$

мы в этой и последующей главах предпочитаем не приравнять единице, хотя такая возможность естественным образом напрашивается. В этой работе обсуждается теоретическая схема с волновым пакетом в квантовой теории, в которой существует предельный переход к обычному состоянию с определенным импульсом и с нормировкой $\langle \mathbf{q} | \mathbf{k} \rangle = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}} \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{k})$. Эта нормировка во многих учебниках зачастую заменяется на $2E_{\mathbf{k}} V$, где V – это “некий бесконечно большой объем”. По аналогии, мы определяем лоренц-инвариантную норму состояния в ур. (4.13) как $\langle a|a\rangle = 2mV_*$, где объем в системе покоя волнового пакета будет уточнен в разделе 4.1.2.

Принцип соответствия и нормировка волнового пакета. Потребуем, чтобы состояние в ур. (4.11) переходило в $|\mathbf{p}\rangle$ в плосковолновом пределе. Это условие мы называем в этой работе *принципом соответствия*:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}).$$

Заметим теперь, что безразмерный лоренц-инвариантный интеграл

$$\int \frac{d\mathbf{k} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} = \int \frac{d\mathbf{k}' \phi(\mathbf{k}', \mathbf{p}')}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}'}}$$

не зависит от \mathbf{p} и, следовательно, может зависеть лишь от параметра σ и массы m . Но, согласно условию в ур. (4.1.1), рассматриваемый интеграл стремится к единице в пределе $\sigma = 0$, так что естественно положить его равным единице и при конечном (малом) σ :

$$\int \frac{d\mathbf{k} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} = \int \frac{d\mathbf{k} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{0})}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} = 1. \quad (4.14)$$

Хотя это “техническое” условие не является необходимым, оно дает удобную для практических расчетов нормировку формфакторов $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$.

Некоторые общие свойства волнового пакета. Изучим некоторые общие свойства волнового пакета.

- Поскольку частным случаем ур. (4.10) является инвариантность $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a)$ относительно вращений $\mathbf{k} \mapsto \mathbf{k}' = \mathbf{O}\mathbf{k}$, $\mathbf{p}_a \mapsto \mathbf{p}'_a = \mathbf{O}\mathbf{p}_a$, отсюда следует, что функции $\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a)$ и $\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, x_a, \mathbf{p}_a)$ также вращательно инвариантны.
- Модуль функции $\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, x_a, \mathbf{p}_a)$ инвариантен также относительно пространственных трансляций, но не инвариантен относительно временных трансляций.
- Из ур. (4.12) видно, что $|\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, x_a, \mathbf{p}_a)| \rightarrow 0$ при $|x_a^0| \rightarrow \infty$, т.е. в конфигурационном пространстве волновой пакет расплывается со временем.
- Поскольку величина $|\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, x_a, \mathbf{p}_a)|$ не зависит от x_a , заключаем, что точка x_a является центром сферической симметрии пакета; в дальнейшем будем называть эту точку центром пакета.
- Из ур. (4.10) следует, что функция $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ может зависеть только от лоренц-инвариантной величины $k\rho$. Поэтому функция $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ симметрична относительно перестановки своих аргументов, т.е. $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \phi(\mathbf{p}, \mathbf{k})$.
- Кроме того, очевидно, $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{0}) = \phi(\mathbf{0}, \mathbf{k}) = \tilde{\phi}(k_0)$, где $\tilde{\phi}(k_0)$ – вращательно инвариантная функция единственной переменной $k_0 = E_{\mathbf{k}}$.
- Еще одно простое и важное следствие ур. (4.10) – независимость нормы в ур. (4.13) не только от пространственно-временной координаты x_a , но и от импульса \mathbf{p}_a .

4.1.2 Средний 4-импульс.

Найдем теперь средние значения компонент 4-импульса $\langle P \rangle = (\langle P_0 \rangle, \langle \mathbf{P} \rangle)$ пакета, которые определяются стандартным квантовомеханическим правилом

$$\langle P_\mu \rangle = \langle P_\mu(\mathbf{p}_a) \rangle = \frac{\langle \mathbf{p}_a, x_a | \hat{P}_\mu | \mathbf{p}_a, x_a \rangle}{\langle \mathbf{p}_a, x_a | \mathbf{p}_a, x_a \rangle}.$$

Подставляя сюда ур. (4.8) получаем

$$\langle P_\mu(\mathbf{p}) \rangle = \frac{1}{2mV_\star} \int \frac{d\mathbf{k} |\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})|^2}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} k_\mu, \quad (4.15)$$

где знаменатель равен норме состояния $\langle \mathbf{p}_a, x_a | \mathbf{p}_a, x_a \rangle \equiv 2mV_\star$ с

$$2mV_\star = \int \frac{d\mathbf{k} |\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})|^2}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} = \int \frac{d\mathbf{k} |\phi(\mathbf{k}, \mathbf{0})|^2}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_m^\infty dk_0 \sqrt{k_0^2 - m^2} |\tilde{\phi}(k_0)|^2. \quad (4.16)$$

Здесь и далее индекс a у переменных \mathbf{p}_a и x_a для краткости опускается. Из ур. (4.15) и ур. (4.16) видно, что как средний 4-импульс $\langle P \rangle$, так и величина V_\star , имеющая размерность пространственного объема, являются интегралами движения.

В силу четности функции $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{0})$ из ур. (4.15) очевидно, что $\langle \mathbf{P}(\mathbf{0}) \rangle = \mathbf{0}$; другими словами средний импульс обращается в нуль в собственной системе отсчета (с.с.о.) пакета¹, определяемой условием $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Отсюда следует, что средняя (эффективная) масса пакета, $\langle m \rangle$, равна среднему значению его энергии, т.е. нулевой компоненты 4-вектора $\langle P \rangle$ в этой системе:

$$\langle m \rangle = \langle P_0(\mathbf{0}) \rangle = \int \frac{d\mathbf{k} |\phi(\mathbf{k}, \mathbf{0})|^2}{4(2\pi)^3 m V_\star} = \frac{1}{8\pi^2 m V_\star} \int_m^\infty dk_0 k_0 \sqrt{k_0^2 - m^2} |\tilde{\phi}(k_0)|^2. \quad (4.17)$$

Используя ур. (4.16) и записав ур. (4.17) в виде отношения

$$\frac{\langle m \rangle}{m} = \frac{\int_m^\infty dk_0 k_0 \sqrt{k_0^2 - m^2} |\tilde{\phi}(k_0)|^2}{\int_m^\infty dk_0 m \sqrt{k_0^2 - m^2} |\tilde{\phi}(k_0)|^2}, \quad (4.18)$$

видим, что $\langle m \rangle \geq m$, причем равенство $\langle m \rangle = m$ достигается лишь в плосковолновом пределе, т.е. волновой пакет любого физического состояния $|\mathbf{p}, x\rangle$ “тяжелее” составляющих его состояний с определенными импульсами. Этот эффект имеет совершенно общий характер и является одним из проявлений неаддитивности массы. В данном случае он обусловлен тем, что поперечные к вектору \mathbf{p} компоненты импульсов состояний $|\mathbf{k}\rangle$, из которых построен волновой пакет не дают вклада в среднее значение импульса ($\mathbf{p} \times \overline{\mathbf{P}} = 0$), но дают неотрицательный вклад в среднее значение энергии². Заметим, что среднее значение *квадрата* массы $\langle P^2 \rangle$ равно, естественно, m^2 , так что $\langle P \rangle^2 \geq \langle P^2 \rangle = m^2$.

¹Этот факт легко понять и из простых размерных соображений: поскольку 3-вектор $\overline{\mathbf{P}}$ зависит от единственной векторной величины \mathbf{p} , то $\langle \mathbf{P} \rangle \propto \mathbf{p}$.

²Здесь можно усмотреть некоторую аналогию с известным эффектом возрастания массы газа в сосуде при его (однородном) нагревании: сосуд при этом не получает дополнительного импульса, но внутренняя энергия газа увеличивается.

Покажем, что в среднем пакет находится на массовой поверхности. Из уже упоминавшихся размерных соображений следует, что $\langle P_0 \rangle = \kappa E_p$ и $\langle \mathbf{P} \rangle = \kappa' \mathbf{p}$, где κ и κ' – некоторые безразмерные величины, не зависящие от \mathbf{p} . Тогда из ур. (4.15) получаем

$$p^\mu \langle P_\mu \rangle = \kappa E_p^2 - \kappa' \mathbf{p}^2 = \kappa m^2 + (\kappa - \kappa') \mathbf{p}^2 = \frac{1}{2mV_*} \int \frac{d\mathbf{k}(pk) |\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})|^2}{(2\pi)^3 2E_k}. \quad (4.19)$$

Поскольку левое и правое выражения в ур. (4.19) являются лоренц-инвариантами, то $\kappa = \kappa'$. Положив теперь в ур. (4.19) $\mathbf{p} = 0$ и учитывая определение в ур. (4.17), найдем: $\kappa = \langle m \rangle / m \geq 1$. Мы доказали тем самым, что

$$\langle P \rangle = (\langle P_0 \rangle, \langle \mathbf{P} \rangle) = (\langle m \rangle / m) (\mathbf{p}, E_p) \quad \text{и} \quad \langle P \rangle^2 = \langle P_\mu \rangle \langle P^\mu \rangle = \langle m \rangle^2.$$

Отсюда видим, в частности, что групповая скорость пакета $\langle \mathbf{v}_p \rangle = \nabla_{\langle P \rangle} \langle P_0 \rangle = \langle \mathbf{P} \rangle / \langle P_0 \rangle$ совпадает с его наиболее вероятной скоростью $\mathbf{v}_p = \mathbf{p} / E_p$.

4.1.3 Волновой пакет для фермиона

Для дальнейших расчетов в рамках S -матричного формализма КТП нам понадобятся волновые пакеты фермионов, одночастичные фоковские состояния которых имеют вид $|\mathbf{k}, s\rangle = \sqrt{2E_k} a_{\mathbf{k}s}^\dagger |0\rangle$ с лоренц-инвариантной нормой $\langle \mathbf{q}, r | \mathbf{k}, s \rangle = (2\pi)^3 2E_k \delta_{sr} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})$. Операторы $a_{\mathbf{k}s}^\dagger$ и $a_{\mathbf{k}s}$ – стандартные операторы рождения и уничтожения частицы с массой $m > 0$, 3-импульсом \mathbf{k} и проекцией спина s , удовлетворяющие анти-коммутиационным соотношениям:

$$\{a_{\mathbf{q}r}, a_{\mathbf{k}s}\} = \{a_{\mathbf{q}r}^\dagger, a_{\mathbf{k}s}^\dagger\} = 0, \quad \{a_{\mathbf{q}r}, a_{\mathbf{k}s}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta_{sr} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}).$$

Построим релятивистский волновой пакет фермиона, т.е. состояние локализованное в конфигурационном и импульсном пространствах, обладающее трансформационными свойствами, аналогичными свойствам фоковских состояний и превращающееся в фоковское состояние в плосковолновом пределе. Следуя аналогии с построенным пакетом для скалярной частицы будем характеризовать пакет наиболее вероятным значением 3-импульса \mathbf{p} и проекцией спина s . В дальнейшем мы пренебрегаем возможной зависимостью $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}_a)$ от спиновых степеней свободы, что представляется нам вполне разумным приближением:

$$|\mathbf{p}, s\rangle = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) |\mathbf{k}, s\rangle. \quad (4.20)$$

Волновой пакет в ур. (4.20) описывает состояние с проекцией спина s , средним импульсом \mathbf{p} и средней трехмерной координатой равной нулю в момент времени $t = 0$. Чтобы задать начальное состояние волнового пакета, достаточно определить его среднюю координату в произвольный фиксированный момент времени. Будет ли этот момент в “прошлом” или “будущем” относительно нуля, не имеет никакого значения, поскольку эволюция волнового пакета во времени позволяет восстановить его траекторию в любой момент времени. Исключительно для визуального удобства

(чтобы возникали объекты типа $\psi(x - y)$, а не $\psi(x + y)$), задаем начальное условие для волнового пакета со средней трехмерной координатой $(-\mathbf{x})$ в некоторый достаточно удаленный в прошлое момент времени $(-x^0)$, т.е. $|\mathbf{p}, s\rangle \rightarrow e^{+i\hat{P}x}|\mathbf{p}, s\rangle$:

$$|\mathbf{p}, s, x\rangle = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} e^{+i\mathbf{k}x} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) |\mathbf{k}, s\rangle, \quad (4.21)$$

где лоренц-инвариантная функция зависит еще и от дисперсии импульса σ .

Координатное представление. Рассмотрим свободное фермионное поле со спином $\frac{1}{2}$, полевой оператор которого имеет вид

$$\Psi(y) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \sum_s \left[a_{\mathbf{k}s} u_s(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}y} + b_{\mathbf{k}s}^\dagger v_s(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}y} \right].$$

Состояние $\langle 0|\Psi(y)$ нередко называют состоянием фермиона с определенной координатой, на что наталкивает следующее элементарное вычисление:

$$\langle 0|\Psi(y)|\mathbf{p}, s\rangle = u_s(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}y}, \quad (4.22)$$

дающее нам плоскую волну $e^{-i\mathbf{p}y}$, умноженную на спинор $u_s(\mathbf{p})$. Аналогично, определим координатную волновую функцию, соответствующую волновому пакету в ур. (4.21):

$$\langle 0|\Psi(y)|\mathbf{p}, s, x\rangle = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} u_s(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}(y-x)} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \simeq u_s(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p}, y - x), \quad (4.23)$$

где приближенное равенство соответствует узким пакетам. Условие применимости этого приближения может быть записано как

$$|i\nabla_{\mathbf{y}} \ln \psi(\mathbf{p}, x - y) + \mathbf{p}| \ll 2E_{\mathbf{p}}. \quad (4.24)$$

Лоренц-инвариантная функция ψ определена следующим образом:

$$\psi(\mathbf{p}, x) \equiv \psi(\mathbf{p}, x_0, \mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) e^{-i\mathbf{k}x}. \quad (4.25)$$

Очевидно, функция в ур. (4.25) удовлетворяет (для любого \mathbf{p}) уравнению Клейна-Гордона

$$(\partial^2 + m^2)\psi(\mathbf{p}, x) = 0,$$

т.е. представляет собой релятивистский волновой пакет в терминах стандартной теории рассеяния КТП. Ясно также, что $\psi(\mathbf{p}, x)$ есть функция только двух независимых скалярных переменных x^2 и $(\mathbf{p}x)$.

Скалярная функция ψ не меняется при переходе в систему покоя пакета ($\mathbf{p}_* = 0$), т.е.

$$\psi(\mathbf{p}, x) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{0}) e^{-i\mathbf{k}x_*} = \psi(\mathbf{0}, x_*), \quad (4.26)$$

где 4-вектор $x_* = (x_*^0, \mathbf{x}_*)$ связан с $x = (x^0, \mathbf{x})$ преобразованием Лоренца вдоль направления $-\mathbf{p}$ (из л.с. в с.с.о. пакета),

$$x_*^0 = \Gamma_{\mathbf{p}}(x_0 - \mathbf{v}_{\mathbf{p}}\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}_* = \mathbf{x} + \Gamma_{\mathbf{p}} \left[\frac{\Gamma_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}_{\mathbf{p}}\mathbf{x})}{\Gamma_{\mathbf{p}} + 1} - x_0 \right] \mathbf{v}_{\mathbf{p}}, \quad (4.27a)$$

а $\Gamma_p = E_p/m = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}_p^2}$ – лоренц-фактор пакета. Поскольку $\psi(\mathbf{0}, x_*)$ – четная функция переменной x_* , она может зависеть только от переменных x_*^0 и $|x_*|$, которые выражаются через инварианты (px) и x^2 посредством соотношений

$$x_*^0 = \frac{(px)}{m}, \quad |\mathbf{x}_*|^2 = (x_*^0)^2 - x^2 = \frac{1}{m^2} [(px)^2 - m^2 x^2]. \quad (4.27б)$$

С помощью ур. (4.27а) и ур. (4.27б) нетрудно проверить также, что

$$|\mathbf{x}^*| = \Gamma_p \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{v}_p x_0)^2 - (\mathbf{v}_p \times \mathbf{x})^2} = \frac{1}{m} \sqrt{(E_p \mathbf{x} - \mathbf{p} x_0)^2 - (\mathbf{p} \times \mathbf{x})^2}. \quad (4.28)$$

Эффективный объем волнового пакета. В соответствии с принятой нормировкой волнового пакета в ур. (4.14), безразмерная функция $\psi(\mathbf{p}, x)$ не является нормированной волновой функцией. Это позволяет дать величине

$$V(\mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \int d\mathbf{x} |\psi(\mathbf{p}, x)|^2 = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{|\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})|^2}{(2E_{\mathbf{k}})^2} = \frac{V(\mathbf{0})}{\Gamma_p} \quad (4.29)$$

интерпретацию трехмерного объема в пространстве, занимаемого волновым пакетом. Такая интерпретация будет тем точнее, чем уже в импульсном пространстве волновой пакет. В таком приближении, норму состояния можно представить в виде:

$$\langle p, x | p, x \rangle = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{|\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})|^2}{2E_{\mathbf{k}}} \simeq 2\langle E_p \rangle \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{|\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})|^2}{(2E_{\mathbf{k}})^2} = 2\langle E_p \rangle V(\mathbf{p}). \quad (4.30)$$

Заметим, что в общем случае $V_* \neq V(\mathbf{0})$.

4.1.4 Перестановочная функция

Удобно ввести вспомогательный оператор рождения волнового пакета:

$$A_{ps}^\dagger(x) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}} 2E_p}} a_{\mathbf{k}r}^\dagger, \quad (4.31)$$

с помощью которого состояние в ур. (4.20) можно записать в виде аналогичном плосковолновому пределу,

$$|\mathbf{p}, s, x\rangle = \sqrt{2E_p} A_{ps}^\dagger(x) |0\rangle. \quad (4.32)$$

Очевидно, что $A_{ps}^\dagger(x)$ переходит в a_{ps}^\dagger в пределе $\sigma \rightarrow 0$.

Из определения операторов $A_{ps}(x)$ и $A_{ps}^\dagger(x)$ нетрудно вывести следующие (анти)коммутиционные соотношения:

$$\{a_{qr}, A_{ps}^\dagger(x)\} = \delta_{sr} (4E_q E_p)^{-1/2} e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} \phi(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad (4.33а)$$

$$\{A_{qr}(y), A_{ps}(x)\} = \{A_{qr}^\dagger(y), A_{ps}^\dagger(x)\} = 0, \quad (4.33б)$$

$$\{A_{qr}(y), A_{ps}^\dagger(x)\} = \delta_{sr} (4E_q E_p)^{-1/2} \mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x - y). \quad (4.33в)$$

Здесь мы ввели лоренц- и трансляционно-инвариантную перестановочную функцию

$$\mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x - y) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \phi^*(\mathbf{k}, \mathbf{q}) e^{i\mathbf{k}(x-y)}. \quad (4.34)$$

Из ур. (4.21) и ур. (4.33в) следует, что

$$\langle \mathbf{q}, r, y | \mathbf{p}, s, x \rangle = \delta_{sr} \mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x - y). \quad (4.35)$$

Некоторые общие свойства перестановочной функции в ур. (4.34) становятся особенно прозрачными в системе центра инерции (с.ц.и.) двух пакетов. Будем обозначать величины в этой системе подстрочным индексом “*” или (когда это не может быть спутано со знаком комплексного сопряжения) – надстрочным индексом “*”. Поскольку в с.ц.и. $\mathbf{p}_* + \mathbf{q}_* = 0$, имеем

$$\mathcal{D}(\mathbf{p}_*, -\mathbf{p}_*; x_* - y_*) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}_*) \phi^*(\mathbf{k}, -\mathbf{p}_*) e^{i\mathbf{k}(x_* - y_*)}. \quad (4.36)$$

Благодаря характерному поведению формфактора $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ вблизи точки $\mathbf{k} = \mathbf{p}$ следует ожидать, что модуль функции $\mathcal{D}(\mathbf{p}_*, -\mathbf{p}_*; x_* - y_*)$ имеет острый максимум при $\mathbf{p}_* = 0$ и быстро исчезает при больших значениях $|\mathbf{p}_*|$, поскольку максимумы сомножителей $|\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}_*)|$ и $|\phi(\mathbf{k}, -\mathbf{p}_*)|$ в подынтегральном выражении в ур. (4.36) сильно разнесены в этом случае и, значит, произведение $|\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}_*) \phi^*(\mathbf{k}, -\mathbf{p}_*)|$ мало для *любых* значений переменной интегрирования \mathbf{k} . Эта ситуация схематически показана на рис. 4.1. Нетрудно видеть, что интеграл в ур. (4.36) становится исчеза-

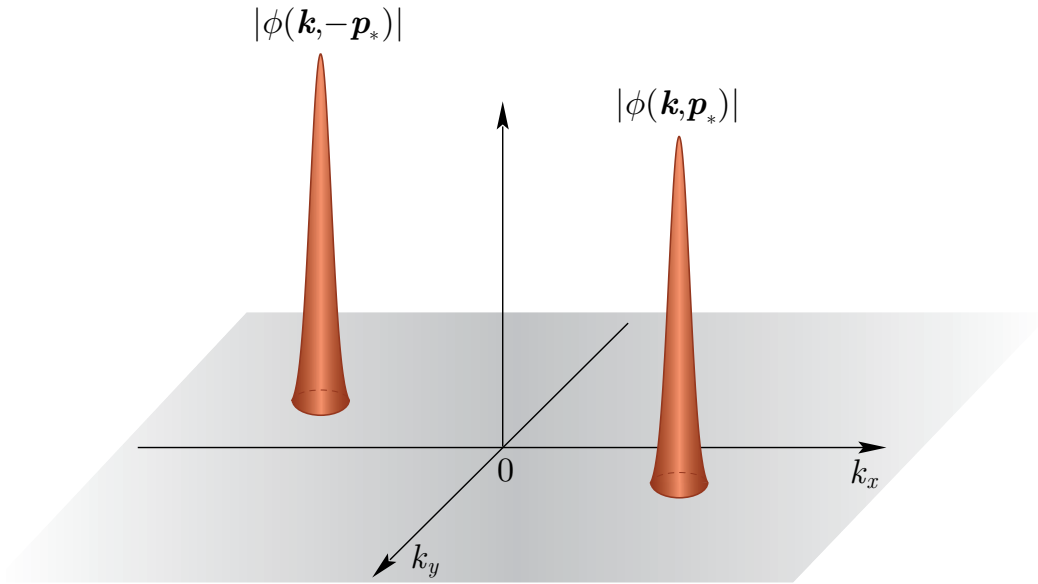


Рисунок 4.1 — Схематическая иллюстрация малости подынтегрального выражения в ур. (4.36) при больших значениях $|\mathbf{p}_*|$.

юще малым и в случае, когда точки x_* и y_* сильно разнесены в пространстве, т.е. когда значение $|x_* - y_*|$ велико. Это происходит из-за быстро осциллирующего фактора $e^{-i\mathbf{k}(x_* - y_*)}$ в подынтегральном выражении в ур. (4.36).

Для того чтобы вернуться в лабораторную (или любую другую) систему отсчета (л.с.), необходимо выразить переменные в с.ц.и. через переменные в этой системе. Соответствующее преобразование Лоренца имеет вид:

$$x_*^0 = \Gamma (x^0 - \mathbf{v}\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}_* = \mathbf{x} + \Gamma \left[\frac{\Gamma}{\Gamma + 1} (\mathbf{v}\mathbf{x}) - x^0 \right] \mathbf{v}$$

(и аналогично для y_* и $x_* - y_*$), где

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} + \mathbf{q}}{E_p + E_q} \quad \text{и} \quad \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{E_p + E_q}{E_{p_*} + E_{q_*}}$$

означают, соответственно, скорость и лоренц-фактор с.ц.и. в л.с.; энергия и импульс в с.ц.и. даются следующими формулами:

$$E_{p_*} = E_{q_*} = \frac{1}{2} \sqrt{(p + q)^2} \equiv E_*, \quad |\mathbf{p}_*| = |\mathbf{q}_*| = \frac{1}{2} \sqrt{-(p - q)^2} \equiv P_*.$$

Из последнего равенства видно, что P_* убывает при $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ и возрастает с ростом $|\mathbf{p} - \mathbf{q}|$. Поэтому из вышеприведенных соображений следует, что функция $|\mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x - y)|$ достигает своего максимума при $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ и убывает при больших значениях $|\mathbf{p} - \mathbf{q}|$.

В заключение этого раздела уместно выписать кинематические тождества

$$2E_*x_*^0 = (p + q)x, \quad 2\mathbf{p}_*x_* = (q - p)x, \quad \mathbf{v}x_* = \Gamma(\mathbf{v}x - v^2x^0), \quad (4.37a)$$

$$\mathbf{x}_*^2 = \frac{[(p + q)x]^2}{(p + q)^2} - x^2 = \Gamma^2 \left(|\mathbf{x} - \mathbf{v}x^0|^2 - |\mathbf{v} \times \mathbf{x}|^2 \right), \quad (4.37b)$$

которые будут часто использоваться в дальнейшем изложении. Из последнего равенства следует, в частности, что

$$\mathbf{x}_* = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{v}x^0.$$

4.1.5 Многопакетные состояния

Многопакетные состояния важны для построения теории нейтринных осцилляций в веществе с учетом эффектов когерентного рассеяния нейтрино на частицах среды. Здесь мы предполагаем, что тождественные волновые пакеты, имеющие разные импульсы и проекции спинов, но отвечающие состояниям одного и того же квантового поля, характеризуются *одинаковыми* наборами параметров $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$. Поэтому ниже мы не указываем зависимость от $\boldsymbol{\sigma}$ в явном виде. Определим кет-состояние n тождественных волновых пакетов как

$$|\mathbf{p}_1, s_1, x_1; \mathbf{p}_2, s_2, x_2; \dots; \mathbf{p}_n, s_n, x_n\rangle = \left(\prod_{i=1}^n 2E_{p_i} \right)^{1/2} A_{\mathbf{p}_1 s_1}^\dagger(x_1) A_{\mathbf{p}_2 s_2}^\dagger(x_2) \dots A_{\mathbf{p}_n s_n}^\dagger(x_n) |0\rangle. \quad (4.38)$$

Соответствующее бра-состояние получают из ур. (4.38) с помощью эрмитового сопряжения. Очевидно, состояние ур. (4.38) полностью симметрично (антисимметрично) для бозонов (фермионов) относительно перестановок $(\mathbf{p}_i, s_i, x_i) \longleftrightarrow (\mathbf{p}_j, s_j, x_j)$ для любой пары индексов i, j ($1 \leq i, j \leq n, i \neq j$). Общее соотношение симметрии имеет вид

$$|\mathbf{p}_1, s_1, x_1; \mathbf{p}_2, s_2, x_2; \dots; \mathbf{p}_n, s_n, x_n\rangle = (\pm 1)^{\eta_P} |\mathbf{p}_{i_1}, s_{i_1}, x_{i_1}; \mathbf{p}_{i_2}, s_{i_2}, x_{i_2}; \dots; \mathbf{p}_{i_n}, s_{i_n}, x_{i_n}\rangle.$$

Здесь и ниже верхний знак относится к бозонам, а нижний – к фермионам, а η_P – четность перестановки

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы найти нормировку состояний ур. (4.38), удобно ввести $n \times n$ матрицу

$$\mathbb{D}_n \equiv \mathbb{D}(\{\mathbf{q}, r, y\}_n, \{\mathbf{p}, s, x\}_n) = \left| \left| \delta_{s_i r_j} (\mp 1)^{i+j} \mathcal{D}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j; x_i - y_j) \right| \right|.$$

Докажем, что

$$M_n \equiv \langle \mathbf{q}_1, r_1, y_1; \mathbf{q}_2, r_2, y_2; \dots; \mathbf{q}_n, r_n, y_n | \mathbf{p}_1, s_1, x_1; \mathbf{p}_2, s_2, x_2; \dots; \mathbf{p}_n, s_n, x_n \rangle = \det(\mathbb{D}_n). \quad (4.39)$$

Это соотношение тривиально в случае $n = 1$. Прямым вычислением проверяется, что

$$M_2 \equiv \langle \mathbf{q}_1, r_1, y_1; \mathbf{q}_2, r_2, y_2 | \mathbf{p}_1, s_1, x_1; \mathbf{p}_2, s_2, x_2 \rangle = [\delta_{s_1 r_1} \delta_{s_2 r_2} \mathcal{D}(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1; x_1 - y_1) \mathcal{D}(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2; x_2 - y_2) \pm \delta_{s_1 r_2} \delta_{s_2 r_1} \mathcal{D}(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2; x_1 - y_2) \mathcal{D}(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1; x_2 - y_1)] = |\mathbb{D}_2|.$$

Следовательно, равенство ур. (4.39) справедливо и при $n = 2$. Рассмотрим теперь матричный элемент M_{n+1} для $n \geq 2$. Согласно ур. (4.38) и ур. (4.33б),

$$M_{n+1} = \left(\prod_{i=1}^{n+1} 4E_{\mathbf{q}_i} E_{\mathbf{p}_i} \right)^{1/2} \langle 0 | A_{\mathbf{q}_1 r_1}(y_1) \cdots A_{\mathbf{q}_n r_n}(y_n) A_{\mathbf{q}_{n+1} r_{n+1}}(y_{n+1}) \times \\ \times A_{\mathbf{p}_{n+1} s_{n+1}}^\dagger(x_{n+1}) A_{\mathbf{p}_n s_n}^\dagger(x_n) \cdots A_{\mathbf{p}_1 s_1}^\dagger(x_1) | 0 \rangle.$$

Теперь, после последовательных перестановок оператора $A_{\mathbf{p}_{n+1} s_{n+1}}^\dagger(x_{n+1})$ с операторами $A_{\mathbf{q}_n r_n}(y_n), \dots, A_{\mathbf{q}_1 r_1}(y_1)$ с применением ур. (4.39) для n -пакетных матричных элементов и с учетом (анти)коммутиционных соотношений ур. (4.33в), находим

$$M_{n+1} = \left(\prod_{i=1}^{n+1} 4E_{\mathbf{q}_i} E_{\mathbf{p}_i} \right)^{1/2} \sum_{j=1}^{n+1} (\pm 1)^{n+j+1} \delta_{s_{n+1} r_j} \times \\ \times (4E_{\mathbf{q}_j} E_{\mathbf{p}_{n+1}})^{-1/2} \mathcal{D}(\mathbf{p}_{n+1}, \mathbf{q}_j; x_{n+1} - y_j) \times \\ \times \langle 0 | A_{\mathbf{q}_1 r_1}(y_1) \cdots A_{\mathbf{q}_{j-1} r_{j-1}}(y_{j-1}) A_{\mathbf{q}_{j+1} r_{j+1}}(y_{j+1}) \cdots \\ \cdots A_{\mathbf{q}_n r_n}(y_n) A_{\mathbf{q}_{n+1} r_{n+1}}(y_{n+1}) A_{\mathbf{p}_n s_n}^\dagger(x_n) \cdots A_{\mathbf{p}_1 s_1}^\dagger(x_1) | 0 \rangle.$$

После некоторых преобразований правая часть этого соотношения может быть переписана в компактной форме,

$$\sum_{j=1}^{n+1} (\pm 1)^{n+j+1} \delta_{s_{n+1} r_j} \mathcal{D}(\mathbf{p}_{n+1}, \mathbf{q}_j; x_{n+1} - y_j) |\mathbb{D}_{n+1}^{(j)}|,$$

где $|\mathbb{D}_{n+1}^{(j)}|$ представляет собой минор порядка n определителя $|\mathbb{D}_{n+1}|$, возникающий при вычеркивании из последнего $(n+1)$ -й строки и j -го столбца. Сумма по j последнего выражения представляет собой не что иное, как минорное разложение определителя $|\mathbb{D}_{n+1}|$ по $(n+1)$ -й строке. Следовательно,

$$M_{n+1} = |\mathbb{D}_{n+1}|,$$

что завершает доказательство по индукции.

Итак, согласно ур. (4.39), n -бозонный (n -фермионный) матричный элемент M_n пропорционален перманенту (детерминанту) матрицы $\left| \left| \delta_{s_i r_j} \mathcal{D}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j; x_i - y_j) \right| \right|$. Перейдем, наконец, к проблеме нормировки. Поскольку $\mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x - y) = \mathcal{D}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}; y - x)$, то матрица $\mathbb{D}(\{\mathbf{p}, s, x\}_n, \{\mathbf{p}, s, x\}_n)$ эрмитова. Следовательно, n -пакетный матричный элемент

$$\langle \mathbf{p}_1, s_1, x_1; \mathbf{p}_2, s_2, x_2; \dots; \mathbf{p}_n, s_n, x_n | \mathbf{p}_1, s_1, x_1; \mathbf{p}_2, s_2, x_2; \dots; \mathbf{p}_n, s_n, x_n \rangle \equiv {}_n \langle \mathbf{p}, s, x | \mathbf{p}, s, x \rangle_n \quad (4.40)$$

представляет собой *вещественную* полиномиальную комбинацию n -го порядка от перестановочных функций \mathcal{D} с разными аргументами. Например, для $n = 1, 2$ и 3 получаем

$$\begin{aligned} {}_1\langle \mathbf{p}, s, x | \mathbf{p}, s, x \rangle_1 &= 2mV_\star, \\ {}_2\langle \mathbf{p}, s, x | \mathbf{p}, s, x \rangle_2 &= (2mV_\star)^2 \pm \delta_{s_1 s_2} |\mathcal{D}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; x_1 - x_2)|^2, \\ {}_3\langle \mathbf{p}, s, x | \mathbf{p}, s, x \rangle_3 &= (2mV_\star)^3 \pm 2mV_\star \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \delta_{s_i s_j} |\mathcal{D}(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j; x_i - x_j)|^2 + \\ &+ 2\text{Re} \prod_{1 \leq i < j \leq 3} [\delta_{s_i s_j} \mathcal{D}(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j; x_i - x_j)]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Свойства перестановочной функции, обсуждавшиеся в разд. 4.1.4, позволяют проанализировать эти результаты в двух простых предельных случаях. Если пространственно-временные точки x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 2$) хорошо разделены или/и 3-импульсы $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ сильно отличаются друг от друга по величине или направлению (*режим непересечения*), то из ур. (4.39) следует, что

$${}_n\langle \mathbf{p}, s, x | \mathbf{p}, s, x \rangle_n \approx (2mV_\star)^n = \langle \mathbf{p}, s, x | \mathbf{p}, s, x \rangle^n.$$

В противоположной ситуации, когда пакеты, имеющие одинаковые проекции спинов, сильно пересекаются как в импульсном, так и в конфигурационном пространствах,

$${}_n\langle \mathbf{p}, s, x | \mathbf{p}, s, x \rangle_n \approx \begin{cases} n!(2mV_\star)^n & \text{для бозонов,} \\ 0 & \text{для фермионов.} \end{cases}$$

В обоих предельных случаях матричный элемент не зависит от импульсов, координат и проекций спина. Поведение n -пакетного матричного элемента в режиме пересечения есть просто проявление эффектов бозевского притяжения и принципа Паули для тождественных бозонов и фермионов, соответственно. Гораздо менее тривиальным фактом является то, что формализм волновых пакетов подтверждает интуитивные ожидания того, что свободные тождественные бозоны (фермионы) с одинаковыми импульсами и одинаковыми проекциями спинов не конденсируются (могут прекрасно сосуществовать), если они разделены достаточно большими пространственно-временными интервалами. Этот физически прозрачный результат невозможно понять в рамках плосковолнового формализма КТП. Более того, принцип Паули иногда формулируется в категорической форме: “вероятность обнаружить два тождественных фермиона с одинаковыми импульсами и проекциями спина равна нулю”. Мы видим, что это, вообще говоря, не так, если только речь идет не о частицах с определенными значениями импульсов – идеализированных математических объектах, существующих сразу во всем бесконечном пространстве-времени, а о волновых пакетах – объектах, локализованных в конечных пространственно-временных областях и характеризующихся наиболее вероятными значениями импульсов. В разд. 4.2.4 мы вернемся к этому концептуально важному вопросу и поясним точное значение слов “достаточно большой пространственно-временной интервал”, воспользовавшись простой моделью релятивистского волнового пакета.

4.2 Релятивистские гауссовы пакеты.

4.2.1 Функция $\phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p})$

Здесь мы детально исследуем простую, но важную для развиваемого формализма модель, применимую для описания достаточно узких (в импульсном пространстве) волновых пакетов. Поскольку для таких пакетов функция $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ представляет собой (с точностью до известного положительно-определенного фактора) “размазанную” δ -функцию, мы можем без ограничения общности считать, что $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) > 0$. Формфактор $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ – это функция единственной скалярной переменной $(k - p)^2$. Легко показать, что $(k - p)^2 \leq 0$. Действительно, переходя в с.с.о. пакета ($\mathbf{p}_* = 0$) и учитывая, что $E_{\mathbf{k}_*} \geq m$, имеем

$$(k - p)^2 = (k_* - p_*)^2 = -2m(E_{\mathbf{k}_*} - m) \leq 0.$$

Отметим так же, что $(k - p)^2 \approx -(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + [v_p(\mathbf{k} - \mathbf{p})]^2$ при $\mathbf{k} \sim \mathbf{p}$. Поскольку функция $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ имеет максимум в точке $\mathbf{k} = \mathbf{p}$, можно наложить на нее естественное дополнительное условие

$$\left. \frac{d \ln \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})}{d(k - p)^2} \right|_{\mathbf{k}=\mathbf{p}} \equiv \frac{1}{4\sigma^2} > 0, \quad \sigma = \text{const.}$$

Тогда, в достаточно малой окрестности максимума, функция $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ может быть аппроксимирована следующим выражением:

$$\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \approx N_\sigma \exp \left[\frac{(k - p)^2}{4\sigma^2} \right] \stackrel{\text{def}}{=} \phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p}). \quad (4.42)$$

Будем называть состояния с такими формфакторами релятивистскими гауссовыми пакетами (РГП), по аналогии с нековариантными (нерелятивистскими) гауссовыми пакетами в ур. (3.85) (НГП) с формфактором

$$\varphi_G(\mathbf{k} - \mathbf{p}) = \left(\frac{2\pi}{\sigma^2} \right)^{3/4} \exp \left[-\frac{(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2}{4\sigma^2} \right],$$

нормированным условием

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\varphi_G(\mathbf{k})|^2 = 1.$$

Ниже будет показано, что свойства РГП существенно отличаются от свойств НГП. Нормировочная константа N_σ в ур. (4.42) может быть найдена из условия ур. (4.14), согласно которому

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_\sigma} &= \int_0^\infty \frac{d|\mathbf{k}|}{(2\pi)^2} \frac{\mathbf{k}^2}{E_{\mathbf{k}}} \exp \left(\frac{m^2 - mE_{\mathbf{k}}}{2\sigma^2} \right) = \\ &= \left(\frac{m}{2\pi} \right)^2 \int_1^\infty d\Gamma \sqrt{\Gamma^2 - 1} \exp \left[-\frac{m^2}{2\sigma^2} (\Gamma - 1) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$N_\sigma = \phi_G(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \frac{2\pi^2 \exp(-m^2/2\sigma^2)}{\sigma^2 K_1(m^2/2\sigma^2)}, \quad (4.43)$$

где

$$K_1(z) = z \int_1^\infty dt e^{-zt} \sqrt{t^2 - 1} \quad \left(|\arg z| < \frac{\pi}{2} \right)$$

обозначает модифицированную функцию Бесселя 3-го рода порядка 1. Теперь мы можем переписать ур. (4.42) в виде

$$\phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \frac{2\pi^2}{\sigma^2 K_1(m^2/2\sigma^2)} \exp\left(-\frac{E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{p}} - \mathbf{k}\mathbf{p}}{2\sigma^2}\right). \quad (4.44)$$

При естественном (принимаемом далее по умолчанию) требовании

$$\sigma^2 \ll m^2, \quad (4.45)$$

с использованием известного асимптотического разложения для функции $K_1(z)$, справедливого при больших $|z|$ [154],

$$K_1(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[1 + \frac{3}{8z} + \frac{15}{2(8z)^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^3}\right) \right] \quad \left(|\arg z| < \frac{3\pi}{2} \right), \quad (4.46)$$

выражение ур. (4.44) может быть переписано как

$$\phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \frac{2\pi^{3/2} m}{\sigma^2 \sigma} \exp\left[\frac{(k-p)^2}{4\sigma^2}\right] \left[1 + \frac{3\sigma^2}{4m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\sigma^4}{m^4}\right) \right]. \quad (4.47)$$

В нерелятивистском случае ($(|\mathbf{k}| + |\mathbf{p}|)^2 \ll 4m^2$) получаем из ур. (4.47):

$$\phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \approx \frac{2\pi^{3/2} m}{\sigma^2 \sigma} \exp\left[-\frac{(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2}{4\sigma^2}\right] \equiv \phi_G^{\text{NR}}(\mathbf{k}, \mathbf{p}), \quad (4.48)$$

что совпадает, с точностью до нормировки, с формфактором НГП $\varphi_G(\mathbf{k} - \mathbf{p})$. Однако при релятивистских импульсах разница между $\phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ и $\varphi_G(\mathbf{k} - \mathbf{p})$ может быть сколь угодно большой (безотносительно разницы в нормировке). Так, в ультрарелятивистском пределе ($\mathbf{p}^2 \gg m^2, \mathbf{k}^2 \gg m^2$) функция ур. (4.47) ведет себя следующим образом:

$$\phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \approx \frac{2\pi^{3/2} m}{\sigma^2 \sigma} \exp\left[-\frac{m^2 (|\mathbf{k}| - |\mathbf{p}|)^2}{4\sigma^2 |\mathbf{k}||\mathbf{p}|} - \frac{(1 - \cos \vartheta) |\mathbf{k}||\mathbf{p}|}{2\sigma^2}\right] \equiv \phi_G^{\text{UR}}(\mathbf{k}, \mathbf{p}),$$

где ϑ – угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{p} . В частности, при $\vartheta = 0$ и $\pi/2$ имеем:

$$\phi_G^{\text{UR}}|_{\vartheta=0} \propto \exp\left[-\frac{(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2}{4\sigma^2 \Gamma_{\mathbf{k}} \Gamma_{\mathbf{p}}}\right] \quad \text{и} \quad \phi_G^{\text{UR}}|_{\vartheta=\pi/2} \propto \exp\left[-\frac{|\mathbf{k}||\mathbf{p}|}{2\sigma^2}\right].$$

В первом примере, как видим, релятивистский эффект сводится к уширению пакета (по сравнению с нерелятивистским случаем) в импульсном пространстве ($\sigma \mapsto \sigma \sqrt{\Gamma_{\mathbf{k}} \Gamma_{\mathbf{p}}}$). Этот эффект существен для всех процессов рождения и поглощения (рассеяния) нейтрино, проходящих с участием ультрарелятивистских частиц.

Чтобы проиллюстрировать важность правильной нормировки полезно проверить в явном виде, что предел $\phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ при $\sigma \rightarrow 0$ в самом деле дается равенством ур. (4.1.1). Для этого достаточно доказать, что для любой гладкой функции $F(\mathbf{k})$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int \frac{d\mathbf{k} \phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{0})}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} F(\mathbf{k}) = F(\mathbf{0}). \quad (4.49)$$

Левая часть последнего равенства может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} & \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{m}{(4\pi)^{3/2} \sigma^3} \int d\Omega_{\mathbf{k}} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \frac{\mathbf{k}^2}{E_{\mathbf{k}}} \exp \left[-\frac{m^2}{2\sigma^2} \left(\frac{E_{\mathbf{k}}}{m} - 1 \right) \right] F(\mathbf{k}) = \\ & = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(\frac{m^2}{4\pi\sigma^2} \right)^{3/2} \int d\Omega_{\mathbf{n}} \int_0^\infty dt \exp \left(-\frac{m^2 t}{2\sigma^2} \right) \sqrt{t(t+2)} F \left(m\sqrt{t(t+2)} \mathbf{n} \right), \end{aligned}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$. Для оценки получившегося интеграла по t можно использовать известную асимптотическую формулу (см., например, [155])

$$\int_0^\infty dt t^{a-1} e^{-\nu t} f(t) \sim \nu^{-a} \Gamma(a) f(0) [1 + o(1)] \quad (a > 0, \nu \rightarrow \infty), \quad (4.50)$$

справедливую для произвольной непрерывной функции $f(t)$, $t \in [0, \infty)$. Принимая во внимание, что в нашем случае

$$a = \frac{3}{2}, \quad \nu = \frac{m^2}{2\sigma^2} \quad \text{и} \quad f(t) = \sqrt{t+2} F \left(m\sqrt{t(t+2)} \mathbf{n} \right),$$

тождество в ур. (4.49) становится очевидным.

В результате видим, что функция $\phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ представляет собой простейшую модель форм-фактора, удовлетворяющего всем условиям, накладываемым на функцию $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ общего вида. Модель РГП позволяет в деталях изучить свойства волновой и перестановочной функций.

Теория асимметричного гауссова релятивистского волнового пакета развита в работе [156].

4.2.2 Волновая функция $\psi_G(\mathbf{p}, x)$

Подставляя ур. (4.44) в ур. (4.26) и интегрируя по направлениям вектора \mathbf{k} , получаем после простых преобразований:

$$\psi(\mathbf{0}, x_*) = \int_m^\infty dE \exp \left[-\frac{E}{m} \left(\frac{m^2}{2\sigma^2} + imx_*^0 \right) \right] \frac{\sin(|\mathbf{x}_*| \sqrt{E^2 - m^2})}{2\sigma^2 |\mathbf{x}_*| K_1(m^2/2\sigma^2)}.$$

Этот интеграл вычисляется с помощью известного представления для функции K_1

$$\int_a^\infty dt e^{-bt} \sin \left(c\sqrt{t^2 - a^2} \right) = \frac{ac}{\sqrt{b^2 + c^2}} K_1 \left(a\sqrt{b^2 + c^2} \right), \quad (4.51)$$

справедливого для $a > 0$ и $\text{Re } b > |\text{Im } c|$ (см., например, [157, (2.5.42.3), с. 460]). Итак, мы приходим к компактному выражению

$$\psi(\mathbf{p}, x) = \frac{K_1(\zeta m^2/2\sigma^2)}{\zeta K_1(m^2/2\sigma^2)} \stackrel{\text{def}}{=} \psi_G(\mathbf{p}, x), \quad (4.52)$$

в котором фигурирует безразмерная лоренц-инвариантная переменная

$$\zeta = |\zeta| e^{i\varphi} = \sqrt{1 - \frac{4\sigma^2}{m^2} [\sigma^2 x_*^2 - imx_*^0]} = \sqrt{1 - \frac{4\sigma^2}{m^2} [\sigma^2 x^2 - i(px)]}. \quad (4.53)$$

Здесь и в дальнейшем знак квадратного корня понимается в смысле его главного значения, а $x_*^2 = (x_*^0)^2 - \mathbf{x}_*^2$.

Полезно убедиться, что функция ур. (4.52) удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона. Учтывая, что $K_0'(z) = -K_1(z)$ и $K_1'(z) = -K_0(z) - K_1(z)/z$, находим:

$$\partial_\mu \left[\frac{K_1(z)}{z} \right] = - \left[K_0(z) + \frac{2}{z} K_1(z) \right] \frac{\partial_\mu z}{z},$$

где $z = m^2 \zeta / (2\sigma^2)$. Отсюда

$$\square \left[\frac{K_1(z)}{z} \right] = - \left[K_0(z) + \frac{2}{z} K_1(z) \right] \frac{\square z}{z} - \left[\frac{3}{z} K_0(z) + \left(1 + \frac{6}{z^2} \right) K_1(z) \right] \frac{(\partial_\mu z)(\partial^\mu z)}{z}. \quad (4.54)$$

Поскольку

$$\partial_\mu z = -\frac{m^2}{\sigma^2 z} \left(\sigma^2 x_\mu - \frac{i}{2} p_\mu \right),$$

то

$$\square z = -\partial_\mu \partial^\mu z = \frac{3m^2}{z}, \quad (\partial_\mu z)(\partial^\mu z) = -m^2.$$

Подставив эти тождества в ур. (4.54) и учитывая ур. (4.52) убеждаемся, что $(\partial^2 + m^2)\psi_G = 0$.

Модуль и фаза переменной ур. (4.53) даются следующими формулами:

$$|\zeta|^4 = \left(1 - \frac{4\sigma^4 x_*^2}{m^2} \right)^2 + \left(\frac{4\sigma^2 x_*^0}{m} \right)^2 = 1 + \frac{8\sigma^4}{m^2} [(x_*^0)^2 + \mathbf{x}_*^2] + \left(\frac{4\sigma^4 x_*^2}{m^2} \right)^2, \quad (4.55)$$

$$\sin 2\varphi = \frac{4\sigma^2 x_*^0}{m|\zeta|^2}, \quad \cos 2\varphi = \frac{m^2 - 4\sigma^4 x_*^2}{m^2|\zeta|^2}. \quad (4.56)$$

Из последнего равенства в ур. (4.55) видно, что для любого x_*

$$|\zeta| \geq 1, \quad (4.57)$$

причем равенство имеет место только в центре пакета ($x_*^0 = 0, |\mathbf{x}_*| = 0$). Используя ур. (4.56) и соображения аналитичности нетрудно показать, что

$$|\varphi| < \pi/2. \quad (4.58)$$

В самом деле, из ур. (4.56) следует, что $\varphi \rightarrow \mp 0$ при $x_*^0 \rightarrow \pm 0$. Поскольку это единственный нуль фазы φ при $|\zeta| < \infty$, из непрерывности φ вытекает, что $2\varphi \rightarrow \mp \pi$ при $x_*^0 \rightarrow \pm \infty$.

Рисунок 4.2 поясняет поведение $|\zeta|$ и φ , как функций двух независимых безразмерных переменных $\sigma^2 x_*^0/m$ и $\sigma^2 |\mathbf{x}_*|/m$. Можно показать, что функция $\psi_G(\mathbf{p}, x)$ не имеет нулей при $1 \leq |\zeta| < \infty$ и стремится к единице (нулю) при $\zeta \rightarrow 1$ ($\zeta \rightarrow \infty$) в секторе ур. (4.58). Из свойств параметра ζ следует, в частности, что $\psi_G(\mathbf{0}, x_*) \rightarrow 0$, если $|x_*^0| \rightarrow \infty$ (при фиксированном \mathbf{x}_*) или $|\mathbf{x}_*| \rightarrow \infty$ (при фиксированном x_*^0).

Поведение волновой функции $\psi_G(\mathbf{0}, x_*)$ кардинально зависит от величины отношения σ/m . В качестве примера, на рис. 4.3 показан профиль функции $|\psi_G(\mathbf{0}, x_*)|$ (левая панель) и увеличенный фрагмент этой функции в окрестности ее максимума (справа). Расчет сделан с $\sigma/m = 0.1$ в терминах безразмерных переменных $\sigma^2 x_*^0/m$ и $\sigma^2 x_*^3/m$, причем система координат выбрана так, что вектор \mathbf{x}_* направлен вдоль третьей оси. Отметим, что выбранное значение отношения σ/m

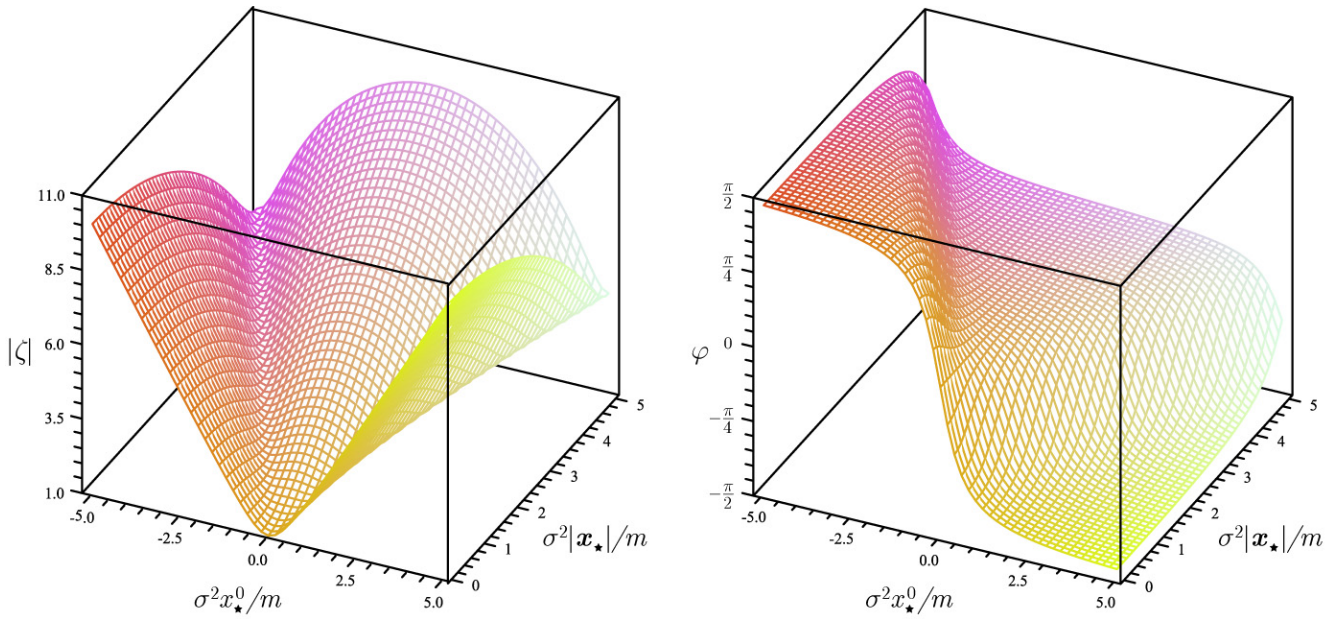


Рисунок 4.2 — 3-мерные графики функций $|\zeta|$ и φ в переменных $\sigma^2 x_*^0/m$ и $\sigma^2 |x_*|/m$.

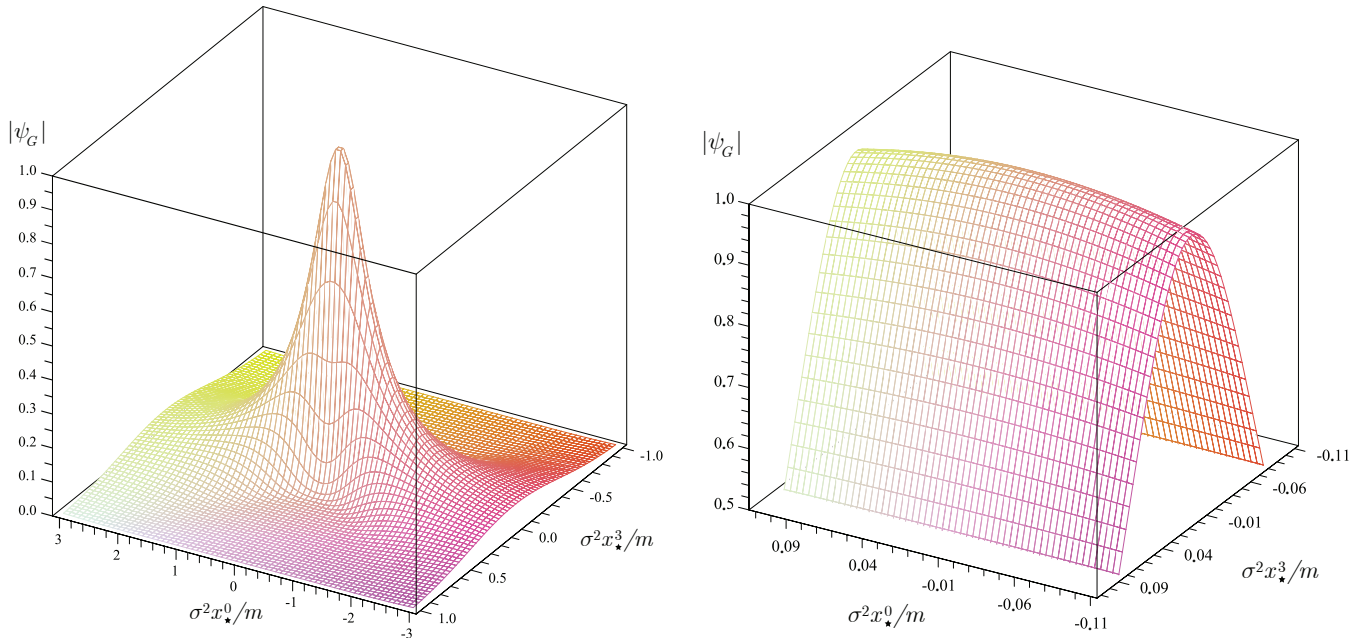


Рисунок 4.3 — 3-мерный график функции $|\psi_G(\mathbf{0}, x_*)|$ (слева) и ее увеличенный фрагмент в окрестности максимума (справа) в переменных $\sigma^2 x_*^0/m$ и $\sigma^2 x_*^3/m$ (предполагается, что $x_* = (0, 0, x_*^3)$). Расчет выполнен с $\sigma = 0.1m$.

совершенно нереалистично и выбрано лишь для удобства графического представления, т.к. при $\sigma/m \ll 0.1$ детали поведения $|\psi_G(\mathbf{0}, x_*)|$ были бы неразличимы. Разумеется, $|\psi_G(\mathbf{0}, x_*)|$ — четная функция обеих переменных; это объясняет симметрию профиля $|\psi_G(\mathbf{0}, x_*)|$ на рисунке. В достаточно малой окрестности максимума $|\psi_G(\mathbf{0}, x_*)|$, а так же при уменьшении значения σ/m , профиль функции $|\psi_G(\mathbf{0}, x_*)|$ относительно слабо меняется вдоль временной оси, но быстро уплощается вдоль пространственной оси. Рисунок 4.3 позволяет понять почему эффективный объем пакета, определенный согласно ур. (4.16), не зависит от времени, несмотря на то, что сама волновая функция $\psi_G(\mathbf{0}, x_*)$ асимптотически стремится к нулю при $|x_*^0| \rightarrow \infty$. Причина этого заключается в том,

что со временем пакет расплывается в пространстве так, что это расплывание в точности компенсирует убывание $|\psi_G(\mathbf{0}, x_*)|$. В результате этой компенсации нормировка пакета остается неизменной. Таким образом, расплывание релятивистского волнового пакета вовсе не означает, что пакет исчезает, как это явление иногда интерпретируется в учебниках по квантовой механике.

4.2.3 Перестановочная функция $\mathcal{D}_G(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x)$

Подставляя ур. (4.44) в определение перестановочной функции ур. (4.34), записанной в с.с.о. пакета и интегрируя по угловым переменным, получаем

$$\frac{\mathcal{D}(\mathbf{p}_*, -\mathbf{p}_*; x_*)}{2m\mathbf{V}_*} = \int_m^\infty dE \exp \left[-\frac{E}{m} \left(\frac{mE_*}{\sigma^2} + imx_*^0 \right) \right] \frac{\sin(|\mathbf{x}_*| \sqrt{E^2 - m^2})}{\sigma^2 |\mathbf{x}_*| K_1(m^2/\sigma^2)}.$$

Оставшийся интеграл по E легко вычислить, используя ур. (4.51); мы получаем [ср. с ур. (4.52)]

$$\mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x) = 2m\mathbf{V}_* \frac{K_1(zm^2/\sigma^2)}{zK_1(m^2/\sigma^2)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_G(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x). \quad (4.59)$$

Инвариантная безразмерная переменная z определена как

$$z = \frac{E_*}{m} \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{E_*^2} [\sigma^2 x_*^2 - 2iE_* x_*^0]} = \frac{1}{2m} \sqrt{(p+q)^2 - 4\sigma^2 [\sigma^2 x^2 - i(p+q)x]}. \quad (4.60)$$

При выводе последнего равенства мы использовали соотношения между кинематическими переменными в с.с.о. и л.с., приведенными в конце разд. 4.1.4. Модуль и фаза переменной z даются следующими формулами:

$$|z|^4 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{pq - 2\sigma^4 x^2}{m^2} \right)^2 + \left[\frac{\sigma^2(p+q)x}{m^2} \right]^2, \\ \arg z = -\frac{1}{2} \arcsin \left[\frac{\sigma^2(p+q)x}{m^2 |z|^2} \right].$$

Используя эти соотношения можно доказать, что

$$|z| \geq E_*/m \geq 1 \quad \text{и} \quad |\arg z| < \pi/2. \quad (4.61)$$

Найденные формулы для волновой и перестановочной функций позволяют детально изучить свойства волновых пакетов и многопакетных состояний. Однако даже в столь простой модели как РГП, расчеты интересующих нас макроскопических фейнмановских диаграмм становятся технически очень сложными из-за необходимости вычислять многомерные интегралы от произведений функций Бесселя, зависящих от комплексных переменных. Кроме того, для большинства практически важных случаев, интересен режим, в котором можно пренебречь расплыванием волновых пакетов. Такой режим характерен, например, для частиц не слишком разреженного газа, если среднее время между двумя последовательными столкновениями частицы много меньше эффективного времени расплывания пакета, описывающего ее состояние между столкновениями. Аналогичный случай представляют собой нестабильные частицы, время жизни которых мало по сравнению со временем расплывания пакета. Ниже мы рассмотрим соответствующее приближение в модели РГП.

4.2.4 Приближение нерасплывающихся пакетов

Определим физические условия, при которых допустимо пренебречь расплыванием РГП.

Благодаря неравенствам ур. (4.45), ур. (4.57) и ур. (4.58), можно использовать асимптотическое разложение ур. (4.46), которое дает

$$\begin{aligned} \psi_G(\mathbf{p}, x) = & \frac{1}{\zeta^{3/2}} \exp \left[\frac{m^2(1-\zeta)}{2\sigma^2} \right] \left[1 - \frac{3\sigma^2}{4m^2} \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{3\sigma^4}{32m^4} \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right) \left(11 + \frac{5}{\zeta} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{\sigma^6}{m^6} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Эта формула справедлива при любых \mathbf{p} и x , но она все еще слишком сложна для наших целей. При дополнительных ограничениях выражение ур. (4.62) можно значительно упростить, разлагая переменную ζ по степеням малого параметра σ^2/m^2 . В с.с.о. пакета находим

$$\begin{aligned} \ln [\psi_G(\mathbf{0}, x_*)] = & -imx_*^0 \left[1 + \frac{3\sigma^2}{m^2} - \frac{\sigma^4}{m^4} \left(2m^2 \mathbf{x}_*^2 - \frac{3}{2} \right) \right] - \\ & - \sigma^2 \mathbf{x}_*^2 - \frac{3\sigma^4}{m^2} [(x_*^0)^2 + \mathbf{x}_*^2] + \mathcal{O} \left(\frac{\sigma^6}{m^6} \right). \end{aligned} \quad (4.63)$$

Элементарный анализ подсказывает, что этот асимптотический ряд можно оборвать, оставив лишь лидирующие по σ^2/m^2 поправки, при выполнении следующих (необходимых и достаточных) условий:

$$\sigma^2(x_*^0)^2 \ll m^2/\sigma^2 \quad \text{и} \quad \sigma^2 \mathbf{x}_*^2 \ll m^2/\sigma^2. \quad (4.64)$$

Ясно, что пространственно-временная область, определяемая этими условиями, становится произвольно широкой при $\sigma \rightarrow 0$. При выполнении ур. (4.64) формула ур. (4.63) переходит в простое и физически прозрачное выражение:

$$\psi_G(\mathbf{0}, x_*) = \exp \left(-imx_*^0 - \sigma^2 |\mathbf{x}_*|^2 \right). \quad (4.65)$$

Видно, в частности, что в с.с.о. волнового пакета

- $\psi_G(\mathbf{0}, x_*)$ ведет себя как плоская волна при $\mathbf{x}_*^2 \ll 1/\sigma^2$, т.е. вблизи центра пакета;
- $|\psi_G(\mathbf{0}, x_*)|$ не зависит от временной переменной x_*^0 , т.е., как и требовалось, РГП ур. (4.65) не расплывается;
- $|\psi_G(\mathbf{0}, x_*)|$ падает по гауссовому закону на больших расстояниях от центра пакета, $|\mathbf{x}_*| \gtrsim 1/\sigma$; заметим, что последнее неравенство не противоречит второму из ограничений ур. (4.64).

Используя кинематические соотношения ур. (4.27а) и ур. (4.28), запишем функцию $\psi_G(\mathbf{p}, x)$ в л.с.:

$$\psi_G(\mathbf{p}, x) = \exp \left\{ -iE(x_0 - \mathbf{v}_p \mathbf{x}) - \sigma^2 \Gamma_p^2 [(\mathbf{x} - \mathbf{v}_p x_0)^2 - (\mathbf{v}_p \times \mathbf{x})^2] \right\} \quad (4.66a)$$

$$= \exp \left[-iE(x_0 - \mathbf{v}_p \mathbf{x}) - \sigma^2 \Gamma_p^2 (\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{v}_p x_0)^2 - \sigma^2 \mathbf{x}_{\perp}^2 \right], \quad (4.66б)$$

где \mathbf{x}_{\parallel} и \mathbf{x}_{\perp} – соответственно продольная и поперечная по отношению к вектору скорости \mathbf{v}_p компоненты вектора \mathbf{x} ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}$). Из ур. (4.66б) видно, в частности, что РГП испытывает релятивистское сжатие вдоль направления скорости в конфигурационном пространстве. Это согласуется с вышеотмеченным релятивистским уширением пакета в импульсном пространстве для фоковских составляющих, импульсы которых сонаправлены вектору \mathbf{p} (см. раздел 4.2.1).

Из ур. (4.66а) следует, что функция $|\psi_G(\mathbf{p}, x)|$ инвариантна относительно однопараметрической группы преобразований $x \mapsto x + p\theta/E_p$ с $|\theta| < \infty$ или, в покомпонентной записи, $x_0 \mapsto x_0 + \theta$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{v}_p\theta$. Отсюда находим, в частности, что $|\psi_G(\mathbf{p}, x_0, \mathbf{x})| = |\psi_G(\mathbf{p}, 0, \mathbf{x} - \mathbf{v}_p x_0)|$. Очевидно также, что $|\psi_G(\mathbf{p}, x)| = 1$ и $\arg[\psi_G(\mathbf{p}, x)] = mx_0/\Gamma_p$ вдоль классической мировой линии $\mathbf{x} = \mathbf{v}_p x_0$, но $|\psi_G(\mathbf{p}, x)| < 1$ при любом отклонении от нее. Вероятность квантового отклонения $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{v}_p x_0$ от классического движения подавлена фактором

$$\exp\left\{-2\sigma^2\left[(\delta\mathbf{x})^2 + \Gamma_p^2(\mathbf{v}_p\delta\mathbf{x})^2\right]\right\}.$$

Как видим, поперечные (по отношению к направлению вектора скорости \mathbf{v}_p) отклонения подавлены в меньшей степени, чем продольные, а для ультрарелятивистских пакетов отклонения от классических траекторий могут быть только поперечными, т.е. квантовые движения пакетов происходят внутри классических световых конусов.

Нерелятивистский предел, отвечающий приближению ур. (4.48) для функции $\phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ дается выражением

$$\psi_G(\mathbf{p}, x) \approx \exp\left[-im(x_0 - \mathbf{v}_p\mathbf{x}) - \sigma^2|\mathbf{x} - \mathbf{v}_p x_0|^2\right] \equiv \psi_G^{\text{NR}}(\mathbf{p}, x), \quad |\mathbf{v}_p|^2 \ll 1.$$

“Классическая” фаза нерелятивистской волновой функции ψ_G^{NR} не зависит от скорости ($x_0 - \mathbf{v}_p\mathbf{x} = x_0/\Gamma^2 \approx x_0$ при $\mathbf{x} = \mathbf{v}_p x_0$ и $\mathbf{v}_p^2 \ll 1$).

С помощью соотношения ур. (4.27б), можно переписать неравенства (4.64) и выражение ур. (4.65) в явно релятивистски-инвариантной форме:

$$(px)^2 \ll m^4/\sigma^4 \quad \text{и} \quad (px)^2 - m^2x^2 \ll m^4/\sigma^4, \quad (4.67)$$

$$\psi_G(\mathbf{p}, x) = \exp\left\{-i(px) - \frac{\sigma^2}{m^2}\left[(px)^2 - m^2x^2\right]\right\}. \quad (4.68)$$

В качестве одного из следствий ур. (4.67) получаем условие $\sigma^2|x^2| \ll m^2/\sigma^2$. В дальнейшем мы будем называть рассматриваемое приближение стабильным релятивистским гауссовым пакетом (СРГП). Подействовав на ур. (4.68) оператором Клейна-Гордона получаем:

$$[\partial^2 + m^2(1 - \Delta)]\psi_G(\mathbf{p}, x) = 0, \quad \Delta = 6\frac{\sigma^2}{m^2} - \frac{4\sigma^4}{m^4}\left[(px)^2 - m^2x^2\right].$$

Т.о. функция ψ_G приближенно удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона (т.е. $|\Delta| \ll 1$) при выполнении условий ур. (4.45) и ур. (4.67), задающих область применимости СРГП приближения. Ниже будет показано, что эта область достаточно широка для наших целей.

Отметим, что учет вкладов $\mathcal{O}(\sigma^4/m^4)$ в ур. (4.63) приводит к еще более быстрому убыванию $|\psi_G|$ с расстоянием при $\sigma^2\mathbf{x}_*^2 \gtrsim m^2/\sigma^2$, а так же к убыванию $|\psi_G|$ со временем при $\sigma^2(x_*^0)^2 \gtrsim m^2/\sigma^2$. Одно из технических следствий такого поведения $|\psi_G|$, полезное при расчетах амплитуд,

состоит в том, что СРГП приближение можно безопасно распространить на всю пространственно-временную область интегрирования в интегралах типа

$$\int dx f(x) \prod_{\varkappa} \psi_{\varkappa}(\mathbf{p}_{\varkappa}, x - x_{\varkappa}),$$

в которых функции ψ_{\varkappa} соответствуют релятивистским волновым пакетам, описывающим состояния частиц \varkappa , а $f(x)$ – произвольная гладкая функция x без острых экстремумов. Именно такие интегралы входят в формулы для макроскопических амплитуд процессов рассеяния и распада релятивистских волновых пакетов.

Непосредственный (хотя и довольно громоздкий) расчет среднего положения пакета \bar{x} с использованием ур. (4.68) приводит, как и следовало ожидать, к тому, что волновой пакет следует классической траектории. Таким образом, СРГП полностью воспроизводит общие свойства релятивистского волнового пакета.

Модель СРГП позволяет проверить выполнение условия ур. (4.24), необходимого для применимости приближенной формулы ур. (4.23), являющейся существенным элементом формализма. Как следует из ур. (4.68),

$$i\nabla_{\mathbf{x}} \ln \psi_G(\mathbf{p}, x) = \mathbf{p} - 2i \frac{\sigma^2}{m^2} [(pX)\mathbf{p} - m^2\mathbf{X}].$$

Поэтому условие ур. (4.24) можно записать в виде

$$|(pX)\mathbf{p} - m^2\mathbf{X}| \ll (m^2/\sigma^2) E_{\mathbf{p}}, \quad (4.69)$$

где $X = (X_0, \mathbf{X}) = (y_0 - x_0, \mathbf{y} - \mathbf{x})$. Элементарная алгебра дает

$$\begin{aligned} |(pX)\mathbf{p} - m^2\mathbf{X}|^2 &= (pX)^2 \mathbf{p}^2 - 2m^2(pX)(\mathbf{p}\mathbf{X}) + m^4 \mathbf{X}^2 = \\ &= (pX)^2 E_{\mathbf{p}}^2 + m^2 [(\mathbf{p}\mathbf{X})^2 + m^2 \mathbf{X}^2 - E_{\mathbf{p}}^2 X_0^2] \leq \\ &\leq (pX)^2 E_{\mathbf{p}}^2 + m^2 (\mathbf{p}^2 \mathbf{X}^2 + m^2 \mathbf{X}^2 - E_{\mathbf{p}}^2 X_0^2). \end{aligned}$$

В результате мы доказали, что

$$|(pX)\mathbf{p} - m^2\mathbf{X}| \leq E_{\mathbf{p}} \sqrt{(pX)^2 - m^2 X^2}.$$

Следовательно, неравенство ур. (4.69) не является независимым условием, а удовлетворяется автоматически, благодаря второму из ограничений ур. (4.67), определяющих область применимости приближения СРГП.

Изучим теперь свойства перестановочной функции ур. (4.59) в приближении СРГП. С помощью неравенств ур. (4.61) и условия ур. (4.45) можно написать для нее асимптотическое разложение [ср. с ур. (4.62)]:

$$\begin{aligned} D_G(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x) &= \frac{2m\mathbf{V}_{\star}}{z^{3/2}} \exp \left[\frac{m^2(1-z)}{\sigma^2} \right] \left[1 - \frac{3\sigma^2}{8m^2} \left(1 - \frac{1}{z} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\sigma^4}{128m^4} \left(1 - \frac{1}{z} \right) \left(11 + \frac{5}{z} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{\sigma^6}{m^6} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Для самосогласованности следует переписать эту формулу в приближении, отвечающем условиям СРГП приближения для функции $\psi_G(\mathbf{p}, x)$. Для этого воспользуемся усеченным рядом для z :

$$z = \frac{E_*}{m} \left(1 + \frac{\sigma^4 \mathbf{x}_*^2}{2E_*^2} \right) + i \frac{\sigma^2 x_*^0}{m} \left(1 - \frac{\sigma^4 \mathbf{x}_*^2}{2E_*^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{\sigma^8}{m^8} \right).$$

Подставляя его в ур. (4.70) и разлагая логарифм отношения $\mathcal{D}_G/(2mV_*)$ (записанного в с.ц.и.) по степеням малого параметра σ^2/m^2 , приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned} \ln \left[\frac{\mathcal{D}_G(\mathbf{p}_*, -\mathbf{p}_*; x_*)}{2mV_*} \right] = & -imx_*^0 \left\{ 1 + \frac{3\sigma^2}{2mE_*} \left[1 + \frac{\sigma^2}{4mE_*} \left(1 - \frac{4}{3}m^2\mathbf{x}_*^2 \right) \right] \right\} - \\ & - \frac{3}{2} \ln \Gamma_* - \frac{m^2(\Gamma_* - 1)}{\sigma^2} - \frac{\sigma^2 \mathbf{x}_*^2}{2\Gamma_*} + \frac{3\sigma^2(\Gamma_* - 1)}{8mE_*} - \\ & - \frac{3\sigma^4}{4m^2E_*^2} \left\{ m^2 [(x_*^0)^2 + \mathbf{x}_*^2] - \frac{P_*^2}{4m^2} \right\} + \mathcal{O} \left(\frac{\sigma^6}{m^6} \right), \end{aligned}$$

где $\Gamma_* = E_*/m$. Отсюда видно, что при условиях

$$\sigma^2(x_*^0)^2 \ll E_*^2/\sigma^2 \quad \text{и} \quad \sigma^2 \mathbf{x}_*^2 \ll E_*^2/\sigma^2, \quad (4.71)$$

можно ограничиться лишь четырьмя главными членами разложения по σ^2/m^2 . В таком приближении получаем окончательную формулу

$$\mathcal{D}_G(\mathbf{p}_*, -\mathbf{p}_*; x_*) = \frac{2mV_*}{\Gamma_*^{3/2}} \exp \left[-imx_*^0 - \frac{m^2(\Gamma_* - 1)}{\sigma^2} - \frac{\sigma^2 \mathbf{x}_*^2}{2\Gamma_*} \right], \quad (4.72)$$

в которой следует положить $V_* = [\pi/(2\sigma^2)]^{3/2}$ (см. следующий раздел).

Как и ожидалось, $\mathcal{D}_G(\mathbf{p}_*, -\mathbf{p}_*; x_*)$ быстро убывает, если либо $|\mathbf{p}_*|$, либо $|x_*|$ (или обе эти величины) достаточно велики. Формальные условия для этого, обсуждавшиеся на качественном уровне в разд. 4.1.4 для волновых пакетов общего вида, становятся сейчас очевидными из ур. (4.72). Помимо этого, перестановочная функция ур. (4.72) обладает рядом неочевидных заранее свойств. Видно, например, что зависимость $|\mathcal{D}_G|$ от переменных x_0 и \mathbf{x} исчезает на классических траекториях, а отношение $|\mathcal{D}_G|/(2mV_*)$ экспоненциально мало уже при субрелятивистских энергиях ($\Gamma_* - 1 \sim 1$) и стремится к нулю при ультрарелятивистских энергиях ($\Gamma_* \gg 1$) практически независимо от $|x_*|$. Нетрудно показать, что при любом значении σ

$$\frac{|\mathcal{D}_G(\mathbf{p}_*, -\mathbf{p}_*; x_*)|}{2mV_*} \leq \exp \left[-\sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{\Gamma_*} \right)} m|x_*| \right].$$

Преобразуя ур. (4.72) в л.с. и переходя к нерелятивистским энергиям, получаем

$$\mathcal{D}_G(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x) \approx 2mV_* \exp \left[-im(x_0 - \mathbf{v}\mathbf{x}) - \frac{m^2}{8\sigma^2} |\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_q|^2 - \frac{\sigma^2}{2} |\mathbf{x} - \mathbf{v}x_0|^2 \right]. \quad (4.73)$$

Здесь $\mathbf{v}_p = \mathbf{p}/m$ и $\mathbf{v}_q = \mathbf{q}/m$ – групповые скорости пакетов в л.с., $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_p + \mathbf{v}_q)$, и мы предполагаем, что $\mathbf{v}_p^2 \ll 1$ и $\mathbf{v}_q^2 \ll 1$. Отметим, что вклад $\propto (m^2/\sigma^2) |\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_q|^2$ в ур. (4.73) все еще может быть большим, если, разумеется, $\mathbf{v}_p \neq \mathbf{v}_q$, а параметр σ достаточно мал.

Переход к плосковолновому пределу в ур. (4.72) не совсем тривиален. Чтобы найти этот предел воспользуемся асимптотической формулой ур. (4.50) (см. разд. 4.2.1), с помощью которой можно доказать, что для произвольной гладкой функции $F(\mathbf{p})$ имеет место соотношение

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int \frac{d\mathbf{p}_*}{(2\pi)^3 2E_{p_*}} \mathcal{D}_G(\mathbf{p}_*, -\mathbf{p}_*; x_*) F(\mathbf{p}_*) = \frac{1}{8} e^{-imx_*^0} F(\mathbf{0}).$$

Следовательно,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \mathcal{D}_G(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x) = (2\pi)^3 2E_* \delta(2\mathbf{p}_*) e^{-imx_*^0} = (2\pi)^3 2E_p \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) e^{-ipx}.$$

С помощью кинематических соотношений ур. (4.37а) неравенства ур. (4.71) можно переписать в явно релятивистски-инвариантной (хотя и несколько менее прозрачной) форме:

$$[(p+q)x]^2 \ll [(p+q)^2/\sigma^2]^2, \quad (p+q)^2|x^2| \ll [(p+q)^2/\sigma^2]^2. \quad (4.74)$$

Нетрудно показать, что условия ур. (4.74) полностью согласуются с условиями ур. (4.67), которые ограничивают область применимости СРГП. Аналогичным образом выражение ур. (4.72) также может быть переписано в явно релятивистски-инвариантной форме. Мы не приводим здесь соответствующую формулу, поскольку она довольно громоздка и не очень полезна на практике. Как правило, проще работать в с.ц.и. пары пакетов и переходить в л.с. лишь в окончательных выражениях.

В качестве важного приложения формулы ур. (4.72) рассмотрим n -пакетные матричные элементы ур. (4.40) с одинаковыми импульсами ($\mathbf{p}_i = \mathbf{p}, \forall i$). Общий случай, кратко обсуждавшийся в разд. 4.1.5, хорошо иллюстрируется простейшими примерами с $n = 2$ и 3. Переписав соотношения ур. (4.41) в с.ц.и., которая в данном случае совпадает с системой покоя (одной и той же для всех однопакетных “подсостояний”) и подставив ур. (4.72), найдем:

$$\begin{aligned} {}_2\langle \mathbf{p}, s, x | \mathbf{p}, s, x \rangle_2 &= (2mV_*)^2 [1 \pm \delta_{s_1 s_2} \exp(-\sigma^2 |\mathbf{x}_1^* - \mathbf{x}_2^*|^2)], \\ {}_3\langle \mathbf{p}, s, x | \mathbf{p}, s, x \rangle_3 &= (2mV_*)^3 \left[1 \pm \sum_{i < j} \delta_{s_i s_j} \exp(-\sigma^2 |\mathbf{x}_i^* - \mathbf{x}_j^*|^2) + \right. \\ &\quad \left. + 2\delta_{s_1 s_2} \delta_{s_2 s_3} \delta_{s_3 s_1} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} \sum_{i < j} |\mathbf{x}_i^* - \mathbf{x}_j^*|^2\right) \right], \end{aligned}$$

где знак “+” относится к бозонам, а “-” – к фермионам. Из этих формул видно, что бозе-эйнштейновское притяжение и фермиевское отталкивание, имеющие место при $s_i = s_j$ для любой пары частиц (i, j) , важны лишь на коротких расстояниях между центрами пакетов i и j , удовлетворяющих условию

$$\sigma^2 |\mathbf{x}_i^* - \mathbf{x}_j^*|^2 \lesssim 1. \quad (4.75)$$

Другими словами, оба эффекта становятся существенными, когда пространственное расстояние между тождественными пакетами (измеряемое в их общей системе покоя) становится сравнимо по величине с размерами пакетов, т.е. именно тогда, когда уже необходимо учитывать динамическое взаимодействие пакетов. При достаточно больших расстояниях между пакетами различие квантовых статистик уже не играет роли. Этот вывод остается в силе для состояний с произвольным числом невзаимодействующих тождественных пакетов и чрезвычайно важен для построения квантовой статистики волновых пакетов.

4.2.5 Эффективные размеры и масса пакета

Нетрудно найти явный вид объема V_* , определяемого соотношением ур. (4.16), в РГП приближении:

$$V_* = \frac{\pi^2 \lambda K_1(\lambda)}{2m^3 [K_1(\lambda/2)]^2} = \left(\frac{\pi}{2\sigma^2}\right)^{3/2} \left[1 - \frac{9}{8\lambda} + \frac{249}{128\lambda^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\right], \quad \lambda = \frac{m^2}{\sigma^2}. \quad (4.76)$$

Явная формула для средней массы $\langle m \rangle$ также может быть найдена в виде асимптотического разложения по параметру $1/\lambda$. Для этого удобно воспользоваться леммой Ватсона, которая утверждает, что почленное преобразование Лапласа для степенного разложения функции $f(t)$ является разложением преобразования Лапласа этой функции. В нашем случае

$$\int_0^\infty dt t^{a-1} e^{-\lambda t} f(t) \sim \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(n+a) f^{(n)}(0)}{n! \lambda^{n+a}} \quad (a > 0, \lambda \gg 1).$$

Применяя эту асимптотическую формулу к числителю и знаменателю ур. (4.18) и подставляя разложение для нормировочной константы из ур. (4.43)

$$N_\sigma = \frac{2(\pi\lambda)^{3/2}}{m^2} \left[1 - \frac{3}{4\lambda} + \frac{33}{32\lambda^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\right],$$

найдем отношение средней массы пакета к массе поля:

$$\frac{\bar{m}}{m} = 1 + \frac{3}{2\lambda} - \frac{9}{8\lambda^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right).$$

Итак, средняя (эффективная) масса волнового пакета превышает массу составляющих его фоковских состояний на величину $\delta m \approx 1.5\sigma^2/m$.

Перейдем теперь к СРГП модели:

$$V_* \approx \left(\frac{\pi}{2\sigma^2}\right)^{3/2} \approx \frac{1.969}{\sigma^3}. \quad (4.77)$$

С той же точностью можно определить эффективный размер волнового пакета в с.с.о. как диаметр d_* шара, имеющего объем V_* , т.е.

$$d_* = \left(\frac{6V_*}{\pi}\right)^{1/3} \approx \left(\frac{9\pi}{2}\right)^{1/6} \frac{1}{\sigma} \approx \frac{1.555}{\sigma}. \quad (4.78)$$

Ясно, что в л.с. эффективный размер пакета вдоль направления его импульса \mathbf{p} равен $d_{||} = d_*/\Gamma_p$.

4.2.6 Неопределенности энергии и импульса пакета

Проанализируем связь параметра σ с квантовыми неопределенностями энергии и импульса волнового пакета в СРГП приближении. Воспользовавшись теоремой о среднем и условиями ур. (4.14), можем написать тождество

$$2mV_* = \phi_G(\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}, \mathbf{p}) \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} \phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \phi_G(\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}, \mathbf{p}),$$

где $\delta\mathbf{p}$ – подлежащий определению вектор с малым абсолютным значением, имеющий очевидный физический смысл неопределенности импульса пакета. Разумно предположить, что $|\delta\mathbf{p}| \ll E_p^3$. Это условие позволяет сделать разложение

$$E_{p+\delta p} \approx E_p \left[1 + \frac{\delta\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}{E_p^2} + \frac{|\delta\mathbf{p}|^2}{2E_p^2} - \frac{(\delta\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})^2}{2E_p^4} \right],$$

из которого находим, что

$$E_{p+\delta p} E_p - (\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}) \cdot \mathbf{p} \approx m^2 + \frac{|\delta\mathbf{p}|^2}{2} - \frac{(\delta\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})^2}{2E_p^2} = m^2 + \frac{|\delta\mathbf{p}_{\parallel}|^2}{2\Gamma_p^2} + \frac{|\delta\mathbf{p}_{\perp}|^2}{2},$$

где $\delta\mathbf{p}_{\parallel}$ и $\delta\mathbf{p}_{\perp}$ есть, соответственно, продольная и поперечная (по отношению к вектору импульса \mathbf{p}) компоненты искомого вектора $\delta\mathbf{p}$. Далее, согласно ур. (4.47), имеем

$$V_{\star} \approx \left(\frac{\pi}{\sigma^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{|\delta\mathbf{p}_{\parallel}|^2 + \Gamma_p^2 |\delta\mathbf{p}_{\perp}|^2}{4\sigma^2 \Gamma_p^2} \right) = \left(\frac{\pi}{\sigma^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{|\delta\mathbf{p}_{\star}|^2}{4\sigma^2} \right), \quad (4.79)$$

где $\delta\mathbf{p}_{\star}$ обозначает вектор $\delta\mathbf{p}$, записанный в с.с.о. пакета. Сравнивая соотношения ур. (4.79) и ур. (4.77) (выведенные в одном и том же приближении) найдем:

$$|\delta\mathbf{p}_{\star}|^2 \approx 6 \ln 2 \sigma^2 \approx 4.159 \sigma^2. \quad (4.80)$$

Из ур. (4.78) и ур. (4.80) следует “соотношение неопределенностей”

$$d_{\star} |\delta\mathbf{p}_{\star}| \approx 3 \sqrt{(4\pi/3)^{1/3} \ln 2} \approx 3.171. \quad (4.81)$$

Для иллюстрации этого результата рассмотрим адронный волновой пакет, эффективный размер которого, очевидно, не может быть меньше естественного размера адрона, т.е. $d_{\star} \gtrsim 1$ Фм. Тогда из ур. (4.80) и ур. (4.81) следует, что $|\delta\mathbf{p}_{\star}| \lesssim 600$ МэВ, а значит $\sigma \approx 0.5 |\delta\mathbf{p}_{\star}| \lesssim 300$ МэВ. Т.о., 300 МэВ – это максимально возможное значение параметра σ для адронного пакета. В разд. 4.2.7 мы обсудим вопрос о предельно допустимых значениях σ в СРГП модели.

Благодаря сферической симметрии пакета в с.с.о.

$$|\delta\mathbf{p}_{\perp}|^2 = \frac{2}{3} |\delta\mathbf{p}_{\star}|^2 \approx 4 \ln 2 \sigma^2 \quad \text{и} \quad |\delta\mathbf{p}_{\parallel}|^2 = \frac{1}{3} |\delta\mathbf{p}_{\star}|^2 \Gamma_p^2 \approx 2 \ln 2 \sigma^2 \Gamma_p^2, \quad (4.82a)$$

откуда следует, что

$$|\delta\mathbf{p}| \approx \sqrt{2 \ln 2 (\Gamma_p^2 + 2)} \sigma, \quad |\delta\mathbf{p}_{\parallel}|/|\delta\mathbf{p}_{\perp}| \approx \Gamma_p/\sqrt{2}. \quad (4.82b)$$

Соотношения ур. (4.82) позволяют оценить неопределенность импульса и эффективную (полу)ширину волнового пакета в импульсном пространстве.

Как видим, относительная неопределенность импульса, $|\delta\mathbf{p}|/|\mathbf{p}|$, мала при ультрарелятивистских импульсах, но становится сколь угодно большой при $|\mathbf{p}| \rightarrow 0$:

$$\frac{|\delta\mathbf{p}|}{|\mathbf{p}|} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{2 \ln 2} \sigma/m & \text{при } |\mathbf{p}| \rightarrow \infty, \\ \sqrt{6 \ln 2} \sigma/|\mathbf{p}| & \text{при } |\mathbf{p}| \rightarrow 0. \end{cases}$$

Соответствующая неопределенность энергии имеет вид

$$\delta E_p \approx \delta\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}/E_p \approx |\delta\mathbf{p}_{\parallel}| v_p \approx \sqrt{2 \ln 2} |\mathbf{p}| \sigma/m.$$

Следовательно, относительная неопределенность энергии всегда мала, причем ультрарелятивистская асимптотика, $\delta E_p/E_p \approx |\delta\mathbf{p}|/|\mathbf{p}| \approx \sqrt{2 \ln 2} \sigma/m$, дает верхний предел этого отношения.

³Это предположение подтверждается *a posteriori* соотношением ур. (4.82).

4.2.7 Область применимости СРГП

В зависимости от способа приготовления волнового пакета (т.е. от цепочки порождающих его реакций), его эффективные размеры могут быть как микроскопически малы, так и макроскопически велики. Последняя возможность не должна вызвать удивления, если вспомнить, что “размер” плоской волны бесконечен. Подчеркнем еще раз, что эффективный размер волнового пакета – это не внутреннее свойство поля, а характеристика его квантового состояния, зависящая, конечно, от свойств поля, но не только от них. “Естественный” и, вероятно, недостижимый на практике верхний предел, d_*^{\max} , для эффективного размера пакета, описывающего нестабильную частицу, должен быть порядка ее собственного времени жизни τ (макроскопического для долгоживущих частиц, таких, например, как нейтрон или мюон), а “нижний предел”, d_*^{\min} , задается естественным размером частицы, т.е. величиной порядка 1 Фм для адронов (составных частиц) и величиной порядка комптоновской длины волны ($\sim 1/m$) для лептонов и калибровочных бозонов (бесструктурных частиц). В любом случае, в силу общего ограничения $\sigma^2 \ll m^2$, допустимые формализмом размеры пакетов должны быть много больше d_*^{\min} .

В случае нестабильных частиц, условия применимости СРГП приближения ур. (4.64) накладывают дополнительное жесткое ограничение на предельно допустимое значение параметра σ . Действительно, для того, чтобы эти условия выполнялись при $0 \leq |x_*^0| \lesssim \tau$ (т.е., чтобы волновой пакет не успел расплыться за время жизни частицы), необходимо выполнение неравенства $\sigma^4 \tau^2 \ll m^2$. Поэтому величина $\sigma_{\max} = \sqrt{m/\tau}$ задает абсолютный верхний предел⁴ допустимых в СРГП модели значений параметра σ . Соответственно, величина

$$d_*^{\min} = \left(\frac{9\pi}{2}\right)^{1/6} \frac{1}{\sigma_{\max}} = \left(\frac{9\pi}{2}\right)^{1/6} \left(\frac{\tau}{m}\right)^{1/2}$$

определяет нижний предел для эффективного пространственного размера пакета, описывающего нестабильную частицу в СРГП приближении.

Поскольку, в рамках обсуждаемого формализма, волновые пакеты никак не связаны с естественной распадной шириной частицы $\Gamma = 1/\tau$, он применим лишь для описания состояний с $\sigma \gg \Gamma$ (а точнее, $\sigma^2 \gg \Gamma^2$), т.е. для пакетов с пространственными размерами $d_* \ll d_*^{\max} \sim \tau$. Для согласования этого ограничения с условиями ур. (4.64), время жизни частицы должно быть достаточно большим. Поскольку для всех известных долгоживущих элементарных частиц и атомных ядер $\Gamma \ll m$, то $\sigma_{\max} = \sqrt{m/\tau} = \sqrt{\Gamma m} \gg \Gamma$ и, разумеется, $\sigma_{\max} \ll m$. Поэтому следует ожидать, что СРГП приближение применимо как для стабильных, так и для нестабильных, но долгоживущих частиц (нейтронов, мюонов, τ -лептонов, заряженных пионов, ...) и ядер, но заведомо неприменимо для широких адронных резонансов, калибровочных бозонов и других частиц, для которых условие $\sigma_{\max} \gg \Gamma$ не выполняется. Заметим также, что максимально допустимое в СРГП значение $\delta m = \langle m \rangle - m$ равно $\delta m_{\max} \approx 1.5\sigma_{\max}^2/m = 1.5\Gamma$, так что поправка к полевой массе резонансов может быть значительной, но для долгоживущих частиц в данном приближении ею можно (и нужно) пренебречь.

⁴Разумеется, в физическом, а не в формально математическом смысле.

Для количественной иллюстрации в таблице 5 приведены значения σ_{\max} , Γ/σ_{\max} и d_{\star}^{\min} для ряда нестабильных элементарных частиц. Массы и времена жизни частиц, использованные в расчете, взяты из обзора [158].

Частица	σ_{\max} , эВ	Γ/σ_{\max}	d_{\star}^{\min} , см
μ^{\pm}	1.78×10^{-1}	1.68×10^{-9}	1.72×10^{-4}
τ^{\pm}	2.01×10^3	1.13×10^{-6}	1.53×10^{-8}
π^{\pm}	1.88	1.35×10^{-8}	1.63×10^{-5}
π^0	3.25×10^4	2.41×10^{-4}	0.94×10^{-9}
K^{\pm}	5.12	1.04×10^{-8}	5.99×10^{-6}
K_S^0	6.05×10^1	1.22×10^{-7}	5.07×10^{-7}
K_L^0	2.53	5.08×10^{-9}	1.21×10^{-5}
D^{\pm}	1.09×10^3	5.82×10^{-7}	2.82×10^{-8}
D^0	1.73×10^3	9.28×10^{-7}	1.77×10^{-8}
D_s^{\pm}	1.61×10^3	8.18×10^{-7}	1.91×10^{-8}
B^{\pm}	1.46×10^3	2.76×10^{-7}	2.11×10^{-8}
B^0	1.51×10^3	2.86×10^{-7}	2.03×10^{-8}
B_s^0	1.55×10^3	2.89×10^{-7}	1.98×10^{-8}
n	2.64×10^{-5}	2.81×10^{-14}	1.16
Λ	5.28×10^1	4.74×10^{-7}	5.81×10^{-7}
Λ_c^{\pm}	2.74×10^3	1.87×10^{-6}	1.12×10^{-8}

Таблица 5 — Предельно допустимые в СРГП значения параметра σ ($\sigma_{\max} = \sqrt{m\Gamma}$), отношения $\Gamma/\sigma_{\max} = \sqrt{\Gamma/m}$ и минимальные допустимые эффективные размеры пакетов ($d_{\star}^{\min} \approx 1.55/\sqrt{m\Gamma}$) для некоторых нестабильных частиц.

Выбор частиц в таблице обусловлен тем, что распады π^{\pm} , K^{\pm} , K_L^0 и μ^{\pm} являются основными источниками атмосферных и ускорительных нейтрино и антинейтрино с энергиями $E_{\nu} \lesssim 1$ ТэВ; распады короткоживущих K_S^0 -, D -, D_s -, B - и B_s -мезонов, а так же Λ - и Λ_c -гиперонов становятся доминирующими источниками (анти)нейтрино при $E_{\nu} \gg 1$ ТэВ (см., например, [159]); τ -лептоны, возникающие (как редкие события) во взаимодействиях (анти)нейтринных пучков с веществом, важны для осцилляционных экспериментов в качестве “индикаторов” флэйворных переходов $\nu_{\mu} \rightarrow \nu_{\tau}$. Нейтральный пион и нейтрон приведены для демонстрации двух крайних случаев – очень большого и очень маленького значений σ_{\max} , соответственно. Кроме того, распады свободных нейтронов играют важную роль в качестве источника астрофизических электронных антинейтрино низких энергий [160].

В таблице не представлены многочисленные β^{\pm} -активные радионуклиды, распады которых являются источниками ν_e и $\bar{\nu}_e$ в реакторных экспериментах и в будущих экспериментах с β -пучками [161—163], а также тяжелые ионы, способные излучать ν_e при захвате орбитальных электронов с низколежащих электронных оболочек и представляющие потенциальный интерес в качестве источников монохроматических нейтринных пучков [164]. Для всех таких ядер и ионов

величина d_*^{\min} по порядку величины определяется размером ядра или диаметром K -орбиты, а период полураспада $T_{1/2}$ велик. Поэтому $\Gamma/\sigma_{\max} \sim d_*^{\min}/T_{1/2} \lll 1$, т.е. ограничения СРГП приближения выполняются “с большим запасом”.

Как видно из таблицы, отношения Γ/σ_{\max} не превышают $\approx 2 \times 10^{-6}$ для всех перечисленных частиц, за исключением π^0 -мезона, что допускает достаточно широкий “спектр” значений параметра σ , удовлетворяющих условиям применимости СРГП

$$\Gamma^2 \ll \sigma^2 \ll \sigma_{\max}^2 \ll m^2.$$

Следует отметить, что адронные резонансы и другие короткоживущие частицы также представляют большой интерес в контексте проблемы нейтринных осцилляций, поскольку нейтрино и антинейтрино могут рождаться в распадах таких частиц и – что, пожалуй, более важно – порождать короткоживущие частицы при взаимодействиях с веществом. Неприменимость приближения СРГП для короткоживущих частиц отнюдь не означает, что процессы с их участием невозможно учесть в рамках S -матричного формализма, поскольку резонансы всегда можно рассматривать как виртуальные частицы, т.е. внутренние линии фейнмановских диаграмм. При таком подходе отпадает необходимость построения волновых пакетов для резонансов. Тот же подход применим, в принципе, и для процессов с участием нейтральных пионов, для которых отношение Γ/σ_{\max} сравнительно велико, поскольку в нейтринных экспериментах события рождения π^0 -мезонов идентифицируются по γ -квантам, возникающим в их распадах.

Тем не менее, обобщение формализма на случай частиц с произвольными распадными ширинами представляет методический интерес уже потому, что более общий подход позволил бы уточнить область применимости излагаемой здесь теории и предоставил бы полезный инструмент, позволяющий существенно упростить расчеты конкретных процессов, используя известные феноменологические модели для резонансного нейтринорождения мезонов.

4.3 Рассеяние волновых пакетов

Применим развитый формализм для вычисления вероятности взаимодействия ковариантных волновых пакетов. Хотя в ряде случаев мы приходим к результатам, аналогичным обсуждаемым в книге Пескина и Шредера [165], мы получаем также некоторые новые интересные результаты. Например, вычислен явный вид подавления вероятности взаимодействия волновых пакетов (в СРГП модели), рассеивающихся с ненулевым прицельным параметром. Этот результат важен как с концептуальной, так и с практической точек зрения.

Действительно, для некоторых процессов, например $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$, сечение вычисленное в плосковолновом приближении противоречит экспериментальным данным. Впервые этот эффект был обнаружен на коллайдере ВЭПП-4 в Новосибирске в данных детектора МД-1 [166]. Измеренное сечение оказалось меньше вычисленного примерно на 30% в области малых энергий фотона. В кандидатской диссертации Ю. А. Тихонова [167] было показано, что заметный вклад в сечение процесса $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$, вычисленного в плосковолновом приближении дают прицельные

параметры ρ вплоть до 5 см, в то время как поперечные размеры сталкивающихся пучков не превышали $a \simeq 10^{-3}$ см. Ограничение прицельных параметров величиной $\rho \leq a$ приводит к уменьшению наблюдаемого числа фотонов. Соответствующая теория, учитывающая конечные размеры сталкивающихся пучков, была развита в работе [168].

Наше вычисление приводит к результатам, аналогичным полученным в пионерской работе [168]. Однако, развитый нами формализм отличается от формализма [168]. Обсудим кратко эти отличия. В работе [168] используются нековариантные волновые пакеты, что видно из определения волнового пакета (ур. 4.1) и условия нормировки (ур. 4.2). Статистическое усреднение по состояниям частиц (ур. 4.7) осуществляется для перехода к матрице плотности в импульсном представлении, которая есть Фурье образ функции Вигнера $n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ (хорошее педагогическое введение в теорию функций Вигнера и преобразований Вейля можно прочитать в работе [169]). Интегралы от функции Вигнера $\int d\mathbf{r} n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = n(\mathbf{p}, t)$ и $\int d\mathbf{p} / (2\pi)^3 n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = n(\mathbf{r}, t)$ дают плотности числа частиц в импульсном и координатном представлениях, соответственно. В итоговой формуле для числа взаимодействий (например, в ур. 4.23) относительная скорость двух частиц вводится “руками”. Наконец, используется упрощение – частицы в конечном состоянии рассматриваются как плоские волны.

В нашем подходе, мы имеем дело с ковариантными волновыми пакетами в начальном и конечном состояниях. Мы не используем формализм функций Вигнера, делая вычисления для столкновения волновых пакетов, заданных произвольными средними 4-координатами x_a, x_b и 4-импульсами p_a, p_b . Более простой подход, используемый в нашей работе, оказывается возможным в результате приближения слабой зависимости матричного элемента при изменении импульса в интервале порядка импульсной дисперсии волновых пакетов. Такое приближение, впрочем, не всегда оправдано. Например, для некоторых задач, таких как pp рассеяние, большой интерес вызывает не только модуль матричного элемента, но и фаза последнего. В этом случае не следует пренебрегать вариацией матричного элемента на масштабах вариации импульса в волновом пакете. Учитывая такую вариацию как поправку на уровне σ/p , можно вычислить поправку к плосковолновому сечению в зависимости от фазы матричного элемента, что представляет собой интересный и новый метод измерения этой фазы при помощи вариации прицельного параметра, с которым сталкиваются частицы [170]. Другим важнейшим исключением является случай сильной зависимости матричного элемента от импульсов. Такая сильная зависимость ожидается в случае существования промежуточного состояния, связывающего наборы начальных и конечных частиц, с 4-импульсом на массовой поверхности. Тогда, в силу сингулярного пропагатора промежуточного состояния, очевидна сильная зависимость матричного элемента от комбинации импульсов, соответствующей 4-импульсу промежуточного состояния. Именно этот случай отвечает виртуальному нейтрину в квантово-полевой теории нейтринных осцилляций, обсуждаемой в следующей главе.

Таким образом, ограничиваясь случаем слабой вариации матричного элемента на масштабах вариации импульса в волновом пакете, мы вычисляем вероятность взаимодействия двух волновых пакетов. Полученная формула позволяет обнаружить подавление вероятности взаимодействий при ненулевом прицельном параметре сталкивающихся волновых пакетов. Также мы демонстрируем явным образом как безразмерная вероятность взаимодействия выражается через

произведение плоскороволнового сечения размерности площади и микроскопической светимости размерности обратной площади. Макроскопическое усреднение по прицельному параметру приводит нас к хорошо известному выражению для числа событий, выражаемое через произведение плоскороволнового сечения и потока.

4.3.1 Амплитуда рассеяния

Рассмотрим взаимодействие двух сталкивающихся частиц a и b . Конечное состояние X , а также динамика процесса могут быть любыми. Для определенности, каждое начальное и конечное состояние будем считать волновым пакетом фермиона. Квантовая статистика частицы в данном случае не играет никакой роли. Запишем амплитуду процесса $\mathcal{A} = \langle \{\mathbf{p}_f, x_f\} | \mathbb{S} - 1 | \{\mathbf{p}_i, x_i\} \rangle$, где фигурная скобка обозначает набор волновых пакетов со средними импульсами \mathbf{p}_i , средними координатами x_i в моменты времени x_i^0 для начального состояния (индекс i), и аналогично, для конечного состояния с заменой $i \rightarrow f$. Амплитуда процесса в общем виде равна:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\mathcal{N}} \left(\prod_{i,f} \int \frac{d\mathbf{q}_i}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{q}_i}} \phi(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i) e^{+iq_i x_i} \frac{d\mathbf{k}_f}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_f}} \phi^*(\mathbf{k}_f, \mathbf{p}_f) e^{-ik_f x_f} \right) i\widetilde{\mathcal{M}}(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{k}_f, r_i, s_f\}), \quad (4.83)$$

где

$$\begin{aligned} i\widetilde{\mathcal{M}}(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{k}_f, r_i, s_f\}) &= \langle \mathbf{k}_1, s_1, \dots, \mathbf{k}_{n_f}, s_{n_f} | \mathbb{S} - 1 | \mathbf{q}_1, r_1, \dots, \mathbf{q}_{n_f}, r_{n_f} \rangle \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(\sum_i q_i - \sum_f k_f) i\mathcal{M}(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{k}_f, r_i, s_f\}) \end{aligned} \quad (4.84)$$

стандартный плоскороволновой S -матричный элемент, включающий в себя сингулярный множитель $(2\pi)^4 \delta^4(\sum_i q_i - \sum_f k_f)$, отвечающий за закон сохранения энергии-импульса, и регулярный матричный элемент $i\mathcal{M}(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{k}_f, r_i, s_f\})$.

\mathcal{N} – множитель, отвечающий нормировке начальных и конечных состояний, дается

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^2 &= \langle \{\mathbf{p}_f, x_f\} | \{\mathbf{p}_f, x_f\} \rangle \cdot \langle \{\mathbf{p}_i, x_i\} | \{\mathbf{p}_i, x_i\} \rangle \\ &= \prod_i 2m_i V_{*,i} \prod_i 2m_f V_{*,f} \simeq \prod_i 2\bar{E}_{\mathbf{p}_i} V(\mathbf{p}_i) \prod_i 2\bar{E}_{\mathbf{p}_f} V(\mathbf{p}_f). \end{aligned} \quad (4.85)$$

Перепишем дельта-функцию в виде интеграла по четырехмерному пространству:

$$(2\pi)^4 \delta^4(\sum_i q_i - \sum_f k_f) = \int d^4 x e^{-i(\sum_i q_i - \sum_f k_f) x},$$

что позволяет записать ур. (4.83) в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{\mathcal{N}} \int d^4 x \left(\prod_{i,f} \int \frac{d\mathbf{q}_i \phi(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i) e^{+iq_i(x_i-x)}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{q}_i}} \frac{d\mathbf{k}_f \phi^*(\mathbf{k}_f, \mathbf{p}_f) e^{-ik_f(x_f-x)}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_f}} \right) i\mathcal{M}(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{k}_f, r_i, s_f\}) \\ &\simeq \frac{1}{\mathcal{N}} \left(\int d^4 x \prod_{i,f} \psi(\mathbf{p}_i, x - x_i) \psi^*(\mathbf{p}_f, x - x_f) \right) i\mathcal{M}(\{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f, r_i, s_f\}) \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}} \mathbb{V}(0) i\mathcal{M}(\{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f, r_i, s_f\}), \end{aligned} \quad (4.86)$$

где приближенное равенство справедливо для узких волновых пакетов в импульсном пространстве, и если можно пренебречь изменением матричного элемента $i\mathcal{M}(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{k}_f, r_i, s_f\})$ на масштабах изменения форм-фактора $\phi(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i)$. В этом приближении интегралы по импульсам превращаются в функции ψ , определенные согласно ур. (4.25). В последней строчке мы ввели интеграл перекрытия $\mathbb{V}(0) = \int d^4x \prod_{i,f} \psi(\mathbf{p}_i, x - x_i) \psi^*(\mathbf{p}_f, x - x_f)$. В теории нейтринных осцилляций с волновым пакетом возникает более общий интеграл $\mathbb{V}(q) = \int d^4x \prod_{i,f} e^{iqx} \psi(\mathbf{p}_i, x - x_i) \psi^*(\mathbf{p}_f, x - x_f)$, зависящий от внешнего импульса q , поэтому мы используем такое же обозначение при $q = 0$. В этом разделе мы вычислим этот интеграл для СРГП модели. В следующем разделе мы доказываем важное соотношение, справедливое для СРГП модели:

$$|\mathbb{V}(0)|^2 = (2\pi)^4 \delta_G(P_i - P_f) \mathbb{V}, \quad (4.87)$$

где $P_i = \sum_i p_i$, $P_f = \sum_f p_f$ и $\delta_G(K)$ – это функция Гаусса с плосковолновым пределом равным четырехмерной дельта функции Дирака. Явный вид этой функции мы уточним в следующем разделе. Здесь мы будем использовать ее плосковолновой предел. Четырехмерный объем перекрытия \mathbb{V} можно представить:

$$\mathbb{V} = \int d^4x \prod_{i,f} |\psi(\mathbf{p}_i, x - x_i)|^2 |\psi(\mathbf{p}_f, x - x_f)|^2.$$

4.3.2 Число взаимодействий для неколлинеарных столкновений волновых пакетов

Используя ур. (4.87), запишем квадрат модуля амплитуды в ур. (4.86):

$$|\mathcal{A}|^2 = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f) |\mathcal{M}|^2}{\prod_i 2\bar{E}_{\mathbf{p}_i} \mathbb{V}(\mathbf{p}_i) \prod_f 2\bar{E}_{\mathbf{p}_f} \mathbb{V}(\mathbf{p}_f)} \int d^4x \prod_{i,f} |\psi(\mathbf{p}_i, x - x_i)|^2 |\psi(\mathbf{p}_f, x - x_f)|^2. \quad (4.88)$$

Микроскопическая вероятность взаимодействия $a + b \rightarrow X$, даваемая $|\mathcal{A}|^2$ в ур. (4.88), пропорциональна интегралу по четырехмерному пространству-времени от произведения плотностей вероятностей начальных $|\psi(\mathbf{p}_i, x - x_i)|^2 / \mathbb{V}(\mathbf{p}_i)$ и конечных $|\psi(\mathbf{p}_f, x - x_f)|^2 / \mathbb{V}(\mathbf{p}_f)$ волновых пакетов пересечься в точке x .

Умножим ур. (4.88) на лоренц-инвариантную плотность числа конечных состояний $\prod_f \frac{d\mathbf{p}_f d\mathbf{x}_f}{(2\pi)^3}$ и проинтегрируем по пространственным координатам пакетов, что отвечает постановке многих современных экспериментов, измеряющих импульсы частиц лучше их координат. Воспользовавшись тем, что $\int d\mathbf{x}_f |\psi(\mathbf{p}_f, \mathbf{x}_f)|^2 = \mathbb{V}(\mathbf{p}_f)$ в соответствии с ур. (4.29), получаем число взаимодействий

$$\begin{aligned} dN &= \left(\prod_f \frac{d\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x}_f \right) |\mathcal{A}|^2 \\ &= \frac{(2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f) |\mathcal{M}|^2}{2\bar{E}_{\mathbf{p}_a} 2\bar{E}_{\mathbf{p}_b}} \prod_f \frac{d\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2\bar{E}_{\mathbf{p}_f}} \int d^4x \frac{|\psi(\mathbf{p}_a, x - x_a)|^2}{\mathbb{V}(\mathbf{p}_a)} \frac{|\psi(\mathbf{p}_b, x - x_b)|^2}{\mathbb{V}(\mathbf{p}_b)}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Вычисление последнего множителя в ур. (4.89), представляющего собой четырехмерный интеграл перекрытия двух рассеивающихся волновых пакетов a и b , дает

$$\int d^4x \frac{|\psi(\mathbf{p}_a, x - x_a)|^2 |\psi(\mathbf{p}_b, x - x_b)|^2}{V(\mathbf{p}_a) V(\mathbf{p}_b)} = \frac{e^{-(\mathbf{b} \times \mathbf{n})^2 / 2\sigma_{x,ab}^2}}{2\pi\sigma_{x,ab}^2 v_{ab}} = \frac{L(|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|)}{v_{ab}}, \quad (4.90)$$

где $\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b$ – скорости частиц a и b , $v_{ab} = \sqrt{(\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b)^2 - (\mathbf{v}_a \times \mathbf{v}_b)^2}$, $\mathbf{b} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$, $\mathbf{n} = \mathbf{v}_{ab}/|\mathbf{v}_{ab}|$ – единичный вектор вдоль относительной скорости (явные формулы для относительных скоростей приведены в разделе 4.3.3), и

$$\sigma_{x,ab}^2 = \sigma_{x,a}^2 + \sigma_{x,b}^2, \quad \text{где } \sigma_{x,i}^2 = \frac{1}{2\sigma_i^2}, \quad i = a, b.$$

В итоге, ур. (4.89) можно представить в виде

$$dN = d\sigma L(|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|) = d\sigma L(0) e^{-(\mathbf{b} \times \mathbf{n})^2 / 2\sigma_{x,ab}^2}. \quad (4.91)$$

В ур. (4.91), $d\sigma$ – сечение взаимодействия в плосковолновом приближении:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f) |\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}} \prod_b \frac{d\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f},$$

где мы использовали $\bar{E}_{p_a} \bar{E}_{p_b} \sqrt{(\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b)^2 - (\mathbf{v}_a \times \mathbf{v}_b)^2} = \sqrt{(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}$.

Физический смысл множителя $L(|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|)$ в ур. (4.91) – *светимость* рассеяния двух волновых пакетов в определении, используемом в теории рассеяния и ускорительной физике. $L(|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|)$ определен согласно ур. (4.90) с $L(0) = 1/2\pi\sigma_{x,ab}^2$.

Число взаимодействий двух волновых пакетов a и b дается ур. (4.91). В случае неколлинеарного рассеяния, число таких столкновений подавлено множителем $e^{-(\mathbf{b} \times \mathbf{n})^2 / 2\sigma_{x,ab}^2}$, где величину $|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|$ следует интерпретировать как прицельный параметр рассеивающихся волновых пакетов.

В экспериментах с рассеянием пучков частиц a и b , распределение прицельного параметра $|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|$ задается способом приготовления пучков. В случае гауссова распределения число пар частиц a и b с прицельным параметром $|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|$ есть

$$n_{ab}(|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|) = \frac{n_a n_b}{2\pi \Sigma_{x,ab}} e^{-\frac{|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|^2}{2\Sigma_{x,ab}^2}}, \quad (4.92)$$

где $\Sigma_{x,ab}$ – дисперсия прицельного параметра $|\mathbf{b}_T| = |\mathbf{b} \times \mathbf{n}|$ пучков частиц a и b в предположении фиксированного направления их относительной скорости \mathbf{n} . n_a, n_b – числа частиц a и b .

Усреднение по прицельному параметру приводит к следующему выражению для числа взаимодействий частиц a и b

$$dN = d\sigma \int d\mathbf{b}_T n_{ab}(|\mathbf{b}_T|) L(|\mathbf{b}_T|) = d\sigma L, \quad (4.93)$$

где светимость L определяется эффективными пространственными дисперсиями волновых пакетов и пучков частиц a и b

$$L = \frac{1}{2\pi(\sigma_{x,ab}^2 + \Sigma_{x,ab}^2)}. \quad (4.94)$$

Для реалистичных конфигураций эксперимента $\sigma_{x,ab}^2 \ll \Sigma_{x,ab}^2$. В этом приближении светимость L , даваемая ур. (4.94), определяется пространственной дисперсией пучков частиц a и b :

$$L \simeq \frac{1}{2\pi \Sigma_{x,ab}^2}$$

в согласии с плосковолновым приближением.

4.3.3 Релятивистская инвариантность квадрата прицельного параметра

Четырехмерный объем перекрытия

$$V = \int d^4x |\psi(\mathbf{p}_a, x - x_a)|^2 |\psi(\mathbf{p}_b, x - x_b)|^2$$

лоренц инвариантен в силу релятивистской инвариантности функции $\psi(x)$. Лоренц инвариантное число событий в ур. (4.91) требует лоренц-инвариантности модуля вектора $\mathbf{b} \times \mathbf{n}$. Покажем явным вычислением, что несмотря на то, что \mathbf{b} , \mathbf{n} и $\mathbf{b} \times \mathbf{n}$ не инвариантны, модуль $|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|$ является лоренц-инвариантом.

Обозначим вектор $\mathbf{b} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$ в системах покоя частиц a и b символами $\mathbf{b}^{(a)}$ и $\mathbf{b}^{(b)}$. Их явный вид:

$$\mathbf{b}^{(a)} = \mathbf{b} + \frac{\Gamma_a^2}{\Gamma_a + 1} (\mathbf{b}\mathbf{v}_a) \mathbf{v}_a \quad \text{и} \quad \mathbf{b}^{(b)} = \mathbf{b} + \frac{\Gamma_b^2}{\Gamma_b + 1} (\mathbf{b}\mathbf{v}_b) \mathbf{v}_b,$$

где $\Gamma_i = (1 - \mathbf{v}_i^2)^{-1/2}$, $i = (a, b)$.

В тех же обозначениях относительные скорости имеют следующий вид

$$\mathbf{v}_{ab} = \mathbf{v}_b^{(a)} = \frac{\mathbf{p}_b^{(a)}}{E_b^{(a)}} = \frac{1}{1 - \mathbf{v}_a \mathbf{v}_b} \left[\frac{1}{\Gamma_a} \mathbf{v}_b - \frac{\Gamma_a (1 - \mathbf{v}_a \mathbf{v}_b) + 1}{\Gamma_a + 1} \mathbf{v}_a \right],$$

$$\mathbf{v}_{ba} = \mathbf{v}_a^{(b)} = \frac{\mathbf{p}_a^{(b)}}{E_a^{(b)}} = \frac{1}{1 - \mathbf{v}_a \mathbf{v}_b} \left[\frac{1}{\Gamma_b} \mathbf{v}_a - \frac{\Gamma_b (1 - \mathbf{v}_a \mathbf{v}_b) + 1}{\Gamma_b + 1} \mathbf{v}_b \right].$$

Таким образом,

$$\mathbf{b}^{(a)} \times \mathbf{v}_{ab} = \frac{1}{1 - \mathbf{v}_a \mathbf{v}_b} \left[\frac{1}{\Gamma_a} (\mathbf{b} \times \mathbf{v}_b) - \frac{\Gamma_a (1 - \mathbf{v}_a \mathbf{v}_b) + 1}{\Gamma_a + 1} (\mathbf{b} \times \mathbf{v}_a) + \frac{\Gamma_a}{\Gamma_a + 1} (\mathbf{b}\mathbf{v}_a) (\mathbf{v}_a \times \mathbf{v}_b) \right],$$

$$\mathbf{b}^{(b)} \times \mathbf{v}_{ba} = \frac{1}{1 - \mathbf{v}_a \mathbf{v}_b} \left[\frac{1}{\Gamma_b} (\mathbf{b} \times \mathbf{v}_a) - \frac{\Gamma_b (1 - \mathbf{v}_a \mathbf{v}_b) + 1}{\Gamma_b + 1} (\mathbf{b} \times \mathbf{v}_b) + \frac{\Gamma_b}{\Gamma_b + 1} (\mathbf{b}\mathbf{v}_b) (\mathbf{v}_b \times \mathbf{v}_a) \right].$$

Полезная формула

$$\mathbf{v}_{ab} \times \mathbf{v}_{ba} = \frac{(\mathbf{v}_a \times \mathbf{v}_b)}{(1 - \mathbf{v}_a \mathbf{v}_b)^2} \left[1 - \frac{1}{\Gamma_a \Gamma_b} - \left(\frac{\Gamma_a}{\Gamma_a + 1} + \frac{\Gamma_b}{\Gamma_b + 1} \right) (\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b) + \frac{\Gamma_a \Gamma_b (\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b)^2}{(\Gamma_a + 1)(\Gamma_b + 1)} \right]$$

демонстрирует, что $\mathbf{v}_{ab} \neq \mathbf{v}_{ba}$, хотя $|\mathbf{v}_{ab}| = |\mathbf{v}_{ba}|$. Также эта формула показывает, что угол между относительными скоростями в системах покоя частиц отличается от нуля, что является чисто релятивистским эффектом. В нерелятивистском приближении относительные скорости \mathbf{v}_{ab} и \mathbf{v}_{ba} коллинеарны.

Докажем, что $|\mathbf{b}^{(a)} \times \mathbf{n}_{ab}|^2 c \mathbf{n}_{ab} = \mathbf{v}_{ab}/|\mathbf{v}_{ab}|$ – релятивистский инвариант. Для этого, заметим, что

$$|\mathbf{b}^{(a)} \times \mathbf{v}_{ab}|^2 = |\mathbf{b}^{(a)}|^2 |\mathbf{v}_{ab}|^2 - (\mathbf{b}^{(a)} \mathbf{v}_{ab})^2.$$

Вычислим сначала $|\mathbf{b}^{(a)}|^2$:

$$|\mathbf{b}^{(a)}|^2 = (bu_a)^2 - b^2,$$

где $u_i = \Gamma_i(1, \mathbf{v}_i)$ и $b = (0, \mathbf{b})$ в лабораторной системе отсчета с квадратом $b^2 = -\mathbf{b}^2$. В системе покоя частицы a , 4-вектор прицельного параметра $b = (b_0^{(a)}, \mathbf{b}^{(a)})$ с компонентами

$$b_0^{(a)} = (bu_a), \quad \mathbf{b}^{(a)} = \mathbf{b} - \frac{\Gamma_a(bu_a)\mathbf{v}_a}{\Gamma_a + 1},$$

где мы учли соотношение $\Gamma_a(\mathbf{b}\mathbf{v}_a) = -(bu_a)$. Затем, вычислим

$$(\mathbf{b}^{(a)}\mathbf{v}_{ab}) = \frac{(bu_a)(u_a u_b) - (bu_b)}{(u_a u_b)}, \quad \text{и} \quad |\mathbf{v}_{ab}|^2 = \frac{(u_a u_b)^2 - 1}{(u_a u_b)^2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}^{(a)} \times \mathbf{n}_{ab}|^2 &= (bu_a)^2 + \frac{[(bu_a)(u_a u_b) - (bu_b)]^2}{1 - (u_a u_b)^2} - b^2 \\ &= \frac{[b(u_a - u_b)]^2}{1 - (u_a u_b)^2} + \frac{(bu_a)(bu_b)}{(u_a u_b) + 1} - b^2 \\ &= |\mathbf{b}^{(b)} \times \mathbf{n}_{ba}|^2. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Поскольку ур. (4.95) записано в инвариантном виде, мы можем вычислить $|\mathbf{b}^{(a)} \times \mathbf{n}_{ab}|^2$ в системе покоя любой из частиц a и b . Например, вычислив в системе покоя частицы a , получаем:

$$|\mathbf{b}^{(a)} \times \mathbf{n}_{ab}|^2 = \mathbf{b}^2 - \frac{\Gamma_b^2(\mathbf{b}\mathbf{v}_b)^2}{\Gamma_b^2 - 1},$$

где мы узнаем квадрат вектора поперечного вектору \mathbf{v}_b :

$$\mathbf{b}_T^2 = \mathbf{b}^2 - \mathbf{b}_L^2 = \mathbf{b}^2 - \left(\frac{(\mathbf{b}\mathbf{v}_b)\mathbf{v}_b}{v_b^2} \right)^2 = \mathbf{b}^2 - \frac{\Gamma_b^2(\mathbf{b}\mathbf{v}_b)^2}{\Gamma_b^2 - 1}.$$

Таким образом, мы доказали релятивистскую инвариантность выражения $|\mathbf{b}^{(a)} \times \mathbf{n}_{ab}| = |\mathbf{b}^{(b)} \times \mathbf{n}_{ba}|$.

4.4 Заключение к главе

Глава начинается с развития теории релятивистского волнового пакета. Вводятся необходимые определения и устанавливаются трансформационные свойства состояния волнового пакета как когерентной суперпозиции фоковских состояний $|\mathbf{k}, s\rangle$, где \mathbf{k} – 3-импульс, s – проекция спина. Вес фоковских состояний определяется форм-фактором $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$, где \mathbf{p} – средний трехмерный импульс волнового пакета. Устанавливаются общие свойства симметрии волнового пакета. Определяются его основные характеристики такие как средний 4-импульс, и средняя 3-координата. Также как в квантовомеханическом случае, мы находим, что в среднем релятивистский волновой пакет следует классической траектории.

Мы формулируем *принцип соответствия*, при использовании которого в плосковолновом пределе $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \rightarrow (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p})$, что с точностью до постоянного множителя превращает состояние волнового пакета в фоковское состояние с определенным импульсом. Таким образом, развитую теорию удобно сравнивать с плосковолновым приближением на каждом шаге вычислений. Принцип соответствия задает нам нормировку состояния волнового пакета. В соответствии со стандартными правилами мы находим релятивистски инвариантную функцию, описывающую волновой пакет в координатном пространстве. Эта функция $\psi(\mathbf{p}, x)$ безразмерна, поэтому она не является нормированной волновой функцией в координатном пространстве. Это позволяет определить трехмерный объем $V(\mathbf{p})$, занимаемый волновым пакетом, преобразующийся в соответствии с релятивистскими формулами. Нормированная волновая функция в координатном пространстве, очевидно, $\psi(\mathbf{p}, x) / \sqrt{V(\mathbf{p})}$. Наконец, учитываются спиновые степени свободы волнового пакета, и формулируется состояние релятивистского волнового пакета фермиона, с которым мы работаем далее.

Если фоковские состояния с разными импульсами и проекциями спина ортогональны друг другу $\langle \mathbf{q}, s | \mathbf{p}, r \rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta_{rs}$, то состояния волновых пакетов перекрываются как в импульсном, так и в координатном пространствах: $\langle \mathbf{q}, r, y | \mathbf{p}, s, x \rangle = \delta_{sr} \mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x - y)$, где $\mathcal{D}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; x - y)$ – введенная нами перестановочная лоренц-инвариантная функция. Эта функция быстро убывает для $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ или $x \neq y$, однако она, в общем, отлична от нуля. При помощи перестановочной функции мы изучили норму многопакетного состояния. Была найдена общая формула нормы состояния как для бозонов, так и для фермионов. В режиме, когда волновые пакеты сильно пересекаются в импульсном и координатном пространствах, мы получаем хорошо известный плосковолновой результат, который есть проявление эффектов бозевского притяжения и принципа Паули для тождественных бозонов и фермионов, соответственно. Гораздо менее тривиальным результатом оказалось то, что формализм волновых пакетов подтверждает интуитивные ожидания того, что свободные тождественные бозоны (фермионы) с одинаковыми импульсами и одинаковыми проекциями спинов не конденсируются (могут прекрасно сосуществовать), если они разделены достаточно большими пространственно-временными интервалами. Этот физически прозрачный результат невозможно понять в рамках плосковолнового формализма КТП.

Далее строится простая модель релятивистского гауссова пакета (РГП). Задается релятивистски инвариантная функция в гауссовой форме

$$\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \equiv \phi_G(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \frac{2\pi^2}{\sigma^2 K_1(m^2/2\sigma^2)} \exp\left(-\frac{E_k E_p - \mathbf{k}\mathbf{p}}{2\sigma^2}\right),$$

где $K_1(z)$ обозначает модифицированную функцию Бесселя 3-го рода порядка 1. Нерелятивистский предел этой функции сводится к хорошо известному гауссовому волновому пакету, используемому во многих других работах по теории осцилляций нейтрино. Таким образом, мы заключаем, что традиционно используемая функция Гаусса соответствует нерелятивистскому приближению. Задав $\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$, мы вычисляем соответствующую координатную функцию $\psi(\mathbf{p}, x)$. Волновой пакет в координатном представлении расплывается в пространстве в соответствии с общей теорией. Вычисляется перестановочная функция.

Следующим важным шагом является приближение нерасплывающегося волнового пакета – стабильного релятивистского гауссова пакета (СРГП). Найдены точные условия применимости

этого приближения. В рамках этого приближения проанализированы полученные ранее в этой главе формулы. В частности, особенно прозрачным стали результаты для нормы многопакетного состояния и условия непересечения волновых пакетов, при которых перестает “работать” статистика Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака. Оценены эффективные размеры, масса, неопределенности энергии и импульса пакета. Получены точные условия для границ применимости СРГП.

Затем, построенная теория применяется для описания рассеяния релятивистских волновых пакетов. Вычисляется амплитуда произвольного процесса $a + b \rightarrow X$ в S -матричном формализме КТП с волновыми пакетами. Найдена общая формула для *вероятности* такого процесса:

$$dN = d\sigma L(|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|) = d\sigma L(0) e^{-(\mathbf{b} \times \mathbf{n})^2 / 2\sigma_{x,ab}^2},$$

где $d\sigma$ – стандартное плосковолновое сечение, $L(0) = 1/2\pi\sigma_{x,ab}^2$ – *светимость* рассеяния двух волновых пакетов в определении, используемом в теории рассеяния и ускорительной физике. Множитель $e^{-(\mathbf{b} \times \mathbf{n})^2 / 2\sigma_{x,ab}^2}$ отвечает геометрическому подавлению вероятности взаимодействия двух волновых пакетов, рассеивающихся с ненулевым прицельным параметром $|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|$, где \mathbf{b} – прицельный вектор, $\mathbf{n} = \mathbf{v}_{ab}/|\mathbf{v}_{ab}|$ – единичный вектор вдоль относительной скорости \mathbf{v}_{ab} . $\sigma_{x,ab}^2 = \sigma_{x,a}^2 + \sigma_{x,b}^2$ – эффективная пространственная дисперсия области перекрытия двух гауссовых волновых пакетов с пространственными дисперсиями $\sigma_{x,a}^2$ и $\sigma_{x,b}^2$ и прицельным параметром $|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|$. Впервые этот результат был получен в работе [168] с использованием функции Вигнера. В нашей работе этот результат получен в рамках развитого нами формализма ковариантных волновых пакетов.

Макроскопическое усреднение вероятности взаимодействия сталкивающихся пакетов по прицельному параметру приводит к стандартной формуле $dN = d\sigma L$, где светимость L определяется эффективными пространственными дисперсиями волновых пакетов и пучков частиц a и b .

Глава завершается доказательством лоренц-инвариантности прицельного параметра $|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|$.

Глава 5. Квантово-полевая теория осцилляций нейтрино в модели с релятивистским волновым пакетом

5.1 Макроскопические фейнмановские диаграммы

В данном разделе обсуждается модификация правил Фейнмана, необходимых для расчета амплитуд рассеяния, соответствующих макроскопическим фейнмановским диаграммам, чьи внешние линии описываются релятивистскими волновыми пакетами, а не фокковскими одночастичными состояниями.

5.1.1 Макроскопическая диаграмма общего вида

Мы будем иметь дело с одночастично-приводимыми связными диаграммами, общая структура которых показана на рис. 5.1. Внешние линии таких диаграмм соответствуют асимптотически

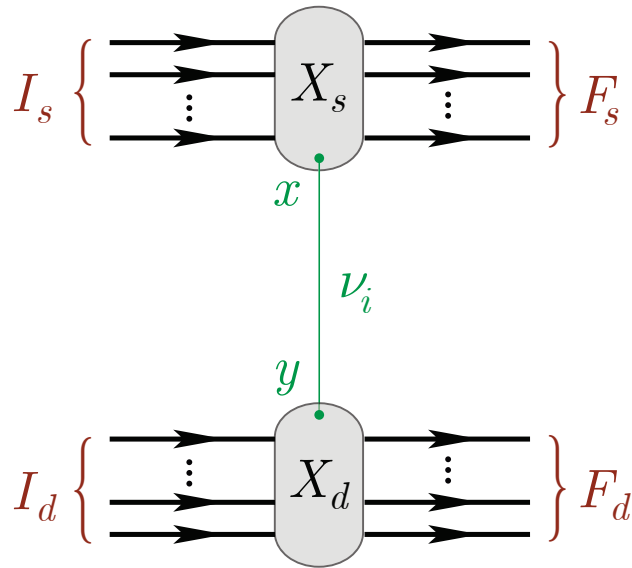


Рисунок 5.1 — Макроскопическая фейнмановская диаграмма общего вида с обменом массивным нейтрино.

свободным начальным (“in”) и конечным (“out”) волновым пакетам $|\mathbf{p}_a, s_a, x_a\rangle$ и $|\mathbf{p}_b, s_b, x_b\rangle$ в координатном представлении, т.е. волновым функциям $\psi_a(\mathbf{p}_a, x_a)$ и $\psi_b^*(\mathbf{p}_b, x_b)$, характеризуемым наиболее вероятными импульсами \mathbf{p}_a , \mathbf{p}_b и пространственно-временными координатами x_a , x_b , а также массами m_a , m_b и параметрами¹ σ_a , σ_b (“дисперсиями”), характеризующими неопределенности импульсов. Здесь и далее используются следующие обозначения: I_s (F_s) – совокупность in (out) пакетов, в блоке X_s (“источнике”), I_d (F_d) – совокупность in (out) пакетов, в блоке X_d (“детекторе”). Блоки X_s и X_d обозначают области взаимодействия полей и могут содержать произвольные

¹А в более общем случае – наборами параметров σ_a , σ_b .

внутренние линии и петли. Внутренняя линия, соединяющая блоки X_s и X_d , обозначает причинную функцию Грина массивного нейтрино ν_i с массой m_i ($i = 1, 2, 3, \dots$). В дальнейшем предполагается, что вершины x и y описываются лагранжианом СМ, феноменологически дополненным дираковским или майорановским массовым членом и соответствующим кинетическим вкладом, поэтому либо начальные, либо конечные состояния (либо те и другие) должны содержать заряженный лептон или (анти)нейтрино². Блоки X_s и X_d считаются макроскопически разделенными в пространстве-времени, что объясняет смысл термина “макроскопическая диаграмма”.

5.1.2 Примеры макродиаграмм

Простейший пример макродиаграммы типа 5.1 приведен на рис. 5.2. Сумма таких диаграмм дает амплитуду “макропроцесса”

$$\pi^+ \oplus n \rightarrow \mu^+ \oplus \tau^- p, \quad (5.1)$$

где символ \oplus используется для указания того, что вершины диаграммы макроскопически разделены в пространстве-времени. Процессы такого типа дают основной вклад в числа событий в экспериментах с атмосферными и ускорительными нейтрино. В стандартном квантовомеханическом подходе процесс ур. (5.1) рассматривается как последовательность трех независимых подпроцессов:

- (а) распад пиона $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ в источнике (пространственно-временной точке x_1),
- (б) распространение нейтрино, при котором происходит флейворный переход $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$,
- (в) квазиупругое взаимодействие $\nu_\tau n \rightarrow \tau^+ p$ в детекторе (пространственно-временной точке x_2).

В диаграммном подходе КТП мы имеем дело с единым процессом ур. (5.1), а несколько загадочное явление флейворного перехода (“осцилляции”) $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ сводится к банальной интерференции диаграмм с виртуальными полями нейтрино ν_i определенной массы; при этом не возникает необходимости в использовании состояний или полей нейтрино с определенными флейворами ν_μ и ν_τ .

Рассмотрим еще несколько примеров макродиаграмм, представляющих потенциальный интерес. На рис. 5.3 показаны четыре диаграммы низшего порядка по электрослабому взаимодействию, описывающие μ_{e3} распад в источнике, сопровождаемый квазиупругим рассеянием виртуального нейтрино (антинейтрино) на нейтроне (протоне) с рождением τ -лептона в детекторной вершине. Разумеется, в СМ с безмассовыми нейтрино все эти процессы строго запрещены законом сохранения лептонных чисел, но становятся возможными при наличии в лагранжиане дираковского или майорановского массового члена. При этом диаграммы (а) и (б) относятся к случаю как дираковских, так и майорановских (анти)нейтрино, а диаграммы (в) и (г) возникают только для майорановских нейтрино (совпадающих с антинейтрино). В последнем случае диаграммы (а), (г)

² Чтобы избежать излишних усложнений мы исключаем возможность того, что в число внешних однопакетных состояний входят калибровочные или хиггсовские бозоны.

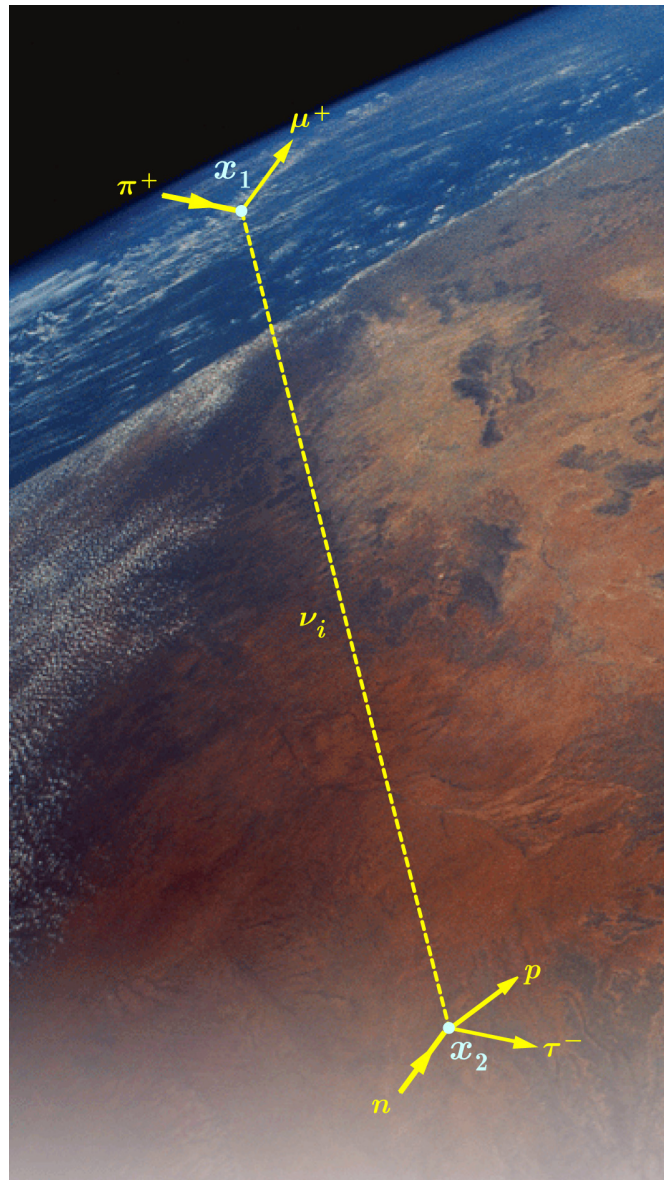
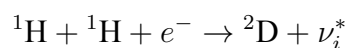


Рисунок 5.2 — Пример макроскопической фейнмановской диаграммы, описывающей $\pi_{\mu 2}$ распад в пространственно-временной точке x_1 и последующее квазиупругое нейтринорождение τ -лептона в точке x_2 . Точки x_1 и x_2 могут быть разделены макроскопически большим пространственно-временным интервалом.

и (б), (в) интерферируют друг с другом. В рамках нашего формализма массивные нейтрино во внешних линиях диаграмм рис. 5.3 должны описываться волновыми пакетами того же типа, что и для всех других массивных полей.

Диаграммы, изображенные на рис. 5.4, описывают (в низшем порядке по электрослабому взаимодействию) синтез ядра дейтерия в т.н. “*per*-реакции”



в источнике и последующее взаимодействие виртуального нейтрино ν_i^* с галлиевой мишенью (а) и электронной мишенью (б,в). Чрезвычайно “медленная” *per*-реакция ответственна за образование примерно 0.25% дейтерия в Солнце и проявляется в одной из ветвей протон-протонной цепочки превращения водорода в гелий. Несмотря на ничтожный вклад *per*-реакции в энергетику

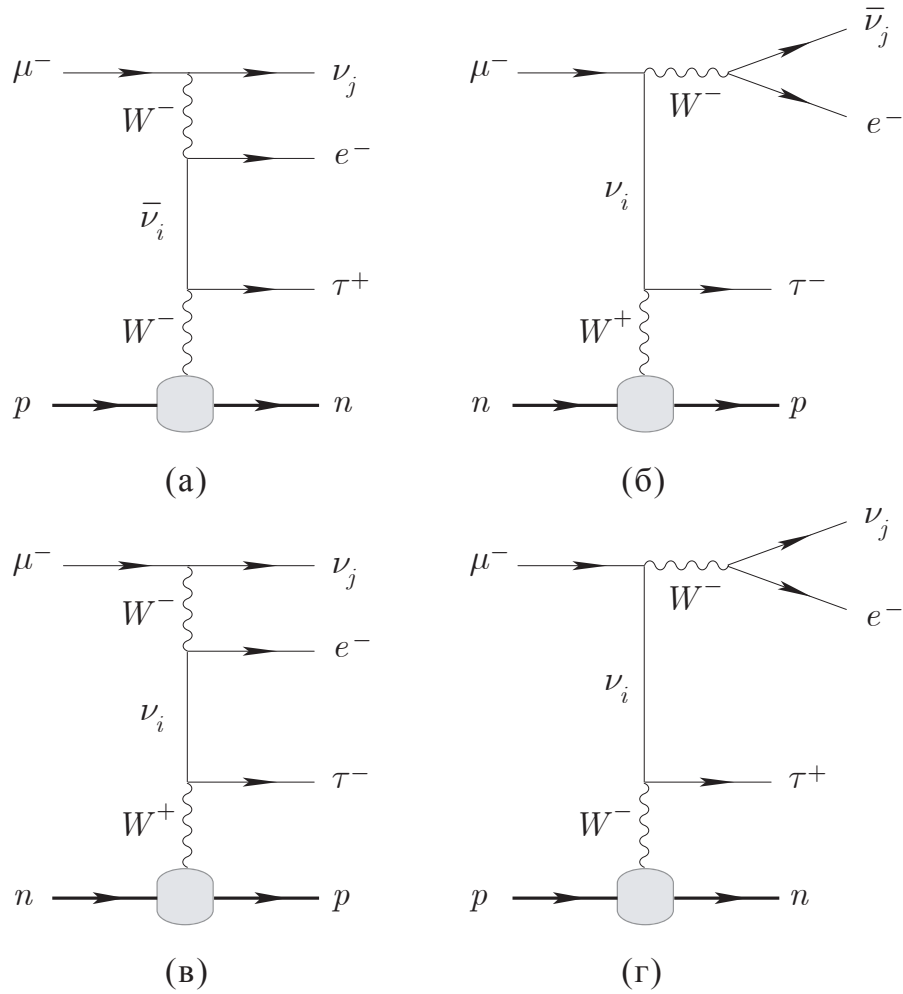


Рисунок 5.3 — Диаграммы низшего порядка по электрослабому взаимодействию, описывающие μ_{e3} распад в источнике и квазиупругое рождение τ -лептона в детекторе.

Солнца, она дает хотя и малый, но измеримый вклад в число событий, детектируемых в галлий-германиевых экспериментах (SAGE, GALLEX, GNO). К сожалению, пороги детектирования солнечных нейтрино в современных водно-черенковских подземных детекторах Super-Kamiokande и SNO существенно превышают ожидаемую среднюю энергию нейтрино (≈ 1.44 МэВ) от *pp*-реакции в Солнце и поэтому процессы, отвечающие диаграммам (б) и (в), пока недоступны для экспериментального изучения.

Экзотические процессы, показанные на рис. 5.4, иллюстрируют целесообразность изучения макродиаграмм с более чем двумя in-пакетами в каждом из макроскопически разделенных блоков. Такого рода диаграммы также представляют интерес для изучения реакций с участием нейтрино в плотной горячей плазме ранней Вселенной и в сверхплотных астрофизических объектах, таких как нейтронные и кварковые звезды. Однако в контексте проблемы нейтринных осцилляций главная причина для рассмотрения диаграмм с произвольным числом in- и out-пакетов во внешних линиях все же не в этом. Как будет видно из дальнейшего, дополнительная симметрия формул для амплитуд общего вида позволяет несколько упростить их анализ.

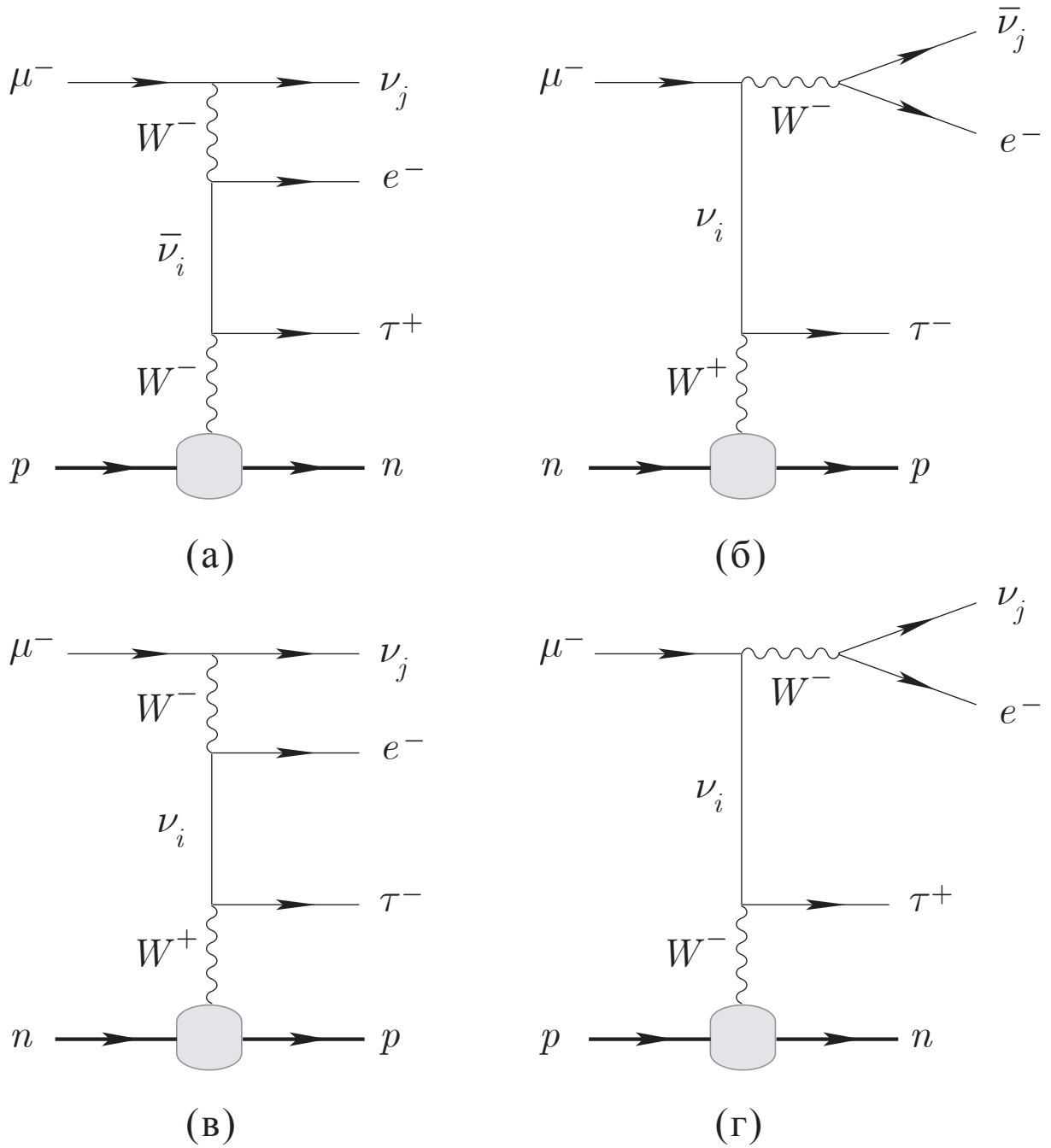


Рисунок 5.4 — Диаграммы низшего порядка по электрослабому взаимодействию, описывающие синтез дейтрона в $p\bar{p}$ -реакции в источнике и нейтринорождение электрона на ядре галлия (а) и на свободном электроне (б,в) в детекторе.

5.1.3 Правила Фейнмана

Формальное определение начального и конечного состояний для диаграммы, показанной на рис. 5.1 можно написать в виде

$$|in\rangle = |\{p_a, x_a, s_a\}, a \in I_s \oplus I_d\rangle, \quad |out\rangle = |\{p_b, x_b, s_b\}, b \in F_s \oplus F_d\rangle. \quad (5.2)$$

Здесь, как и в выше рассмотренном примере ур. (5.1), символ \oplus подчеркивает, что волновые пакеты из I_s и I_d , а также из F_s и F_d макроскопически разделены. Предполагается, кроме того, что все входящие пакеты (a) находятся в отдаленном прошлом, а все выходящие (b) – в отдаленном будущем по отношению к моменту (или временному интервалу) взаимодействия в блоках X_s и X_d . Чтобы использовать стандартную диаграммную технику, основанную на теоремах Вика, мы должны рассматривать лишь такие конфигурации координат x_a и x_b , для которых пакеты в каждом из “подсостояний” I_s, I_d, F_s и F_d не взаимодействуют друг с другом, т.е. пространственные координаты центров пакетов должны быть настолько далеки друг от друга, чтобы состояния ур. (5.2) можно было с хорошей точностью аппроксимировать прямыми произведениями *асимптотически свободных* однопакетных состояний $|\mathbf{p}_a, s_a, x_a\rangle, |\mathbf{p}_b, s_b, x_b\rangle$, т.е.

$$\begin{aligned} |in\rangle &= \left(\prod_{a \in I_s \oplus I_d} \int \frac{d\mathbf{k}_a \phi_a(\mathbf{k}_a, \mathbf{p}_a) e^{ik_a x_a}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_a}} \sqrt{2E_{\mathbf{k}_a}} a_{\mathbf{k}_a s_a}^{(a)\dagger} \right) |0\rangle, \\ |out\rangle &= \left(\prod_{b \in F_s \oplus F_d} \int \frac{d\mathbf{k}_b \phi_b(\mathbf{k}_b, \mathbf{p}_b) e^{ik_b x_b}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_b}} \sqrt{2E_{\mathbf{k}_b}} a_{\mathbf{k}_b s_b}^{(b)\dagger} \right) |0\rangle. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Порядок следования операторов рождения в ур. (5.3) не существен, даже если они соответствуют тождественным полям, поскольку, как было показано в разделе 4.1.5, квантовыми корреляциями между тождественными волновыми пакетами, достаточно хорошо разделенными в пространстве-времени, можно пренебречь, а общий знак амплитуды рассеяния не важен. Перечисленные требования (включая понятие макроскопического разделения областей взаимодействия X_s и X_d) феноменологически мотивированы и интуитивно ясны, но довольно “размыты” в математическом смысле. Математически четкие условия будут сформулированы в разделе 5.1.9 после получения всех необходимых для этого промежуточных результатов.

Нормировку in- и out-состояний можно написать в виде

$$\langle in|in\rangle = \prod_{a \in I_s \oplus I_d} 2\bar{E}_a V_a, \quad \langle out|out\rangle = \prod_{b \in F_s \oplus F_d} 2\bar{E}_b V_b, \quad (5.4)$$

где $\bar{E}_x \equiv \bar{E}_{\mathbf{p}_x} \approx E_{\mathbf{p}_x}$ и $V_x = V_x(\mathbf{p}_x)$ есть, соответственно, средняя энергия и эффективный объем пакета x ; здесь и в дальнейшем индекс x используется для обозначения как начальных (a), так и конечных (b) пакетов. Внешние входящие и выходящие линии диаграмм, ассоциированные со свободными полями $\Phi_a(y_a)$ ($a \in I_s \oplus I_d$) и $\Phi_b(y_b)$ ($b \in F_s \oplus F_d$), дают факторы

$$\langle 0|\Phi_a(y_a)|\mathbf{p}_a, s_a, x_a\rangle \quad \text{и} \quad \langle \mathbf{p}_b, s_b, x_b|\Phi_b^\dagger(y_b)|0\rangle,$$

в амплитуде рассеяния. Поэтому, в соответствии с принятым нами приближением узких в импульсном пространстве пакетов, стандартный (плосковолновой) фейнмановский фактор, соответствующий внешней линии, должен быть умножен на

$$\begin{cases} \psi_a(\mathbf{p}_a, y_a - x_a) & \text{для } a \in I_s \oplus I_d, \\ \psi_b^*(\mathbf{p}_b, y_b - x_b) & \text{для } b \in F_s \oplus F_d, \end{cases} \quad (5.5)$$

где каждая волновая функция дается ур. (4.25) и определяется формфактором $\phi_x(\mathbf{k}, \mathbf{p}_x)$, зависящем от массы m_x и дисперсии σ_x , а 4-вектор y_x (переменная интегрирования) есть координата

внутренней точки (элементарной вершины взаимодействия) внешней линии \varkappa с определенной внутренней линией диаграммы. Поэтому амплитуда, соответствующая любой макродиаграмме, должна содержать множители

$$\int dy_\varkappa \psi_\varkappa(\mathbf{p}_\varkappa, y_\varkappa - x_\varkappa) f_{(\varkappa)}(z_\varkappa - y_\varkappa), \quad (5.6)$$

в которых $f_{(\varkappa)}(y_\varkappa - z_\varkappa)$ – это структурный фактор, соответствующий взаимодействию внутренней линии диаграммы с внешним (входящим) полем $\Phi_\varkappa(y_\varkappa)$ в точке y_\varkappa (для краткости мы опускаем возможные тензорные или спинорные индексы и все аргументы функции $f_{(\varkappa)}$, кроме $z_\varkappa - y_\varkappa$). С учетом определения функции ψ_\varkappa , интеграл ур. (5.6) может быть тождественно переписан в виде

$$\begin{aligned} \int dy_\varkappa \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-ip(y_\varkappa - x_\varkappa)} \phi_\varkappa(\mathbf{p}, \mathbf{p}_\varkappa) \int \frac{dk}{(2\pi)^4} e^{-ik(z_\varkappa - y_\varkappa)} \tilde{f}_{(\varkappa)}(k) = \\ = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-ip(z_\varkappa - y_\varkappa)} \phi_\varkappa(\mathbf{p}, \mathbf{p}_\varkappa) \tilde{f}_{(\varkappa)}(p), \end{aligned}$$

где $\tilde{f}_{(\varkappa)}(p)$ есть фурье-образ функции $f_{(\varkappa)}(x)$. Благодаря предполагаемому “ δ -образному” поведению формфактора $\phi_\varkappa(\mathbf{p}, \mathbf{p}_\varkappa)$, аргумент p у функции $\tilde{f}_{(\varkappa)}(p)$ можно заменить на $p_\varkappa = (E_{\mathbf{p}_\varkappa}, \mathbf{p}_\varkappa)$, после чего интеграл ур. (5.6) переписется в виде:

$$\int dy_\varkappa \psi_\varkappa(\mathbf{p}_\varkappa, y_\varkappa - x_\varkappa) f_{(\varkappa)}(z_\varkappa - y_\varkappa) \approx \psi_\varkappa(\mathbf{p}_\varkappa, z_\varkappa - x_\varkappa) \tilde{f}_{(\varkappa)}(p_\varkappa). \quad (5.7)$$

Этот результат справедлив для узких волновых пакетов общего вида, но в реальных расчетах мы будем использовать приближение СРГП. Соотношение аналогичное ур. (5.7) можно получить и для выходящих линий диаграммы. Поскольку в плосковолновом пределе правая часть ур. (5.7) представляет собой стандартный фейнмановский фактор, то из ур. (5.5) заключаем, что фейнмановские правила для внутренних линий диаграммы не видоизменяются.

5.1.4 Интегралы перекрытия

В дальнейшем мы ограничимся простым случаем, когда взаимодействия в блоках X_s и X_d можно описать локальными лептонными или адронными токами (явные формулы будут получены в следующем разделе для специального класса диаграмм). Тогда, принимая во внимание, что Фурье-представление нейтринного пропагатора содержит фазовый фактор $\exp[iq(x - y)]$ (где q – 4-импульс виртуального нейтрино ν_i), все функции ψ_\varkappa и ψ_\varkappa^* могут быть отфакторизованы от “динамической” части диаграммы в виде следующих двух общих множителей в подынтегральном выражении для амплитуды рассеяния:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_s(q) &= \int dx e^{+iqx} \left[\prod_{a \in I_s} \psi_a(\mathbf{p}_a, x - x_a) \right] \left[\prod_{b \in F_s} \psi_b^*(\mathbf{p}_b, x - x_b) \right], \\ \mathbb{V}_d(q) &= \int dy e^{-iqy} \left[\prod_{a \in I_d} \psi_a(\mathbf{p}_a, y - x_a) \right] \left[\prod_{b \in F_d} \psi_b^*(\mathbf{p}_b, y - x_b) \right]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Эти множители характеризуют пространственно-временное перекрытие in- и out-пакетов в источнике и детекторе, усредненное по всему пространству-времени³ и в дальнейшем мы будем называть их интегралами перекрытия. Разумеется, $\mathbb{V}_s(q)$ и $\mathbb{V}_d(q)$ являются функциями не только 4-импульса q , но также 4-импульсов и 4-координат всех внешних пакетов, участвующих в реакции; эти параметры опущены для краткости. Изучим основные свойства интегралов перекрытия, необходимые для дальнейшего анализа.

5.1.5 Плосковолновой предел

Нетрудно видеть, что в плосковолновом пределе ($\sigma_\varkappa \rightarrow 0, \forall \varkappa$) интегралы перекрытия ур. (5.8) переходят в обычные сингулярные факторы

$$\mathbb{V}_s(q) \rightarrow (2\pi)^4 \delta(q - q_s), \quad \mathbb{V}_d(q) \rightarrow (2\pi)^4 \delta(q + q_d), \quad (5.9)$$

где q_s и q_d – переданные 4-импульсы в источнике и детекторе, определяемые как

$$q_s = \sum_{a \in I_s} p_a - \sum_{b \in F_s} p_b \quad \text{и} \quad q_d = \sum_{a \in I_d} p_a - \sum_{b \in F_d} p_b. \quad (5.10)$$

δ -функции в ур. (5.9) обеспечивают точное сохранение энергии-импульса в вершинах X_s и X_d (т.е. в “подпроцессах” $I_s \rightarrow F_s + \nu_i$ и $\nu_i + I_d \rightarrow F_d$) и, в результате, сохранение энергии-импульса в процессе $I_s \oplus I_d \rightarrow F_s \oplus F_d$ в целом:

$$\sum_{a \in I_s \oplus I_d} p_a = \sum_{b \in F_s \oplus F_d} p_b.$$

Отметим, что в плосковолновом пределе информация о пространственно-временных координатах внешних пакетов полностью теряется.

5.1.6 Тензоры перекрытия

При $\sigma_\varkappa \neq 0$ интегралы перекрытия несингулярны и можно ожидать не более чем приближенного сохранения энергии и импульса в вершинах. Для количественного описания перейдем к модели СРГП и введем тензоры

$$T_\varkappa^{\mu\nu} = \sigma_\varkappa^2 (u_\varkappa^\mu u_\varkappa^\nu - g^{\mu\nu}), \quad (5.11)$$

где $u_\varkappa = p_\varkappa/m_\varkappa = \Gamma_\varkappa(1, \mathbf{v}_\varkappa)$ – 4-скорость пакета \varkappa . Тогда интегралы перекрытия ур. (5.8) принимают вид

$$\mathbb{V}_{s,d}(q) = \int dx \exp \left[i(\pm qx - q_{s,d}x) - \mathcal{T}_{s,d}(x) \right], \quad (5.12)$$

³Фазовые множители e^{+iqx} и e^{-iqy} в ур. (5.8) можно интерпретировать как волновые пакеты выходящего и входящего нейтрино.

где

$$\Upsilon_{s,d}(x) = \sum_{\varkappa \in S,D} T_{\varkappa}^{\mu\nu} (x_{\varkappa} - x)_{\mu} (x_{\varkappa} - x)_{\nu}, \quad S = I_s \oplus F_s, \quad D = I_d \oplus F_d.$$

Определим также тензоры

$$\mathfrak{R}_s^{\mu\nu} = \sum_{\varkappa \in S} T_{\varkappa}^{\mu\nu} \quad \text{и} \quad \mathfrak{R}_d^{\mu\nu} = \sum_{\varkappa \in D} T_{\varkappa}^{\mu\nu}. \quad (5.13)$$

Поскольку лоренц-инвариантная квадратичная форма

$$T_{\varkappa}^{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu} = \sigma_{\varkappa}^2 [(u_{\varkappa} x)^2 - x^2] = \sigma_{\varkappa}^2 \mathbf{x}_{\star}^2$$

(в которой \mathbf{x}_{\star} обозначает переменную \mathbf{x} в с.п. пакета \varkappa) неотрицательна, то квадратичные формы $\mathfrak{R}_s^{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu}$ и $\mathfrak{R}_d^{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu}$ также неотрицательны. Более того, они *положительно определены* почти всюду, поскольку могут обращаться в нуль только если 3-скорости \mathbf{v}_{\varkappa} всех входящих и выходящих пакетов одинаковы или, другими словами, если существует система отсчета, в которой 3-импульсы \mathbf{p}_{\varkappa} всех пакетов в источнике или детекторе обращаются в нуль. Последнее означало бы, что эффективно 3-импульс виртуального нейтрино мал по величине⁴; в частности, в пределе точного сохранения энергии-импульса вклад в амплитуду процесса с нулевыми импульсами всех внешних частиц может быть отличен от нуля лишь при $|\mathbf{q}| \equiv 0$. За исключением этого физически малоинтересного случая, можно считать тензоры $\mathfrak{R}_s^{\mu\nu}$ и $\mathfrak{R}_d^{\mu\nu}$ *положительно-определенными*, что эквивалентно положительности собственных значений матриц $\|\mathfrak{R}_s^{\mu\nu}\|$ и $\|\mathfrak{R}_d^{\mu\nu}\|$. Поэтому существуют положительно-определенные тензоры $\tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu}$ и $\tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\nu}$ такие, что

$$\tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\lambda} (\mathfrak{R}_s)_{\lambda\nu} = \delta_{\nu}^{\mu} \quad \text{и} \quad \tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\lambda} (\mathfrak{R}_d)_{\lambda\nu} = \delta_{\nu}^{\mu} \quad (5.14a)$$

или, в матричной форме,

$$\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d} = \|\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu}\| = g \mathfrak{R}_{s,d}^{-1} g, \quad \mathfrak{R}_{s,d} = \|\mathfrak{R}_{s,d}^{\mu\nu}\|, \quad (5.14b)$$

где $g = \|g_{\mu\nu}\| = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Разумеется, $|\mathfrak{R}_{s,d}| > 0$ и $|\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}| = |\mathfrak{R}_{s,d}|^{-1}$. Мы будем называть $\mathfrak{R}_{s,d}^{\mu\nu}$ и $\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu}$ тензорами перекрытия и обратными тензорами перекрытия соответственно.

Интеграл ур. (5.12) может быть вычислен в явном виде с помощью хорошо известной формулы для 4-мерной гауссовой квадратуры в пространстве Минковского (см. ур. (A.11), Приложение A.2):

$$\mathbb{V}_{s,d}(q) = (2\pi)^4 \tilde{\delta}_{s,d}(q \mp q_{s,d}) \exp[-\mathfrak{G}_{s,d} \pm i(q \mp q_{s,d}) X_{s,d}]. \quad (5.15)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\tilde{\delta}_{s,d}(K) = \frac{1}{(4\pi)^2 \sqrt{|\mathfrak{R}_{s,d}|}} \exp\left(-\frac{1}{4} \tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu} K_{\mu} K_{\nu}\right), \quad (5.16)$$

$$X_{s,d}^{\mu} = \tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu} \sum_{\varkappa} T_{\varkappa\nu}^{\lambda} x_{\varkappa\lambda} = \tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu} \sum_{\varkappa} \sigma_{\varkappa}^2 [(u_{\varkappa} x_{\varkappa}) u_{\varkappa\nu} - x_{\varkappa\nu}], \quad (5.17)$$

$$\mathfrak{G}_{s,d} = \sum_{\varkappa, \varkappa'} W_{\varkappa\varkappa'}^{\mu\nu} x_{\varkappa\mu} x_{\varkappa'\nu}, \quad \varkappa, \varkappa' \in S \text{ или } D. \quad (5.18)$$

⁴Вообще говоря, 4-импульс q в ур. (5.12) произволен и, в отсутствие точного сохранения энергии-импульса в вершинах диаграммы, одновременное обращение в нуль импульсов \mathbf{p}_{\varkappa} означает лишь, что *наиболее вероятное* значение $|\mathbf{q}|$ мало, причем степень малости $|\mathbf{q}|$ определяется малостью отношений $\sigma_{\varkappa}/m_{\varkappa}$. Ниже мы уточним это утверждение.

Тензоры $W_{\kappa\kappa'}^{\mu\nu}$ имеют вид

$$W_{\kappa\kappa'}^{\mu\nu} = \delta_{\kappa\kappa'} T_{\kappa}^{\mu\nu} - T_{\kappa\mu'}^{\mu} \tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu'\nu'} T_{\kappa'\nu'}^{\nu}, \quad W_{\kappa\kappa'}^{\mu\nu} = W_{\kappa'\kappa}^{\nu\mu}, \quad (5.19)$$

где индексы s, d не выписаны явно, но подразумеваются. Выясним физический смысл величин ур. (5.16), ур. (5.17) и ур. (5.18).

5.1.7 Факторы, ответственные за баланс энергии-импульса

Как нетрудно видеть из интегрального представления для функций ур. (5.16)

$$\tilde{\delta}_{s,d}(K) = \int \frac{dx}{(2\pi)^4} \exp(iKx - \mathfrak{R}_{s,d}^{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu}),$$

в плосковолновом пределе факторы $\tilde{\delta}_s(q - q_s)$ и $\tilde{\delta}_d(q + q_d)$ в ур. (5.15) превращаются в обычные δ -функции $\delta(q - q_s)$ и $\delta(q + q_d)$. При малых, но ненулевых значениях σ_{κ} , вероятность процесса $I_s \oplus I_d \rightarrow F_s \oplus F_d$ будет сильно подавлена при малом отклонении от точного сохранения 4-импульса, т.е., при небольшом дисбалансе между передачами 4-импульсов q_s и q_d в вершинах макродиаграммы и 4-импульсом виртуального нейтрино. В реальных экспериментах измеряются вероятности процессов, тем или иным образом усредненные по конфигурациям внешних импульсов, включая, вообще говоря, импульсы детектируемых вторичных частиц, для которых усреднение производится по конечным интервалам, задаваемым условиями эксперимента. Поэтому факторы $\tilde{\delta}_s(q - q_s)$ и $\tilde{\delta}_d(q + q_d)$ отвечают за приближенное *в статистическом смысле* сохранение энергии и импульса в подпроцессах рождения и поглощения нейтрино, причем допустимая “разбалансировка” определяется обратными тензорами перекрытия, т.е., в конечном счете, величинами размазок 4-импульсов in- и out-пакетов. В дальнейшем, говоря о приближенном сохранении энергии-импульса в вершинах, мы будем подразумевать, что речь идет лишь о тех конфигурациях внешних импульсов, которые вносят существенный вклад в полную вероятность процесса, усредненную по всем возможным конфигурациям. Конкретная реализация такого усреднения была рассмотрена в [33].

5.1.8 Геометрические факторы подавления и прицельные точки

Преобразуем квадратичные формы \mathfrak{S}_s и \mathfrak{S}_d , воспользовавшись определениями в ур. (5.13), (5.18) и (5.19):

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{s,d} &= \sum_{\kappa, \kappa'} T_{\kappa}^{\mu\mu'} (\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d})_{\mu'\nu'} T_{\kappa'\nu'}^{\nu\nu} x_{\kappa\mu} (x_{\kappa} - x_{\kappa'})_{\nu} = \\ &= \sum_{\kappa} T_{\kappa}^{\mu\nu} x_{\kappa\mu} x_{\kappa\nu} - \sum_{\kappa, \kappa'} T_{\kappa}^{\mu\mu'} (\tilde{\mathfrak{R}}_{s,d})_{\mu'\nu'} T_{\kappa'\nu'}^{\nu\nu} x_{\kappa\mu} x_{\kappa'\nu}. \end{aligned}$$

Вставив в последнее слагаемое единичную матрицу и учитывая (16) находим:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{s,d} &= \sum_{\varkappa} T_{\varkappa}^{\mu\nu} x_{\varkappa\mu} x_{\varkappa\nu} - \left(\sum_{\varkappa} T_{\varkappa\mu'}^{\mu} x_{\varkappa\mu} \right) \tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu'\lambda} (\mathfrak{R}_{s,d})_{\lambda\rho} \tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\rho\nu'} \left(\sum_{\varkappa'} T_{\varkappa'\nu'}^{\nu} x_{\varkappa'\nu} \right) = \\ &= \sum_{\varkappa} T_{\varkappa}^{\mu\nu} x_{\varkappa\mu} x_{\varkappa\nu} - (\mathfrak{R}_{s,d})_{\mu\nu} X_{s,d}^{\mu} X_{s,d}^{\nu},\end{aligned}$$

откуда

$$\mathfrak{S}_{s,d} = \sum_{\varkappa} T_{\varkappa\mu\nu} (x_{\varkappa}^{\mu} x_{\varkappa}^{\nu} - X_{s,d}^{\mu} X_{s,d}^{\nu}). \quad (5.20)$$

Полученное выражение представляет собой средневзвешенное (по всем внешним пакетам в соответствующей вершине диаграммы) квадратичных отклонений координат 4-векторов x_{\varkappa} ($\varkappa \in S, D$) от координат пространственно-временной точки $X_{s,d}$, причем роль “весов” играют тензорные компоненты $T_{\varkappa}^{\mu\nu}$. Таким образом, точки $X_{s,d}$ являются центрами пространственно-временных областей, в которых происходят взаимодействия пакетов в источнике и детекторе. Чтобы полностью прояснить физический и геометрический смысл этого результата, полезно детально изучить свойства симметрии величин $X_{s,d}$ и $\mathfrak{S}_{s,d}$.

Группа трансляций.

Нетрудно доказать, что квадратичные формы \mathfrak{S}_s и \mathfrak{S}_d инвариантны относительно трансляций всех координат x_{\varkappa} на один и тот же произвольный 4-вектор y ,

$$x_{\varkappa} \longmapsto x'_{\varkappa} = x_{\varkappa} + y. \quad (5.21)$$

В самом деле, при таком преобразовании $X_{s,d} \longmapsto X'_{s,d} = X_{s,d} + y$ и поэтому

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{s,d} \longmapsto \mathfrak{S}'_{s,d} &= \mathfrak{S}_{s,d} + \sum_{\varkappa} T_{\varkappa\mu\nu} (y^{\mu} x_{\varkappa}^{\nu} + x_{\varkappa}^{\mu} y^{\nu} - y^{\mu} X_{s,d}^{\nu} - X_{s,d}^{\mu} y^{\nu}) = \\ &= \mathfrak{S}_{s,d} + 2y_{\mu} \sum_{\varkappa} T_{\varkappa}^{\mu} (x_{\varkappa}^{\nu} - X_{s,d}^{\nu}).\end{aligned}$$

Поскольку же, согласно определению ур. (5.17),

$$\sum_{\varkappa} T_{\varkappa\nu}^{\mu} X_{s,d}^{\nu} = (\mathfrak{R}_{s,d})_{\nu}^{\mu} X_{s,d}^{\nu} = (\mathfrak{R}_{s,d})_{\nu}^{\mu} \tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\nu\nu'} \sum_{\varkappa} T_{\varkappa\nu'}^{\lambda} x_{\varkappa\lambda} = \sum_{\varkappa} T_{\varkappa}^{\mu\nu} x_{\varkappa\nu},$$

видим, как и утверждалось, что

$$\mathfrak{S}'_{s,d} = \mathfrak{S}_{s,d}.$$

Следует отметить, что квадратичные формы \mathfrak{S}_s и \mathfrak{S}_d инвариантны также относительно инверсии пространственно-временных координат, $x_{\varkappa} \longmapsto -x_{\varkappa}$.

Сделав теперь в ур. (5.20) преобразование ур. (5.21) с $y = -X_{s,d}$, мы получаем следующее представление для функций $\mathfrak{S}_{s,d}$:

$$\mathfrak{S}_{s,d} = \sum_{\varkappa} T_{\varkappa}^{\mu\nu} (x_{\varkappa} - X_{s,d})_{\mu} (x_{\varkappa} - X_{s,d})_{\nu}, \quad (5.22a)$$

из которого немедленно следует, что квадратичные формы \mathfrak{S}_s и \mathfrak{S}_d неотрицательны и, следовательно, факторы $\exp(-\mathfrak{S}_s)$ и $\exp(-\mathfrak{S}_d)$ в ур. (5.15) подавляют амплитуду при определенных конфигурациях импульсов и координат in и out-пакетов. Используя определение ур. (5.11), запишем ур. (5.22a) в виде

$$\mathfrak{S}_{s,d} = \sum_{\kappa} \sigma_{\kappa}^2 \{ [u_{\kappa} (x_{\kappa} - X_{s,d})]^2 - (x_{\kappa} - X_{s,d})^2 \} = \quad (5.22б)$$

$$= \sum_{\kappa} \sigma_{\kappa}^2 | \mathbf{x}_{\kappa}^{(\kappa)} - \mathbf{X}_{s,d}^{(\kappa)} |^2. \quad (5.22в)$$

Здесь и далее индекс “ (κ) ” означает, что соответствующий вектор записан в с.с.о. пакета κ . Из ур. (5.22в) следует, что подавление мало (т.е. $\mathfrak{S}_{s,d} \ll 1$) при таких конфигурациях координат и импульсов, для которых величины $\sigma_{\kappa}^2 | \mathbf{x}_{\kappa}^{(\kappa)} - \mathbf{X}_{s,d}^{(\kappa)} |^2$ малы при всех $\kappa \in S, D$.

Группа равномерных прямолинейных движений.

Очевидно, $\mathfrak{S}_{s,d} = 0$, когда все 4-координаты x_{κ} совпадают друг с другом (при этом, из равенства $x_{\kappa} = x_{s,d}, \forall \kappa \in S, D$ следует, что $X_{s,d} = x_{s,d}$). Но является ли это условие *необходимым* для обращения $\mathfrak{S}_{s,d}$ в нуль? К счастью, ответ на этот вопрос отрицателен.⁵ Чтобы увидеть это, заметим, что 4-вектор $X_{\kappa} = (u_{\kappa} x_{\kappa}) u_{\kappa} - x_{\kappa}$ (а следовательно и его квадрат $X_{\kappa}^2 = x_{\kappa}^2 - (u_{\kappa} x_{\kappa})^2$) инвариантны по отношению к преобразованию

$$x_{\kappa}^0 \mapsto \tilde{x}_{\kappa}^0 = x_{\kappa}^0 + \theta_{\kappa}, \quad \mathbf{x}_{\kappa} \mapsto \tilde{\mathbf{x}}_{\kappa} = \mathbf{x}_{\kappa} + \mathbf{v}_{\kappa} \theta_{\kappa}, \quad (5.23)$$

в котором θ_{κ} – произвольный вещественный параметр размерности времени. Следовательно, 4-векторы $X_{s,d}$ и, как легко видеть из представления ур. (5.20), квадратичные формы $\mathfrak{S}_{s,d}$ инвариантны по отношению к $N_{s,d}$ -параметрическому множеству преобразований ур. (5.23), где N_s (N_d) есть число однопакетных состояний, содержащихся в начальном и конечном состояниях в источнике (детекторе). Совокупность всех преобразований вида ур. (5.23) образует группу, описывающую равномерные прямолинейные движения пакетов, т.е. сдвиги вдоль классических мировых линий центров пакетов. Поэтому как $X_{s,d}$, так и $\mathfrak{S}_{s,d}$ однозначно задаются фиксацией скоростей \mathbf{v}_{κ} и *произвольных* пространственно-временных точек \tilde{x}_{κ} на этих мировых линиях. Если, в частности, классические траектории всех in- и out-пакетов пересекаются в прицельной точке, то $\mathfrak{S}_{s,d} = 0$ в любой точке каждой из этих траекторий. Таким образом, пакеты могут быть макроскопически разделены в пространстве-времени до и после взаимодействия и считаться асимптотически свободными, но если векторы скоростей \mathbf{v}_a in-пакетов и векторы $-\mathbf{v}_b$, противоположенные скоростям асимптотически свободных out-пакетов все “нацелены” в точку X_s (в источнике) или X_d (в детекторе), то \mathfrak{S}_s или \mathfrak{S}_d обращаются в нуль. На основании этого свойства естественно назвать 4-векторы X_s и X_d прицельными точками in- и out-пакетов в источнике и детекторе соответственно.

⁵“К счастью”, т.к. в противном случае не могло бы быть и речи об асимптотически свободных волновых пакетах, без чего невозможно было бы использовать теорию возмущений.

Чтобы сделать картину взаимодействия пакетов более наглядной, полезно ввести понятие мировой трубки волнового пакета, определяемой как пространственно-временной цилиндрический объем, заметаемый движущимся по классической траектории сплюснутым эллипсоидом, который служит образной моделью волнового пакета⁶. Понятно, что подавление интеграла перекрытия (и амплитуды), обусловленное фактором $\exp(-\mathfrak{S}_s)$ ($\exp(-\mathfrak{S}_d)$), мало, если *все* мировые трубки in- и out-пакетов в источнике (детекторе) пересекаются друг с другом (см. рис. 5.5). В опре-

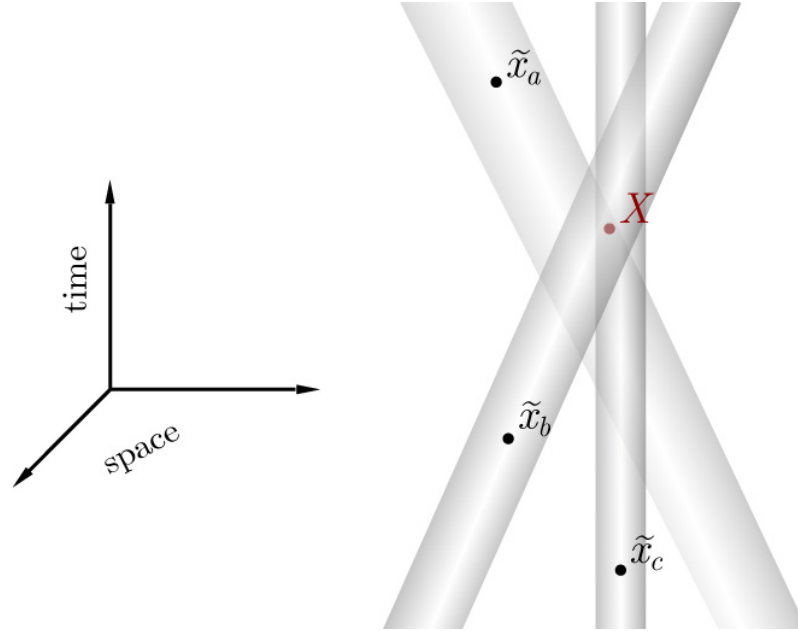


Рисунок 5.5 — Условный образ “классических мировых трубок” сталкивающихся волновых пакетов. Трубки изображают пространственно-временные цилиндрические объемы, заметаемые классически движущимися эллипсоидами, служащими наглядными моделями волновых пакетов. Прицельная точка X однозначно определяется скоростями v_z пакетов и пространственно-временными точками $\tilde{x}_z = \tilde{x}_z(\theta_z)$, произвольно выбранными на осях симметрии трубок (по которым в среднем движутся центры волновых пакетов). Эти оси отнюдь не обязаны пересекать точку X , но если конфигурация координат и скоростей in- и out-пакетов такова, что прицельная точка оказывается внутри области пересечения *всех* мировых трубок пакетов, то подавление такой конфигурации мало (отсутствует в случае точного пересечения осей в точке X); в противном же случае оно велико.

деленном смысле волновые пакеты ведут себя подобно взаимопроникающим облачкам. Для иллюстрации этого образа представим функции \mathfrak{S}_s и \mathfrak{S}_d в виде отношений интегралов перекрытия специального вида:

$$\exp(-\mathfrak{S}_{s,d}) = \frac{\int dx \prod_{z \in S,D} |\psi_z(\mathbf{p}_z, x_z - x)|}{\int dx \prod_{z \in S,D} |\psi_z(\mathbf{p}_z, x)|}. \quad (5.24a)$$

⁶Напомним, что диаметр такого эллипсоида, перпендикулярный вектору наиболее вероятного импульса пакета \mathbf{p} (а значит и диаметр классической мировой трубки) равен $d_* \propto 1/\sigma$, а параллельный вектору \mathbf{p} диаметр — $d_*/\Gamma_p \propto 1/(\sigma\Gamma_p)$, где фактор Γ_p возникает в результате лоренцева сокращения.

В силу инвариантности функций $|\psi_{\varkappa}(\mathbf{p}_{\varkappa}, x_{\varkappa} - x)|$ относительно преобразований ур. (5.23) можно заменить координаты x_{\varkappa} в ур. (5.24а) на y_{\varkappa} , где

$$y_{\varkappa}^0 = X_{s,d}^0, \quad \mathbf{y}_{\varkappa} = \mathbf{x}_{\varkappa} + (X_{s,d}^0 - x_{\varkappa}^0) \mathbf{v}_{\varkappa}, \quad \varkappa \in S \text{ или } D$$

и переписать ур. (5.24а) в виде

$$\exp(-\mathfrak{S}_{s,d}) = \frac{\int dx \prod_{\varkappa \in S,D} |\psi_{\varkappa}(\mathbf{p}_{\varkappa}, y_{\varkappa} - x)|}{\int dx \prod_{\varkappa \in S,D} |\psi_{\varkappa}(\mathbf{p}_{\varkappa}, x)|}. \quad (5.24б)$$

Тогда из геометрических соображений становится очевидным, что $\exp(-\mathfrak{S}_{s,d}) < 1$ при несовпадении любой пары координат \mathbf{y}_{\varkappa} и $\mathbf{y}_{\varkappa'}$ в один и тот же (“прицельный”) момент времени, поскольку подынтегральное выражение в числителе отношения ур. (5.24б) не превосходит такого в знаменателе. Это утверждение схематически иллюстрирует рис. 5.6 на примере пары перекрывающихся пакетов 1 и 2. Пакеты изображены на рисунке в системе их центра инерции ($\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* = 0$),

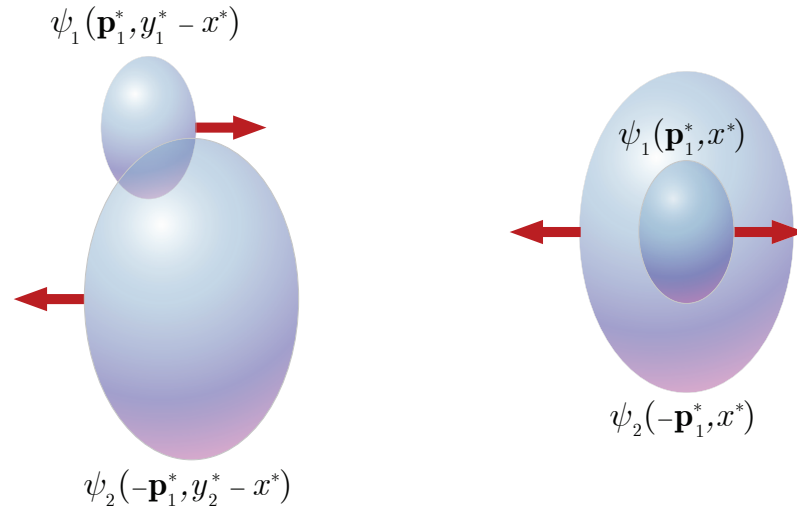


Рисунок 5.6 — Схематическая иллюстрация двух конфигураций пары перекрывающихся волновых пакетов в системе их центра инерции. Левая конфигурация соответствует фактору $|\psi_1(\mathbf{p}_1, y_1 - x)\psi_2(\mathbf{p}_2, y_2 - x)| = |\psi_1(\mathbf{p}_1^*, y_1^* - x^*)\psi_2(-\mathbf{p}_1^*, y_2^* - x^*)|$ в подынтегральном выражении числителя, а правая — фактору $|\psi_1(\mathbf{p}_1, x)\psi_2(\mathbf{p}_2, x)| = |\psi_1(\mathbf{p}_1^*, x^*)\psi_2(-\mathbf{p}_1^*, x^*)|$ в подынтегральном выражении знаменателя в ур. (5.24). Стрелками показаны импульсы $\pm \mathbf{p}_1^*$.

в которой они выглядят как эллипсоиды с эффективными объемами $(\pi/2)^{3/2}/(\Gamma_* \sigma_{1,2}^3)$, сплюснутые вдоль направления вектора \mathbf{p}_1^* . Из рисунка видно, что для любых значений x^* (а значит и для любых значений переменной интегрирования в ур. (5.24б)) справедливо неравенство

$$|\psi_1(\mathbf{p}_1^*, y_1^* - x^*)\psi_2(\mathbf{p}_2^*, y_2^* - x^*)| < |\psi_1(\mathbf{p}_1^*, x^*)\psi_2(\mathbf{p}_2^*, x^*)| \quad \text{при } y_1^* \neq y_2^*.$$

Понятно, что отношение ур. (5.24б) мало, если 4-координаты y_{\varkappa}^* и $y_{\varkappa'}^*$ любой пары пакетов \varkappa и \varkappa' существенно отличаются друг от друга.

Тождество ур. (5.24б) можно переписать также в следующей эквивалентной форме:

$$\exp(-2\mathfrak{S}_{s,d}) = \frac{\int dx \prod_{\varkappa \in S,D} |\psi_{\varkappa}(\mathbf{p}_{\varkappa}, y_{\varkappa} - x)|^2}{\int dx \prod_{\varkappa \in S,D} |\psi_{\varkappa}(\mathbf{p}_{\varkappa}, x)|^2}. \quad (5.25)$$

Фактор $\exp[-2(\mathfrak{S}_s + \mathfrak{S}_d)]$ входит в квадрированную амплитуду рассеяния.

Прицельные векторы.

Найдем пространственное расстояние между прицельной точкой и классической мировой линией пакета $\tilde{\mathbf{x}}_{\varkappa}(\theta_{\varkappa}) = \mathbf{x}_{\varkappa} + \mathbf{v}_{\varkappa}\theta_{\varkappa}$, т.е. классический прицельный параметр

$$|\mathbf{b}_{\varkappa}| = \min_{-\infty < \theta_{\varkappa} < \infty} |\tilde{\mathbf{x}}_{\varkappa}(\theta_{\varkappa}) - \mathbf{X}_{s,d}|.$$

Очевидно, что $|\mathbf{b}_{\varkappa}| = |\mathbf{x}_{\varkappa} - \mathbf{X}_{s,d}|$ для неподвижного пакета \varkappa . Прицельный параметр для движущегося пакета определяется условием

$$|\mathbf{v}_{\varkappa}|\theta_{\varkappa} = \mathbf{n}_{\varkappa}(\mathbf{X}_{s,d} - \mathbf{x}_{\varkappa}), \quad \mathbf{n}_{\varkappa} = \mathbf{v}_{\varkappa}/|\mathbf{v}_{\varkappa}|.$$

Исходя из этого условия и временно предполагая, что $\mathbf{v}_{\varkappa} \neq 0$, построим 4-вектор b_{\varkappa} , компоненты которого равны

$$\begin{aligned} b_{\varkappa}^0 &= (x_{\varkappa}^0 - X_{s,d}^0) - |\mathbf{v}_{\varkappa}|^{-1} \mathbf{n}_{\varkappa}(\mathbf{x}_{\varkappa} - \mathbf{X}_{s,d}), \\ \mathbf{b}_{\varkappa} &= (\mathbf{x}_{\varkappa} - \mathbf{X}_{s,d}) - [\mathbf{n}_{\varkappa}(\mathbf{x}_{\varkappa} - \mathbf{X}_{s,d})] \mathbf{n}_{\varkappa}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Из последнего равенства следует, что

$$\mathbf{n}_{\varkappa} \mathbf{b}_{\varkappa} = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{n}_{\varkappa} \times \mathbf{b}_{\varkappa} = \mathbf{n}_{\varkappa} \times (\mathbf{x}_{\varkappa} - \mathbf{X}_{s,d}), \quad (5.27)$$

откуда получаем

$$|\mathbf{b}_{\varkappa}| = |\mathbf{n}_{\varkappa} \times (\mathbf{x}_{\varkappa} - \mathbf{X}_{s,d})|.$$

Т.о. $|\mathbf{b}_{\varkappa}| = 0$, если вектор скорости \mathbf{v}_{\varkappa} коллинеарен вектору $\mathbf{x}_{\varkappa} - \mathbf{X}_{s,d}$ при любом значении $|\mathbf{x}_{\varkappa} - \mathbf{X}_{s,d}| < \infty$, т.е., если классическая мировая линия центра пакета \varkappa пересекает прицельную точку. Кроме того $b_{\varkappa}^0 = |\mathbf{b}_{\varkappa}| = 0$, если $\mathbf{x}_{\varkappa} - \mathbf{X}_{s,d} = \mathbf{v}_{\varkappa}(x_{\varkappa}^0 - X_{s,d}^0)$. Поскольку 4-вектор $b_{\varkappa} = (b_{\varkappa}^0, \mathbf{b}_{\varkappa})$ (определенный с точностью до знака) является очевидным релятивистским обобщением обычного нерелятивистского прицельного параметра, естественно назвать его прицельным вектором. Учитывая ур. (5.27) получаем:

$$(u_{\varkappa} b_{\varkappa})^2 - b_{\varkappa}^2 = \Gamma_{\varkappa}^2 (b_{\varkappa}^0)^2 - b_{\varkappa}^2 = (\Gamma_{\varkappa}^2 - 1) (b_{\varkappa}^0)^2 + \mathbf{b}_{\varkappa}^2. \quad (5.28)$$

Подставив теперь в ур. (5.22б) b_{\varkappa} вместо $x_{\varkappa} - X_{s,d}$ (величина $\mathfrak{S}_{s,d}$ при этом не изменится) и учитывая ур. (5.28) найдем:

$$\mathfrak{S}_{s,d} = \sum_{\varkappa \in S,D} \sigma_{\varkappa}^2 \left[(\Gamma_{\varkappa}^2 - 1) (b_{\varkappa}^0)^2 + \mathbf{b}_{\varkappa}^2 \right] = \sum_{\varkappa \in S,D} \sigma_{\varkappa}^2 |\mathbf{b}_{\varkappa}^{(\varkappa)}|^2. \quad (5.29)$$

В последнем выражении вклад каждого пакета записан в его собственной системе отсчета, в которой, естественно, $|\mathbf{b}_\kappa^{(\kappa)}| = |\mathbf{x}_\kappa^{(\kappa)} - \mathbf{X}_{s,d}^{(\kappa)}|$; так что, как и следовало ожидать, ур. (5.29) совпадает с ур. (5.22в). Оба равенства в ур. (5.29) остаются справедливыми и в случае, когда некоторые пакеты покоятся в л.с., поскольку, как следует из ур. (5.26),

$$\lim_{v_\kappa \rightarrow 0} \left[(\Gamma_\kappa^2 - 1) (b_\kappa^0)^2 + \mathbf{b}_\kappa^2 \right] = |\mathbf{x}_\kappa - \mathbf{X}_{s,d}|^2. \quad (5.30)$$

Поэтому временное ограничение $v_\kappa \neq 0$, использованное при выводе ур. (5.29) можно снять.

Физический смысл полученного результата вполне прозрачен: взаимодействие in- и out-пакетов не будет подавлено (т.е. величина $\mathfrak{S}_{s,d}$ будет мала), если *все* прицельные параметры малы по сравнению с эффективными размерами пакетов ($\sim 1/\sigma_\kappa$) в их собственных системах отсчета. Если все прицельные параметры $|\mathbf{b}_\kappa^{(\kappa)}|$ одинаковы по порядку величины, то наибольшие вклады в $\mathfrak{S}_{s,d}$ обусловлены пакетами с наибольшими значениями размазок импульсов и имеющими, следовательно, наименьшие эффективные размеры⁷. Если отвлечься от возможного влияния динамики взаимодействия на величину размазок импульсов вторичных пакетов, а также от эффектов фазового объема реакции или распада, то геометрическое подавление амплитуды тем сильнее, чем больше частиц (на практике – вторичных) участвует в процессе. Фактор подавления “неправильных” конфигураций мировых линий пакетов определяется в л.с. как временными, так и пространственными компонентами прицельных 4-векторов b_κ . При этом, вклады нерелятивистских и ультрарелятивистских пакетов в $\mathfrak{S}_{s,d}$ имеют вид

$$\sigma_\kappa^2 \left\{ [(\mathbf{x}_\kappa - \mathbf{X}_{s,d}) - \mathbf{v}_\kappa (x_\kappa^0 - X_{s,d}^0)]^2 + [\mathbf{v}_\kappa (\mathbf{x}_\kappa - \mathbf{X}_{s,d})]^2 + \mathcal{O}(|\mathbf{v}_\kappa|^3) \right\} \quad (|\mathbf{v}_\kappa| \ll 1) \quad (5.31a)$$

и

$$\begin{aligned} & \sigma_\kappa^2 \left\{ \Gamma_\kappa^2 [(x_\kappa^0 - X_{s,d}^0) - \mathbf{n}_\kappa (\mathbf{x}_\kappa - \mathbf{X}_{s,d})]^2 + [\mathbf{n}_\kappa \times (\mathbf{x}_\kappa - \mathbf{X}_{s,d})]^2 \right. \\ & \left. - (x_\kappa^0 - X_{s,d}^0) [(x_\kappa^0 - X_{s,d}^0) - \mathbf{n}_\kappa (\mathbf{x}_\kappa - \mathbf{X}_{s,d})] + \mathcal{O}(\Gamma_\kappa^{-2}) \right\} \quad (\Gamma_\kappa^2 \gg 1) \end{aligned} \quad (5.31b)$$

соответственно. Из ур. (5.31a) видно, что для нерелятивистских пакетов подавление слабо зависит от вектора скорости и временного интервала $x_\kappa^0 - X_{s,d}^0$ и определяется в основном пространственным расстоянием между центром пакета и прицельной точкой. Для ультрарелятивистских пакетов, напротив, подавление сильно зависит от величины и направления скорости, а также от разности времен x_κ^0 и $X_{s,d}^0$. Появление большого фактора Γ_κ^2 в главном слагаемом в ур. (5.31b) связано с лоренцевым сокращением эффективного объема пакета, приводящим к тому, что область его перекрытия с остальными пакетами сильно уменьшается. С этим же связана сильная зависимость от направления вектора скорости: чтобы попасть в маленькую мишень нужно “хорошо прицелиться”.

Из представленного анализа следует, что прицельные точки X_s и X_d характеризуют пространственно-временное положение эффективных областей взаимодействия пакетов в источнике и детекторе. Взаимодействие пакетов тем интенсивнее, чем ближе от этих точек проходят мировые линии их геометрических центров. Конфигурация мировых линий и координаты прицельных точек никак не связаны с динамикой (т.е. с лагранжианом взаимодействия),

⁷При этом становится очевидной физическая несостоятельность понятий точечных частиц (предельно локализованных состояний) и плоских волн (состояний с определенными импульсами) в рамках теории возмущений КТП: первые вообще не могут взаимодействовать (амплитуда обращается в нуль при наличии “точечной частицы” в любом из подсостояний $I_{s,d}$ или $F_{s,d}$), а вторые взаимодействуют на любых расстояниях.

т.к. однозначно задаются координатами и групповыми скоростями асимптотически свободных in- и out-пакетов, а также их эффективными размерами. Но, разумеется, амплитуду процесса $I_s \oplus I_d \rightarrow F_s \oplus F_d$, описываемого макроскопической диаграммой рис. 5.1, можно вычислить только с учетом динамики взаимодействия.

5.1.9 Асимптотические условия

Теперь мы можем, наконец, вернуться к физическим требованиям, сформулированным в начале раздела 5.1.3 и конкретизировать условия, при которых in- и out-пакеты можно считать свободными. Если геометрические факторы подавления не слишком малы (а только такие конфигурации координат и импульсов дают вклад в наблюдаемые величины), то условие того, что эффективные области взаимодействия волновых пакетов в источнике и детекторе макроскопически разделены в пространстве-времени эквивалентно требованию макроскопической разделенности прицельных точек X_s и X_d . Будем считать, что временной и пространственный интервалы $X_d^0 - X_s^0$ и $|\mathbf{X}_d - \mathbf{X}_s|$ велики по сравнению с временными и пространственными интервалами $|x_{\mathcal{X}}^0 - x_{\mathcal{X}'}^0|$ и $|\mathbf{x}_{\mathcal{X}} - \mathbf{x}_{\mathcal{X}'}|$ для $\mathcal{X}, \mathcal{X}' \in S$ и $\mathcal{X}, \mathcal{X}' \in D$, т.е. пакеты из S и D заведомо не перекрываются. Тогда искомые условия для пакетов из S и D должны быть независимы друг от друга. Мы предполагаем, что эффективные размеры пакетов велики по сравнению с характерным радиусом взаимодействия в вершинах диаграммы и поэтому наш анализ проблемы будет основан исключительно на свойствах геометрических факторов подавления $\exp(-\mathfrak{S}_s)$ и $\exp(-\mathfrak{S}_d)$, не зависящих от динамики взаимодействия.

Прежде всего, необходимо потребовать, чтобы были достаточно велики временные интервалы $X_{s,d}^0 - x_a^0$ ($a \in I_{s,d}$) и $x_b^0 - X_{s,d}^0$ ($b \in F_{s,d}$). Они, однако, не могут быть произвольно велики, поскольку пакеты \mathcal{X} остаются стабильными (т.е. не расплываются) в течение времени $|X_{s,d}^0 - x_{\mathcal{X}}^0|$ лишь при условии

$$|X_{s,d}^{0(\mathcal{X})} - x_{\mathcal{X}}^{0(\mathcal{X})}|^2 \ll m_{\mathcal{X}}^2 / \sigma_{\mathcal{X}}^4, \quad \forall \mathcal{X} \in S, D. \quad (5.32)$$

Учитывая, что геометрические факторы подавления не зависят от $X_{s,d}^{0(\mathcal{X})}$ и $x_{\mathcal{X}}^{0(\mathcal{X})}$, допустимо потребовать, чтобы левая часть ур. (5.32) была велика по сравнению с квадратом эффективного размера пакета, т.е.

$$|X_{s,d}^{0(\mathcal{X})} - x_{\mathcal{X}}^{0(\mathcal{X})}|^2 \gg 1 / \sigma_{\mathcal{X}}^2. \quad (5.33)$$

Это требование не противоречит условию стационарности пакета ур. (5.32), поскольку $\sigma_{\mathcal{X}}^2 \ll m_{\mathcal{X}}^2$. Если, кроме того, \mathcal{X} – нестабильная частица, то следует ожидать, что

$$|X_{s,d}^{0(\mathcal{X})} - x_{\mathcal{X}}^{0(\mathcal{X})}| \sim \tau_{\mathcal{X}}, \quad (5.34)$$

где $\tau_{\mathcal{X}}$ – время жизни \mathcal{X} . Условия ур. (5.33) и ур. (5.34) не противоречат друг другу, если $\sigma_{\mathcal{X}}^2 \tau_{\mathcal{X}}^2 \gg 1$, что является одним из условий применимости СРГП, “полный набор” которых был получен в разделе 4.2.7 и имеет вид

$$1 / \tau_{\mathcal{X}}^2 \ll \sigma_{\mathcal{X}}^2 \ll m_{\mathcal{X}} / \tau_{\mathcal{X}} \ll m_{\mathcal{X}}^2. \quad (5.35)$$

Поскольку для всех известных долгоживущих элементарных частиц и атомных ядер $m_{\mathcal{X}}\tau_{\mathcal{X}} \gg 1$, допустимые этими условиями значения параметров $\sigma_{\mathcal{X}}$ могут варьироваться в весьма широких пределах (см. табл. 5).

Итак, релятивистски-инвариантные асимптотические условия для временных параметров $x_{\mathcal{X}}^0$, полностью согласующиеся с условиями применимости приближения СРГП ур. (5.35), имеют вид ур. (5.33), а правильная временная последовательность в л.с. задается неравенствами

$$x_a^0 < X_{s,d}^0 < x_b^0 \quad (a \in I_{s,d}, \quad b \in F_{s,d}). \quad (5.36)$$

Эти неравенства лоренц-инвариантны, если точки $x_{a,b}$ и $X_{s,d}$ разделены времениподобными интервалами. Если же для некоторых \mathcal{X} интервалы $(x_{\mathcal{X}} - X_{s,d})^2$ пространственноподобны, то неравенства ур. (5.36) имеют смысл только в лабораторной системе отсчета, т.к. временная последовательность двух событий, разделенных пространственноподобным интервалом не является лоренц-инвариантным понятием.

5.1.10 Фазовые факторы

Интегралы перекрытия ур. (5.15) не являются трансляционно-инвариантными из за наличия фазовых факторов $\exp[\pm i(q \mp q_{s,d}) X_{s,d}]$. Заметим, однако, что q -зависимый множитель в произведении $\mathbb{V}_s(q)\mathbb{V}_d(q)$ пропорционален трансляционно-инвариантному фазовому фактору

$$\exp[iq(X_s - X_d)] \quad (5.37)$$

В результате (см. следующий раздел) квадрат модуля амплитуды оказывается трансляционно-инвариантным. Как показано в [33], именно фактор ур. (5.37) ответствен за осцилляционное поведение квадратов амплитуды (как функции $X_s - X_d$) при условии, что прицельные точки X_s и X_d макроскопически разделены.

5.1.11 Объемы перекрытия

При анализе измеряемых характеристик (таких, например, как скорость счета нейтринных событий в установке) полезно использовать представление для величин $|\mathbb{V}_s(q)|^2$ и $|\mathbb{V}_d(q)|^2$, несколько отличающиеся от того, которое может быть получено в результате непосредственного применения формулы ур. (5.15). Удобнее возвратиться к определению ур. (5.12) и записать $|\mathbb{V}_{s,d}(q)|^2$ в следующем виде:

$$|\mathbb{V}_{s,d}(q)|^2 = \int dx \int dy \exp[i(q_{s,d} \pm q)(x - y) - \Upsilon_{s,d}(x) - \Upsilon_{s,d}(y)],$$

После замены переменных интегрирования $x = x' + y'/2$ и $y = x' - y'/2$ (с единичным якобианом) последний интеграл можно переписать как

$$|\mathbb{V}_{s,d}(q)|^2 = \int dy' \exp \left[i(q_{s,d} \pm q) y' - \frac{1}{2} \mathfrak{R}_{s,d}^{\mu\nu} y'_\mu y'_\nu \right] \int dx' \exp [-2\Upsilon_{s,d}(x')]. \quad (5.38)$$

Вводя обозначения

$$\delta_{s,d}(K) = \int \frac{dx}{(2\pi)^4} \exp \left(iKx - \frac{1}{2} \mathfrak{R}_{s,d}^{\mu\nu} x_\mu x_\nu \right) = \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} \tilde{\mathfrak{R}}_{s,d}^{\mu\nu} K_\mu K_\nu \right)}{(2\pi)^2 \sqrt{|\mathfrak{R}_{s,d}|}}, \quad (5.39)$$

$$\mathbb{V}_{s,d} = \int dx \prod_{z \in S,D} |\psi_z(\mathbf{p}_z, x_z - x)|^2 = \frac{\pi^2 \exp(-2\mathfrak{E}_{s,d})}{4\sqrt{|\mathfrak{R}_{s,d}|}}, \quad (5.40)$$

представим ур. (5.38) в следующей компактной форме:

$$|\mathbb{V}_{s,d}(q)|^2 = (2\pi)^4 \delta_{s,d}(q \mp q_{s,d}) \mathbb{V}_{s,d}. \quad (5.41)$$

Функции $\delta_s(K)$ и $\delta_d(K)$ конечно не совпадают с использовавшимися ранее функциями $\tilde{\delta}_s(K)$ и $\tilde{\delta}_d(K)$, но имеют тот же самый плосковолновой предел (т.е. $\delta_{s,d}(K) \rightarrow \delta(K)$) и подобные же свойства. Физический смысл и свойства симметрии функций ур. (5.40) очевидны из предыдущего рассмотрения, а их интегральное представление подсказывает, что величины \mathbb{V}_s и \mathbb{V}_d можно трактовать как 4-мерные объемы перекрытия in- и out-пакетов в источнике и детекторе. Из явного вида этих функций следует, что они принимают максимальные значения, $\mathbb{V}_{s,d}^0 = \pi^2 / (4\sqrt{|\mathfrak{R}_{s,d}|})$, когда классические мировые линии пакетов пересекаются в прицельных точках.

5.2 Амплитуда процесса $I_s \oplus I_d \rightarrow F'_s + \ell_\alpha \oplus F'_d + \ell_\beta$

В качестве практически важного приложения формализма рассмотрим класс процессов⁸

$$I_s \oplus I_d \rightarrow F'_s + \ell_\alpha^+ \oplus F'_d + \ell_\beta^-, \quad (5.42)$$

идущих за счет слабого заряженного тока. Здесь I_s, I_d, F'_s и F'_d обозначают совокупности асимптотически свободных волновых пакетов, описывающих состояния адронов, а ℓ_α^+ и ℓ_β^- – пакеты заряженных лептонов ($\alpha, \beta = e, \mu, \tau$). Если $\alpha \neq \beta$, то процесс в ур. (5.42) идет с нарушением лептонных чисел L_α и L_β , что возможно только за счет обмена массивными (дираковскими или майорановскими) нейтрино. В главном неисчезающем порядке по электрослабому взаимодействию процесс в ур. (5.42) описывается суммой диаграмм, показанных на рис. 5.7. Пусть X_s и X_d – прицельные точки, определяемые формулой ур. (5.17) (в которой $F'_s = F'_s + \ell_\alpha^+$ и $F'_d = F'_d + \ell_\beta^-$). Предполагается, что они (а значит и эффективные области взаимодействия в источнике и детекторе, условно отмеченные на рис. 5.7 пунктирными кривыми) макроскопически разделены в пространстве-времени и что выполнены все асимптотические условия, обсуждавшиеся в разделе 5.1.9. Тогда начальные

⁸Отметим, что примеры, показанные на рис. 5.3 и 5.4 (раздел 5.1.2) к этому классу не относятся.

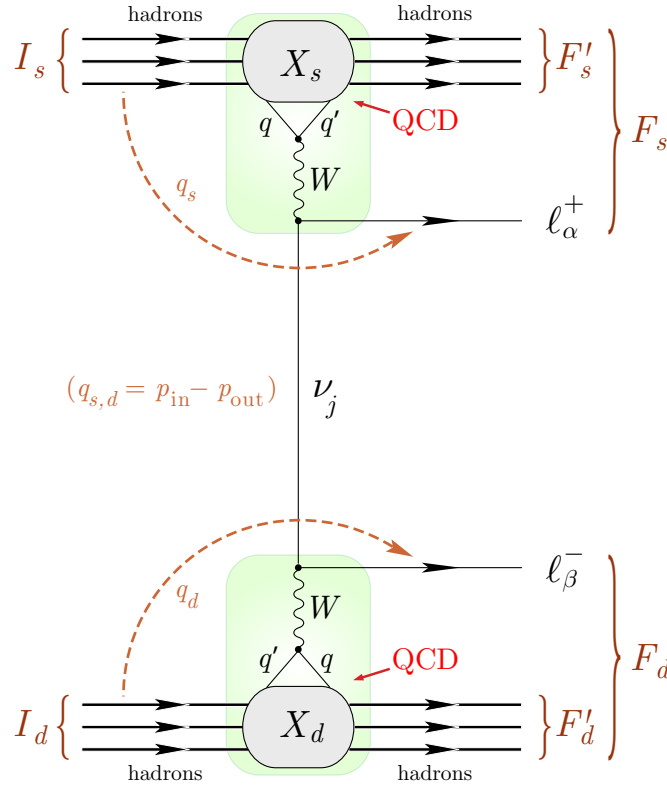


Рисунок 5.7 — Макроскопическая диаграмма, описывающая процесс ур. (5.42).

и конечные состояния можно считать прямыми произведениями свободных однопакетных состояний и использовать нормировку ур. (5.4).

В рамках СМ (минимально расширенной добавлением массовой матрицы нейтрино), кварк-лептонные блоки диаграммы в низшем неисчезающем порядке описываются лагранжианом

$$\mathcal{L}_W(x) = -\frac{g}{2\sqrt{2}} [j_\ell(x)W(x) + j_q(x)W(x) + \text{э.с.}],$$

в котором g – $SU(2)$ константа связи, j_ℓ и j_q – лептонный и кварковый заряженные токи,

$$j_\ell^\mu(x) = \sum_{\alpha i} V_{\alpha i}^* \bar{\nu}_i(x) O^\mu \ell_\alpha(x), \quad j_q^\mu(x) = \sum_{qq'} V_{qq'}^* \bar{q}(x) O^\mu q'(x);$$

$V_{\alpha i}$ ($\alpha = e, \mu, \tau, i = 1, 2, 3$) и $V_{qq'}$ ($q = u, c, t, q' = d, s, b$) – элементы матриц смешивания нейтрино и кварков ($V = V_{\text{PMNS}}$ и $V' = V_{\text{CKM}}$), соответственно; $O^\mu = \gamma^\mu(1 - \gamma_5)$; $\ell_{\alpha, \beta}(x)$ – поля заряженных лептонов, а для остальных полей и γ -матриц Дирака использованы стандартные обозначения. Адронные блоки (закрашенные области на диаграмме 5.7), которые не могут быть рассчитаны по теории возмущений, будут описываться феноменологическими адронными токами. Нормированная безразмерная амплитуда процесса в ур. (5.42)

$$\langle \text{out} | \mathbb{S} | \text{in} \rangle (\langle \text{in} | \text{in} \rangle \langle \text{out} | \text{out} \rangle)^{-1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_{\beta\alpha}$$

дается четвертым порядком теории возмущений по константе g :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\beta\alpha} = & \frac{1}{\mathcal{N}} \left(\frac{-ig}{2\sqrt{2}} \right)^4 \langle F_s \oplus F_d | T \int dx dx' dy dy' : j_\ell(x) W(x) :: j_q(x') W^\dagger(x') : \times \\ & \times : j_\ell^\dagger(y) W^\dagger(y) :: j_q^\dagger(y') W(y') : \mathbb{S}_h | I_s \oplus I_d \rangle. \end{aligned}$$

Здесь

$$\mathbb{S}_h = T \exp \left[i \int dz \mathcal{L}_h(z) \right],$$

а $\mathcal{L}_h(z)$ – лагранжиан сильных и электромагнитных взаимодействий СМ, ответственный за непертурбативные процессы фрагментации и адронизации; T и $:\dots:$ – обычные символы хронологического и нормального упорядочения локальных операторов. Нормировочный множитель \mathcal{N} в приближении СРГП определяется формулой

$$\mathcal{N}^2 = \langle in|in \rangle \langle out|out \rangle = \prod_{\varkappa \in I_s \oplus I_d \oplus F_s \oplus F_d} 2\bar{E}_\varkappa V_\varkappa. \quad (5.43)$$

Адронный матричный элемент

$$\begin{aligned} \langle F'_s \oplus F'_d | T [: j_q^\mu(x) :: j_q^{\dagger\nu}(y) : \mathbb{S}_h] | I_s \oplus I_d \rangle &= \int \left[\prod_a \frac{d\mathbf{k}_a \phi_a(\mathbf{k}_a, \mathbf{p}_a) e^{ik_a x_a}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_a}} \right] \times \\ &\times \int \left[\prod_b \frac{d\mathbf{k}_b \phi_b^*(\mathbf{k}_b, \mathbf{p}_b) e^{-ik_b x_b}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_b}} \right] \langle \{k_b\} | T [: j_q^\mu(x) :: j_q^{\dagger\nu}(y) : \mathbb{S}_h] | \{k_a\} \rangle \end{aligned}$$

для стабильных относительно сильных и электромагнитных взаимодействий начальных и конечных адронов, разнесенных на макроскопическое расстояние между источником и детектором, может быть приведен к виду

$$\begin{aligned} \langle F'_s \oplus F'_d | T [: j_q^\mu(x) :: j_q^{\dagger\nu}(y) : \mathbb{S}_h] | I_s \oplus I_d \rangle &= \Pi'(x, y; \{\mathbf{p}_\varkappa, x_\varkappa\}) \times \\ &\times \mathcal{J}_s^\mu(X_s; \{p_a, p_b\}) \mathcal{J}_d^{\nu*}(X_d; \{p_a, p_b\}), \end{aligned}$$

где

$$\Pi'(x, y; \{\mathbf{p}_\varkappa, x_\varkappa\}) = \left[\prod_{a \in I_s, b \in F'_s} \psi_a(\mathbf{p}_a, x - x_a) \psi_b^*(\mathbf{p}_b, x - x_b) \right] \left[\prod_{a \in I_d, b \in F'_d} \psi_a(\mathbf{p}_a, y - x_a) \psi_b^*(\mathbf{p}_b, y - x_b) \right],$$

\mathcal{J}_s и \mathcal{J}_d – соответствующие адронные токи в источнике и детекторе. Их явный вид для наших целей не потребуется. Доказательство этого утверждения дано в Приложении (А.3).

Введем причинные функции Грина для нейтрино и W -бозона:

$$\begin{aligned} G^j(x - y) &= \langle T [\nu_j(x) \bar{\nu}_j(y)] \rangle_0 = \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \Delta^j(q) e^{-iq(x-y)}, \\ G_{\mu\nu}^W(x - y) &= \langle T [W_\mu(x) W_\nu^\dagger(y)] \rangle_0 = \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \Delta_{\mu\nu}(k) e^{-ik(x-y)}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Здесь

$$\Delta^j(q) = \frac{i}{\hat{q} - m_j + i0} = \frac{i(\hat{q} + m_j)}{q^2 - m_j^2 + i0}, \quad (\hat{q} = q^\mu \gamma_\mu) \quad (5.45)$$

и

$$\Delta_{\mu\nu}(k) = -i \frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / m_W^2}{k^2 - m_W^2 + i0} \quad (5.46)$$

– голые пропагаторы j -го нейтрино (с массой m_j) и W -бозона (с массой m_W), соответственно, причем последний записан в унитарной калибровке. Теперь, после стандартных преобразований, мы приходим к следующему выражению для амплитуды:

$$\mathcal{A}_{\beta\alpha} = \frac{g^4}{64\mathcal{N}} \sum_j V_{\alpha j}^* V_{\beta j} \int dx dx' dy dy' \mathcal{A}^j(x, x', y, y'), \quad (5.47)$$

в котором

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^j(x, x', y, y') &= \mathcal{J}_d^{\nu*} G_{\nu\nu'}^W(y - y') \bar{u}(\mathbf{p}_\beta) O^{\nu'} G^j(y' - x') O^{\mu'} G_{\mu'\mu}^W(x' - x) v(\mathbf{p}_\alpha) \mathcal{J}_s^\mu \times \\ &\times \psi_\alpha^*(\mathbf{p}_\alpha, x' - x_\alpha) \psi_\beta^*(\mathbf{p}_\beta, y' - x_\beta) \Pi'(x, y; \{\mathbf{p}_\varkappa, x_\varkappa\}); \end{aligned}$$

спиновые индексы и аргументы функций \mathcal{J}_s и \mathcal{J}_d не выписаны для краткости. Интегрирование функции $\mathcal{A}^j(x, x', y, y')$ по переменной y' приводит к фактору

$$\begin{aligned} I_{\nu\nu'}^j &= \int dy' \psi_\beta^*(\mathbf{p}_\beta, y' - x_\beta) G_{\nu\nu'}^W(y - y') G^j(y' - x') = \\ &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{-ipx_\beta} \phi_\beta^*(\mathbf{p}, \mathbf{p}_\beta) \int \frac{dk e^{-iky} \Delta_{\nu\nu'}(k)}{(2\pi)^4} \int \frac{dq e^{iqx'} \Delta^j(q)}{(2\pi)^4} \int dy' e^{i(k-q+p)y'} = \\ &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} \phi_\beta^*(\mathbf{p}, \mathbf{p}_\beta) e^{-ip(x_\beta - y)} \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \Delta_{\nu\nu'}(q - p) \Delta^j(q) e^{iq(x' - y)}. \end{aligned}$$

Пользуясь определениями в ур. (5.44) и нашим стандартным приближением, можем переписать этот интеграл в виде:

$$I_{\nu\nu'}^j = \psi_\beta^*(\mathbf{p}_\beta, y - x_\beta) \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \Delta_{\nu\nu'}(q - p_\beta) \Delta^j(q) e^{iq(x' - y)}.$$

Интегрирование по переменной x' проводится совершенно аналогично, приводя к фактору

$$\psi_\beta^*(\mathbf{p}_\beta, y - x_\beta) \psi_\alpha^*(\mathbf{p}_\alpha, x - x_\alpha) \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \Delta_{\nu\nu'}(q - p_\beta) \Delta^j(q) \Delta_{\mu'\mu}(q + p_\alpha) e^{iq(x - y)}$$

в подынтегральном выражении для амплитуды ур. (5.47). Собирая все множители, учитывая определение интегралов перекрытия ур. (5.8) и вводя тензорную функцию

$$\mathbb{G}_{\nu\nu'\mu'\mu}^j(\{\mathbf{p}_\varkappa, x_\varkappa\}) = \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \mathbb{V}_d(q) \mathbb{V}_s(q) \Delta_{\nu\nu'}(q - p_\beta) \Delta^j(q) \Delta_{\mu'\mu}(q + p_\alpha), \quad (5.48)$$

приходим к следующему выражению для амплитуды ур. (5.47):

$$\mathcal{A}_{\beta\alpha} = \frac{g^4}{64\mathcal{N}} \sum_j V_{\beta j} \mathcal{J}_d^{\nu*} \bar{u}(\mathbf{p}_\beta) O^{\nu'} \mathbb{G}_{\nu\nu'\mu'\mu}^j(\{\mathbf{p}_\varkappa, x_\varkappa\}) O^{\mu'} v(\mathbf{p}_\alpha) \mathcal{J}_s^\mu V_{\alpha j}^*. \quad (5.49)$$

5.2.1 Асимптотика амплитуды при больших L

Для наших целей представляет интерес изучить асимптотическое поведение функции ур. (5.48) при большом пространственном расстоянии между прицельными точками \mathbf{X}_s и \mathbf{X}_d . Это можно сделать с помощью теоремы Гримуса-Стокингера (ГС) [29], которая утверждает следующее.

Пусть $\Phi(\mathbf{q})$ – трижды непрерывно дифференцируемая функция, убывающая вместе со своими первой и второй производными не медленнее, чем $|\mathbf{q}|^{-2}$ при $|\mathbf{q}| \rightarrow \infty$. Тогда при $L = |\mathbf{L}| \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$\int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{\Phi(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{L}}}{s - \mathbf{q}^2 + i0} \sim \begin{cases} -\frac{\Phi(\sqrt{s} \mathbf{L}/L)}{4\pi L} \exp(i\sqrt{s}L) + \mathcal{O}(L^{-3/2}) & \text{при } s > 0, \\ \mathcal{O}(L^{-2}) & \text{при } s < 0. \end{cases}$$

Принимая во внимание определение в ур. (5.48) и явный вид интегралов в ур. (5.15) и пропагатора нейтрино в ур. (5.45) видим, что в нашем случае

$$\mathbf{L} = \mathbf{X}_d - \mathbf{X}_s, \quad T = X_d^0 - X_s^0, \quad s = q_0^2 - m_j^2.$$

Функция, соответствующая $\Phi(\mathbf{q})$ в теореме ГС, с точностью до несущественного (независящего от q) множителя имеет вид⁹

$$\tilde{\delta}_s(q - q_s) \tilde{\delta}_d(q + q_d) \Delta_{\nu\nu'}(q - p_\beta)(\hat{q} + m_j) \Delta_{\mu'\mu}(q + p_\alpha). \quad (5.50)$$

Первое требование теоремы может формально нарушаться полюсами голых бозонных пропагаторов ур. (5.46). Чтобы исключить эту возможность, мы будем использовать вместо ур. (5.46) перенормированный (полный) пропагатор, у которого нет сингулярности в резонансной области, для чего достаточно сделать в знаменателе ур. (5.46) стандартную замену $m_W^2 \mapsto m_W^2 - im_W \Gamma_W$, где Γ_W – полная ширина W -бозона¹⁰.

Поскольку при $|\mathbf{q}| \rightarrow \infty$ функции $\tilde{\delta}_s(q - q_s)$ и $\tilde{\delta}_d(q + q_d)$ убывают быстрее любой степени $|\mathbf{q}|^{-1}$, заключаем, что функция ур. (5.50) удовлетворяет условиям теоремы ГС. Поэтому в главном по $1/L$ порядке функция ур. (5.48) ведет себя как

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{\nu\nu'\mu'\mu}^j(\{\mathbf{p}_x, x_x\}) &= \frac{e^{-\mathfrak{S} - i\Theta}}{8\pi^2 L} \int_{-\infty}^{\infty} dq_0 e^{-i(q_0 T - |\mathbf{q}_j| L)} \tilde{\delta}_s(q_j - q_s) \tilde{\delta}_d(q_j + q_d) \times \\ &\times \Delta_{\nu\nu'}(q_j - p_\beta)(\hat{q}_j + m_j) \Delta_{\mu'\mu}(q_j + p_\alpha), \end{aligned} \quad (5.51)$$

где

$$\begin{aligned} q_j &= (q_0, \mathbf{q}_j), \quad \mathbf{q}_j = \sqrt{q_0^2 - m_j^2} \mathbf{l}, \quad \mathbf{l} = \mathbf{L}/L, \\ \mathfrak{S} &= \mathfrak{S}_s + \mathfrak{S}_d \quad \text{и} \quad \Theta = X_s q_s + X_d q_d. \end{aligned}$$

Поскольку факторы $\tilde{\delta}_s(q_j - q_s)$ и $\tilde{\delta}_d(q_j + q_d)$ под знаком интеграла в правой части ур. (5.51) имеют, как функции переменной q_0 , острые, близкие друг к другу максимумы, интеграл насыщается узкой окрестностью этих максимумов и его оценку можно сделать стандартным методом перевала. Ниже все вычисления будут проводиться в рамках модели СРГП.

Поправки к теореме ГС обсуждаются в работе [173].

5.2.2 Интегрирование по q_0

Согласно ур. (5.16)

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_s(q_j - q_s) \tilde{\delta}_d(q_j + q_d) &= \frac{1}{(4\pi)^4 \sqrt{|\mathfrak{R}_s| |\mathfrak{R}_d|}} \exp\left[-\frac{1}{4} F_j(q_0)\right], \\ F_j(q_0) &= \tilde{\mathfrak{R}}_s^{\mu\nu}(q_j - q_s)_\mu (q_j - q_s)_\nu + \tilde{\mathfrak{R}}_d^{\mu\nu}(q_j + q_d)_\mu (q_j + q_d)_\nu. \end{aligned}$$

⁹ Заметим, что слагаемое $\propto m_j$ в выражении ур. (5.50) не дает вклада в амплитуду ур. (5.49) из-за матричных множителей $O^{\mu'}$ и $O^{\nu'}$.

¹⁰ Более аккуратная модификация этого рецепта обсуждается, например, в [171; 172]; см. также ссылки в этих работах.

Вводя обозначения

$$F_0 = \tilde{\mathfrak{K}}_s^{\mu\nu} q_{s\mu} q_{s\nu} + \tilde{\mathfrak{K}}_d^{\mu\nu} q_{d\mu} q_{d\nu}, \quad Y^\mu = \tilde{\mathfrak{K}}_s^{\mu\nu} q_{s\nu} - \tilde{\mathfrak{K}}_d^{\mu\nu} q_{d\nu}, \quad R^{\mu\nu} = \tilde{\mathfrak{K}}_s^{\mu\nu} + \tilde{\mathfrak{K}}_d^{\mu\nu}, \quad (5.52)$$

перепишем выражение для $F_j(q_0)$ в виде

$$F_j(q_0) = F_0 - 2Y_\mu q_j^\mu + R_{\mu\nu} q_j^\mu q_j^\nu. \quad (5.53)$$

Экстремум этой функции определяется уравнением

$$\frac{dF_j(q_0)}{dq_0} = \frac{2}{|\mathbf{q}_j|} [Rq_0|\mathbf{q}_j| - (\mathbf{R}\mathbf{l})(q_0 - |\mathbf{q}_j|)^2 - Y_0|\mathbf{q}_j| + (\mathbf{Y}\mathbf{l})q_0] = 0, \quad (5.54)$$

в котором

$$R = R^{\mu\nu} l_\mu l_\nu = R_{00} - 2(\mathbf{R}\mathbf{l}) + \mathcal{R}, \quad \mathcal{R} = R_{kn} l_k l_n, \quad (5.55)$$

$$\mathbf{R} = (R_{01}, R_{02}, R_{03}), \quad \mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3) \quad \text{и} \quad \mathbf{l} = (1, \mathbf{l}).$$

Здесь, как и всюду далее, предполагается суммирование по повторяющимся латинским индексам ($k, n = 1, 2, 3$). Корень ур. (5.54), $q_0 = E_j$, будет точкой перевала, если вторая производная

$$\frac{d^2 F_j(q_0)}{dq_0^2} = 2R + \frac{2(q_0 - |\mathbf{q}_j|)}{|\mathbf{q}_j|^3} [(\mathbf{R}\mathbf{l})(q_0 + 2|\mathbf{q}_j|)(q_0 - |\mathbf{q}_j|) - (\mathbf{Y}\mathbf{l})(q_0 + |\mathbf{q}_j|)] = \quad (5.56a)$$

$$= 2R + \frac{2}{v_j^3} \left[(\mathbf{R}\mathbf{l})(1 + 2v_j)(1 - v_j)^2 - \frac{(\mathbf{Y}\mathbf{l})}{m_j \Gamma_j^3} \right] \quad (5.56b)$$

(где $v_j = |\mathbf{q}_j|/q_0$ и $\Gamma_j = q_0/m_j$) положительна в этой точке. Рассмотрим два наиболее интересных частных случая, для которых можно получить простые приближенные решения ур. (5.54).

Ультррелятивистский случай

Рассмотрим конфигурации импульсов внешних пакетов, для которых выполняются условия

$$q_s^0 \sim -q_d^0 \sim |\mathbf{q}_s| \sim |\mathbf{q}_d|. \quad (5.57)$$

Этот частный случай реализуется во всех без исключения современных нейтринных экспериментах и поэтому представляет наибольший практический интерес.

В плосковолновом пределе ($\sigma_\varkappa = 0, \forall \varkappa$) и в предположении, что $m_j = 0$ [в дальнейшем будем называть этот специальный случай “ПВ₀-пределом”] точное сохранение энергии-импульса в каждой вершине диаграммы требует выполнения строгих равенств

$$q_s^0 = -q_d^0, \quad \mathbf{q}_s = -\mathbf{q}_d = q_s^0 \mathbf{l}.$$

При этом, согласно ур. (5.52) и ур. (5.55), корень ур. (5.54) равен

$$q_0 = \lim_{\sigma_\varkappa=0, \forall \varkappa} \frac{Y_0 - (\mathbf{Y}\mathbf{l})}{R} = q_s^0 \quad (5.58)$$

и есть ни что иное, как энергия реального безмассового нейтрино ($q_j = E_0 l, q_j^2 = 0$).

В общем случае $\sigma_{\neq} \neq 0$, при выполнении условий ур. (5.57) и при естественном дополнительном предположении, что массы нейтрино m_j малы по сравнению с минимальными абсолютными значениями передач энергии q_s^0 и q_d^0 в вершинах диаграммы¹¹, решение ур. (5.54) может быть найдено в виде ряда по степеням малого безразмерного параметра

$$r_j = \frac{m_j^2}{2E_\nu^2}. \quad (5.59)$$

В определении в ур. (5.59) фигурирует “репрезентативная” энергия виртуального нейтрино¹²

$$E_\nu = \frac{(Yl)}{R}, \quad (5.60)$$

которая совпадает с передачей энергии q_s^0 в ПВ₀-пределе и близка к ней по величине при достаточно малых σ_{\neq} (ниже мы уточним это утверждение). Согласно определению в ур. (5.60), E_ν является вращательно-инвариантной функцией импульсов, масс и дисперсий импульсов всех внешних пакетов. Благодаря приближенному сохранению энергии-импульса, эта величина неотрицательна и преобразуется как нулевая компонента 4-импульса.

Итак, запишем величины q_0 и $|\mathbf{q}_j| = \sqrt{q_0^2 - m_j^2}$ в виде степенных рядов

$$q_0 \equiv E_j = E_\nu \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} C_n^E r_j^n \right), \quad |\mathbf{q}_j| \equiv P_j = E_\nu \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} C_n^P r_j^n \right). \quad (5.61)$$

Удобно переписать ур. (5.54) в следующей форме

$$q_0 |\mathbf{q}_j| - m (q_0 - |\mathbf{q}_j|)^2 - E_\nu [(n+1)|\mathbf{q}_j| - nq_0] = 0, \quad (5.62)$$

где фигурируют безразмерные вращательно-инвариантные функции

$$n = \frac{(Yl)}{(Yl)} \quad \text{и} \quad m = \frac{(Rl)}{R}.$$

Из ур. (5.62) видно, что коэффициенты C_n^E и C_n^P для всех $n \geq 1$ выражаются только через эти две функции. Коэффициенты легко найти с помощью стандартной рекуррентной процедуры, т.е. подстановкой рядов ур. (5.61) в ур. (5.62), разложением получающегося выражения в ряд по параметру r_j и приравниванием нулю множителей при степенях r_j . Выпишем здесь первые три пары:

$$\begin{aligned} C_1^E &= n, \\ C_2^E &= n \left(2n + \frac{3}{2} \right) - m, \end{aligned} \quad (5.63)$$

$$C_3^E = n \left(7n^2 + 9n + \frac{5}{2} \right) - (5n + 2)m;$$

$$C_1^P = n + 1,$$

$$C_2^P = (n + 1) \left(2n + \frac{1}{2} \right) - m, \quad (5.64)$$

$$C_3^P = (n + 1) \left(7n^2 + 5n + \frac{1}{2} \right) - (5n + 3)m.$$

¹¹Подразумевается, что минимум берется по всему множеству наиболее вероятных импульсов \mathbf{p}_{\neq} внешних пакетов в источнике и детекторе, которое определяется условиями конкретного эксперимента.

¹²Здесь ν не лоренцев индекс.

Нетрудно видеть, что коэффициенты удовлетворяют соотношению симметрии

$$C_n^P = (-1)^n C_n^E \Big|_n \mapsto -(n+1).$$

Из ур. (5.62) следует, что это свойство справедливо для всех n . Величины E_j и $\mathbf{p}_j = P_j \mathbf{l}$ естественно интерпретировать как, соответственно, эффективные (или наиболее вероятные) энергию и 3-импульс виртуального массивного нейтрино ν_j . С их помощью можно определить также эффективную скорость нейтрино $\mathbf{v}_j = v_j \mathbf{l} = \mathbf{p}_j / E_j$, для которой находим:

$$v_j = 1 - r_j - \left(2\mathbf{n} + \frac{1}{2}\right) r_j^2 - \left(7\mathbf{n}^2 + 5\mathbf{n} + \frac{1}{2} - 2\mathbf{m}\right) r_j^3 + \mathcal{O}(r_j^4). \quad (5.65)$$

Как и следовало ожидать, $0 < 1 - v_j \ll 1$, т.е. нейтрино ультрарелятивистские. Поскольку, кроме того¹³,

$$R = R^{\mu\nu} l_\mu l_\nu = \mathfrak{F} E_\nu^{-2}, \quad (5.66)$$

где

$$\mathfrak{F} \equiv [R^{\mu\nu} q_\mu q_\nu]_{q=E_\nu l} > 0, \quad (5.67)$$

видим, что вторая производная в ур. (5.56) в точке $q_0 = E_j$ и $r_j \ll 1$ положительна,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 F_j(q_0)}{dq_0^2} \right|_{q_0=E_j} &= 2R \left\{ 1 - 2\mathbf{n}r_j - 3[2\mathbf{n}(\mathbf{n} + 1) - \mathbf{m}] r_j^2 \right. \\ &\quad \left. - [3\mathbf{n}(\mathbf{n} + 1)(8\mathbf{n} + 5) - 2(9\mathbf{n} + 5)\mathbf{m}] r_j^3 + \mathcal{O}(r_j^4) \right\}, \quad (5.68) \end{aligned}$$

и, следовательно, функция $F_j(q_0)$ имеет в этой точке *абсолютный минимум*. Отметим еще раз, что величины E_j , \mathbf{p}_j и \mathbf{v}_j однозначно определяются не только наиболее вероятными импульсами \mathbf{p}_\times внешних пакетов в источнике и детекторе, но также их массами и дисперсиями импульсов.

Частный случай конфигурации внешних импульсов. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим специальную конфигурацию внешних импульсов

$$q_s^0 = -q_d^0 \equiv \mathcal{E} > 0, \quad \mathbf{q}_s = -\mathbf{q}_d \equiv \mathcal{P} \mathbf{l}, \quad \mathcal{P} > 0, \quad (5.69)$$

отвечающую точному сохранению энергии и импульса, “перетекающих” из S в D . Будем называть величину $Q^2 = \mathcal{E}^2 - \mathcal{P}^2$ виртуальностью нейтрино. Ультрарелятивистский случай определяется условиями $|Q^2| \ll \mathcal{E}^2$ и $m_j^2 \ll \mathcal{E}^2$, но виртуальность, конечно, не обязана совпадать с m_j^2 даже по порядку величины. Нетрудно показать, что для конфигурации в ур. (5.69)

$$E_\nu = \mathcal{E} \left[1 + \mathbf{n}_0 \left(1 - \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{E}} \right) \right], \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}_0 - \left(1 - \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{E}} \right) \left(\mathbf{n}_0^2 - \frac{\mathcal{R}}{R} \right) \left[1 + \mathbf{n}_0 \left(1 - \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{E}} \right) \right]^{-1},$$

где

$$\mathbf{n}_0 = \frac{(\mathbf{R} \mathbf{l}) - \mathcal{R}}{R} = \mathbf{m} - \frac{\mathcal{R}}{R}. \quad (5.70)$$

¹³Напомним, что квадратичные формы $\tilde{\mathfrak{X}}_s^{\mu\nu} q_\mu q_\nu$ и $\tilde{\mathfrak{X}}_d^{\mu\nu} q_\mu q_\nu$ положительны для произвольного 4-вектора $q \neq 0$.

Разложив E_ν и \mathbf{n} по малому параметру Q^2/\mathcal{E}^2 , получим:

$$E_\nu = \mathcal{E} \left[1 + n_0 \frac{Q^2}{2\mathcal{E}^2} \left(1 + \frac{Q^2}{2\mathcal{E}^2} + \frac{Q^4}{8\mathcal{E}^4} + \dots \right) \right],$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + (\mathbf{m} - \mathbf{n}_0 - \mathbf{n}_0^2) \frac{Q^2}{2\mathcal{E}^2} \left[1 - (2n_0 - 1) \frac{Q^2}{4\mathcal{E}^2} + (2n_0^2 - 2n_0 + 1) \frac{Q^4}{8\mathcal{E}^4} + \dots \right],$$

где, как обычно, точками обозначены поправки высших порядков. Т.о. $E_\nu \rightarrow \mathcal{E}$ и $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}_0$ при $Q^2 \rightarrow 0$. Переразлагая полученные выше выражения для E_j и P_j по двум малым (независимым) параметрам Q^2/\mathcal{E}^2 и m_j^2/\mathcal{E}^2 найдем:

$$E_j = \mathcal{E} + \frac{Q^2 - m_j^2}{2\mathcal{E}} \left[n_0 \left(1 + \frac{Q^2}{4\mathcal{E}^2} \right) + (4n_0^2 + 3n_0 - 2\mathbf{m}) \frac{m_j^2}{4\mathcal{E}^2} + \dots \right],$$

$$P_j = \mathcal{P} + \frac{Q^2 - m_j^2}{2\mathcal{E}} \left[(n_0 + 1) \left(1 + \frac{Q^2}{4\mathcal{E}^2} \right) + (4n_0^2 + 5n_0 - 2\mathbf{m} + 1) \frac{m_j^2}{4\mathcal{E}^2} + \dots \right].$$

Отсюда видно, в частности, что эффективная энергия (импульс) нейтрино может быть как меньше, так и больше переданной энергии \mathcal{E} (переданного импульса \mathcal{P}); естественно, $E_j = \mathcal{E}$ и $P_j = \mathcal{P}$ при $Q^2 = m_j^2$ (и только в этом случае). Другими словами, даже при точном балансе переданных 4-импульсов в вершинах диаграммы, эффективный 4-импульс виртуального нейтрино (E_j, P_j, \mathbf{l}) вообще говоря не совпадает с $(\mathcal{E}, \mathcal{P}, \mathbf{l})$. Разложение для эффективной скорости нейтрино имеет вид

$$v_j = 1 - \frac{m_j^2}{2\mathcal{E}^2} \left[1 - n_0 \frac{Q^2}{\mathcal{E}^2} + (4n_0 + 1) \frac{m_j^2}{4\mathcal{E}^2} + \dots \right],$$

так что главная поправка к ультрарелятивистскому пределу $v_j = 1$ не зависит от виртуальности нейтрино.

Нерелятивистский случай

Рассмотрим теперь противоположный случай, отвечающий следующей конфигурации внешних импульсов:

$$q_s^0 \sim -q_d^0 \sim m_j \gg |\mathbf{q}_s| \sim |\mathbf{q}_d|. \quad (5.71)$$

Этот случай представляет потенциальный интерес для экспериментов по изучению (пока гипотетических) тяжелых нейтрино. Удобно переписать ур. (5.54) в терминах скорости виртуального нейтрино $v_j = |\mathbf{q}_j|/q_0$:

$$\frac{m_j}{\sqrt{1 - v_j^2}} \left[R - (\mathbf{R}\mathbf{l}) \frac{(1 - v_j)^2}{v_j} \right] = Y_0 - \frac{(\mathbf{Y}\mathbf{l})}{v_j}. \quad (5.72)$$

Введем безразмерный 4-вектор $\varrho_j = (\varrho_j^0, \boldsymbol{\varrho}_j)$ с компонентами

$$\varrho_j^\mu = \frac{1}{\mathcal{R}} \left(R_0^\mu - \frac{1}{m_j} Y^\mu \right). \quad (5.73)$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условий в ур. (5.71), эти компоненты малы по абсолютной величине. В самом деле, подставив в определение в ур. (5.73) выражение для 4-вектора Y , которое в покомпонентной записи имеет вид

$$Y^\mu = \tilde{\mathfrak{X}}_s^{\mu 0} q_s^0 - \tilde{\mathfrak{X}}_d^{\mu 0} q_d^0 + \tilde{\mathfrak{X}}_s^{\mu k} q_s^k - \tilde{\mathfrak{X}}_d^{\mu k} q_d^k,$$

найдем

$$\varrho_j^\mu = \frac{1}{m_j \mathcal{R}} \left[\tilde{\mathfrak{X}}_s^{\mu 0} (m_j - q_s^0) + \tilde{\mathfrak{X}}_d^{\mu 0} (m_j + q_d^0) - \tilde{\mathfrak{X}}_s^{\mu k} q_s^k + \tilde{\mathfrak{X}}_d^{\mu k} q_d^k \right]. \quad (5.74)$$

Поскольку все слагаемые в ур. (5.74) содержат малые множители ($1 - q_s^0/m_j$, q_s^k/m_j , и т.д.), можно заключить, что $|\varrho_{j\mu}| \ll 1$. Учитывая это, будем искать решение уравнения ур. (5.72) в виде двойного степенного ряда

$$v_j = \bar{v}_j \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm}^{(v)} (\varrho_j \mathbf{l})^n \varrho_{j0}^m \right], \quad (5.75)$$

где

$$\bar{v}_j = \frac{(\varrho_j \mathbf{l})}{1 + \varrho_{j0}}.$$

Выпишем первые шесть безразмерных коэффициентных функций $C_{nm}^{(v)}$:

$$\begin{aligned} C_{10}^{(v)} &= -\frac{1}{2} C_{11}^{(v)} = 3C_{12}^{(v)} = \frac{3(\mathbf{R}\mathbf{l})}{2\mathcal{R}}, \\ C_{20}^{(v)} &= \frac{9(\mathbf{R}\mathbf{l})^2}{2\mathcal{R}^2} - \frac{R_{00}}{2\mathcal{R}} + \frac{1}{2}, \\ C_{21}^{(v)} &= -\frac{18(\mathbf{R}\mathbf{l})^2}{\mathcal{R}^2} + \frac{3R_{00}}{2\mathcal{R}} + \frac{3}{2}, \\ C_{30}^{(v)} &= \frac{3(\mathbf{R}\mathbf{l})}{8\mathcal{R}} \left[\frac{45(\mathbf{R}\mathbf{l})^2}{\mathcal{R}^2} - \frac{10R_{00}}{\mathcal{R}} - \frac{23}{3} \right]. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Из ур. (5.75) и ур. (5.76) получаем

$$E_j = m_j + \frac{m_j v_j^2}{2} \left(1 + \frac{3}{4} \delta_j + \dots \right), \quad P_j = m_j v_j \left(1 + \frac{1}{2} \delta_j + \dots \right). \quad (5.77)$$

Здесь функция

$$\delta_j = (\varrho_j \mathbf{l})^2 \left[1 + \frac{3(\mathbf{R}\mathbf{l})}{\mathcal{R}} (\varrho_j \mathbf{l}) - \varrho_{j0} \right]$$

определяет величину главных релятивистских поправок, а точками обозначены поправки высших порядков по $(\varrho_j \mathbf{l})$ и ϱ_{j0} . Как видим, нерелятивистское соотношение между эффективными скоростью, энергией и импульсом остаются справедливыми вплоть до второго порядка по $(\varrho_j \mathbf{l})$ и что релятивистские поправки к E_j и P_j положительны.

Можно показать, что функция \mathcal{R} положительна. Учитывая этот факт нетрудно видеть, что вторая производная в ур. (5.56б) положительна в стационарной точке. Действительно, подставив ур. (5.75) и ур. (5.76) в ур. (5.56б) получим

$$\left. \frac{d^2 F_j(q_0)}{dq_0^2} \right|_{q_0=E_j} = 2R + \frac{2\mathcal{R}}{\bar{v}_j^2} \left[1 - \frac{6(\mathbf{R}\mathbf{l})}{\mathcal{R}} (\varrho_j \mathbf{l}) + \varrho_{j0} + \dots \right] > 0. \quad (5.78)$$

Возникающая здесь особенность при $\bar{v}_j = 0$ не должна вызывать недоумения, поскольку она лишь подтверждает интуитивное ожидание того, что амплитуда процесса с “покоящимся” нейтрино в промежуточном состоянии должна равняться нулю. Тем не менее, этот случай требует более детального изучения условий применимости метода перевала и теоремы ГС. Эти вопросы будут обсуждаться в отдельной работе.

Обратимся к специальному случаю точного баланса передачи энергии-импульса в вершинах макродиаграммы. Будем использовать обозначения ур. (5.69) и, в соответствии с ур. (5.71), примем, что

$$0 \leq \mathcal{E}/m_j - 1 \ll 1 \quad \text{и} \quad 0 \leq \mathcal{P}/m_j \ll 1.$$

Имеем

$$\varrho_j^\mu = \frac{1}{\mathcal{R}} \left[R_k^\mu l_k \frac{\mathcal{P}}{m_j} - R_0^\mu \left(\frac{\mathcal{E}}{m_j} - 1 \right) \right]$$

и, следовательно,

$$\varrho_{j0} = \frac{(\mathbf{R}l)}{\mathcal{R}} \frac{\mathcal{P}}{m_j} - \frac{R_{00}}{\mathcal{R}} \left(\frac{\mathcal{E}}{m_j} - 1 \right), \quad (\varrho_j l) = \frac{\mathcal{P}}{m_j} - \frac{(\mathbf{R}l)}{\mathcal{R}} \left(\frac{\mathcal{E}}{m_j} - 1 \right).$$

Подставив найденные соотношения в ур. (5.75), учитывая ур. (5.76) и переразложив полученное выражение по степеням двух малых независимых параметров \mathcal{P}/m_j и $\mathcal{E}/m_j - 1$, приходим к следующему выражению для эффективной скорости виртуального нейтрино:

$$v_j = \bar{v}_j \left\{ 1 + \frac{(\mathbf{R}l)}{2\mathcal{R}} \frac{\mathcal{P}}{m_j} + \left[\frac{R_{00}}{\mathcal{R}} - \frac{3(\mathbf{R}l)^2}{2\mathcal{R}^2} \right] \left(\frac{\mathcal{E}}{m_j} - 1 \right) + \dots \right\}, \quad \bar{v}_j = (\varrho_j l). \quad (5.79)$$

Из ур. (5.79) находим эффективную энергию и импульс виртуального нейтрино в лидирующем порядке по \mathcal{P}/m_j и $\mathcal{E}/m_j - 1$:

$$E_j \approx m_j + m_j \bar{v}_j^2 / 2, \quad P_j \approx m_j \bar{v}_j.$$

Эти простые формулы полностью отвечают интуитивным ожиданиями лишь при $|\mathcal{E}/m_j - 1| \lesssim \mathcal{P}^2/m_j^2$. В этом (и только в этом) частном случае

$$\bar{v}_j \approx \mathcal{P}/m_j, \quad E_j \approx m_j + \mathcal{P}^2/(2m_j) \quad \text{и} \quad P_j \approx \mathcal{P}.$$

5.2.3 Окончательная формула для амплитуды

Выше было доказано, что как в ультррелятивистском, так и в нерелятивистском случае, функция $F_j(q_0)$ имеет *абсолютный минимум* при $q_0 = E_j$; в окрестности минимума она может быть аппроксимирована параболой:

$$F_j(q_0) \simeq F_j(E_j) + \frac{(q_0 - E_j)^2}{4\mathfrak{D}_j^2}. \quad (5.80)$$

Здесь введена положительно определенная функция

$$\frac{1}{\mathfrak{D}_j} = \sqrt{[2d^2 F_j(q_0)/dq_0^2]_{q_0=E_j}}, \quad (5.81)$$

которую, как мы увидим ниже, можно интерпретировать как неопределенность эффективной энергии виртуального нейтрино. В ультрарелятивистском случае, рассмотрением которого мы ограничимся в дальнейшем,

$$\mathfrak{D}_j = \frac{1 + nr_j + \mathcal{O}(r_j^2)}{2\sqrt{R}} \simeq \frac{\mathfrak{D}}{v_j} \simeq \mathfrak{D}, \quad \mathfrak{D} = \frac{1}{2\sqrt{R}} = \frac{E_\nu}{2\sqrt{\mathfrak{F}}}. \quad (5.82)$$

В рамках сделанных нами приближений, функцию \mathfrak{D}_j можно с большой точностью считать не зависящей от j , т.е. универсальной для всех нейтрино ν_j , поскольку $r_j \ll 1$, а функция \mathfrak{D} сама по себе мала по сравнению с энергиями нейтрино, доступными в современных экспериментах. Примем теперь во внимание, что в окрестности стационарной точки E_j все множители подынтегрального выражения в правой части ур. (5.51), за исключением экспоненты

$$\exp \left[-\frac{1}{4}F_j(q_0) - i \left(q_0 T - \sqrt{q_0^2 - m_j^2} L \right) \right],$$

являются слабо меняющимися функциями переменной интегрирования q_0 и могут быть поэтому вынесены из под интеграла в точке $q_0 = E_j$. Используя ур. (5.80) и разложение

$$\sqrt{q_0^2 - m_j^2} = P_j + \frac{1}{v_j}(q_0 - E_j) - \frac{m_j^2}{2P_j^3}(q_0 - E_j)^2 + \dots$$

мы приходим к следующему простому интегралу:

$$I_j = \int_{-\infty}^{\infty} dq_0 \exp \left[-i(E_j T - P_j L) + i \left(\frac{L}{v_j} - T \right) (q_0 - E_j) - \frac{1}{4}F_j(E_j) - \left(\frac{1}{4\mathfrak{D}_j^2} + \frac{im_j^2 L}{2P_j^3} \right) (q_0 - E_j)^2 \right].$$

Вводя комплекснозначную фазовую функцию

$$\Omega_j(T, L) = i(E_j T - P_j L) + \tilde{\mathfrak{D}}_j^2 \left(\frac{L}{v_j} - T \right)^2, \quad (5.83)$$

в которой

$$\tilde{\mathfrak{D}}_j^2 = \frac{\mathfrak{D}_j^2}{1 + i\mathfrak{r}_j} \simeq \frac{\mathfrak{D}^2}{1 + i\mathfrak{r}_j}, \quad \mathfrak{r}_j = \frac{2m_j^2 \mathfrak{D}_j^2 L}{P_j^3} \simeq \frac{2m_j^2 \mathfrak{D}^2 L}{E_\nu^3} = L/\tau_{Lj}, \quad (5.84)$$

где $\tau_{j,L}$ оказывается в точности такой же как в квантовомеханическом случае в ур. (3.88), получаем:

$$I_j = 2\sqrt{\pi} \tilde{\mathfrak{D}}_j \exp \left[-\frac{1}{4}F_j(E_j) - \Omega_j(T, L) \right].$$

Комплексная “дисперсия” $\tilde{\mathfrak{D}}_j$ зависит от эффективной энергии нейтрино и от пространственного расстояния L между прицельными точками в источнике и детекторе; ее модуль и аргумент даются следующими формулами:

$$|\tilde{\mathfrak{D}}_j| \simeq \mathfrak{D} (1 + \mathfrak{r}_j^2)^{-1/4}, \quad \arg(\tilde{\mathfrak{D}}_j) \simeq \frac{1}{2} \arctan(\mathfrak{r}_j).$$

Собрав все множители, мы получаем следующее окончательное выражение для функции в ур. (5.51):

$$\mathbb{G}_{\nu\nu'\mu'\mu}^j(\{\mathbf{p}_\alpha, x_\alpha\}) = \Delta_{\nu\nu'}(p_j - p_\beta) \hat{p}_j \Delta_{\mu'\mu}(p_j + p_\alpha) |\mathbb{V}_d(p_j) \mathbb{V}_s(p_j)| \frac{\tilde{\mathfrak{D}}_j e^{-\Omega_j - i\theta}}{i4\pi^{3/2} L}. \quad (5.85)$$

Здесь введен 4-вектор $p_j = (E_j, P_j \mathbf{l})$ и опущен вклад, пропорциональный m_j (см. примечание 9). Фазовый фактор $-ie^{-i\Theta}$ в ур. (5.85) несуществен, поскольку он исчезает в квадрате модуля амплитуды.

Благодаря наличию “размазанных” δ -функций $\tilde{\delta}_s(p_j - q_s)$ и $\tilde{\delta}_d(p_j + q_d)$, входящих в выражения для интегралов перекрытия $\mathbb{V}_s(p_j)$ и $\mathbb{V}_d(p_j)$ и ответственных за приближенное сохранение энергии-импульса ($p_j \approx q_s \approx -q_d$), а также предполагаемой малости масс нейтрино по сравнению с репрезентативной энергией E_ν , мы можем положить $m_j = 0$ во всем предэкспоненциальном факторе в правой части ур. (5.85). Применим теперь тождество

$$P_- \hat{p}_\nu P_+ = P_- u_-(\mathbf{p}_\nu) \bar{u}_-(\mathbf{p}_\nu) P_+$$

(в котором $P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$, $\mathbf{p}_\nu = E_\nu \mathbf{l}$, и $u_-(\mathbf{p}_\nu)$ – обычный дираковский биспинор для свободного безмассового лево-спирального нейтрино ν) и определим с его помощью матричные элементы

$$\begin{aligned} M_s &= \frac{g^2}{8} \bar{u}_-(\mathbf{p}_\nu) \mathcal{J}_s^\mu \Delta_{\mu\mu'}(p_\nu + p_\alpha) O^{\mu'} u(\mathbf{p}_\alpha), \\ M_d^* &= \frac{g^2}{8} \bar{v}(\mathbf{p}_\beta) O^{\mu'} \Delta_{\mu'\mu}(p_\nu - p_\beta) \mathcal{J}_d^{*\mu} u_-(\mathbf{p}_\nu), \end{aligned} \quad (5.86)$$

описывающие рождение и поглощение *реального* безмассового нейтрино в реакциях $I_s \rightarrow F'_s \ell_\alpha^{+\nu}$ и $\nu I_d \rightarrow F'_d \ell_\beta^-$ соответственно¹⁴. Тогда, с учетом вышеприведенных результатов, мы получаем окончательное выражение для амплитуды в ур. (5.49):

$$\mathcal{A}_{\beta\alpha} = \sum_j \mathcal{A}_{\beta\alpha}^j, \quad \mathcal{A}_{\beta\alpha}^j = \frac{|\mathbb{V}_s(p_j) \mathbb{V}_d(p_j)| M_s M_d^*}{i 4\pi^{3/2} \mathcal{N} L} V_{\alpha j}^* \tilde{\mathcal{D}}_j V_{\beta j} e^{-\Omega_j - i\Theta}. \quad (5.87)$$

Полезно выделить в этой формуле независящий от j общий множитель, ответственный за приближенное сохранение энергии-импульса в вершинах. Для этого, используя ур. (5.16) и определения в ур. (5.52), запишем

$$\tilde{\delta}_s(p_j - q_s) \tilde{\delta}_d(p_j + q_d) = \tilde{\delta}_s(p_\nu - q_s) \tilde{\delta}_d(p_\nu + q_d) e^{-\Theta_j},$$

где

$$\begin{aligned} \Theta_j &= \frac{1}{4} \left[2 \left(Y_\mu - R_{\mu\mu'} p_\nu^{\mu'} \right) + R_{\mu\mu'} (p_\nu - p_j)^{\mu'} \right] (p_\nu - p_j)^\mu = \\ &= \frac{1}{2} \{ E_\nu [(\mathbf{R}\mathbf{l}) - R_{00}] + Y_0 \} (E_\nu - E_j) + \frac{1}{2} \{ E_\nu [(\mathbf{R}\mathbf{l}) - \mathcal{R}] - (\mathbf{Y}\mathbf{l}) \} (E_\nu - P_j) + \\ &+ \frac{1}{4} [R_{00} (E_\nu - E_j)^2 - 2(\mathbf{R}\mathbf{l}) (E_\nu - E_j) (E_\nu - P_j) + \mathcal{R} (E_\nu - P_j)^2]. \end{aligned}$$

¹⁴При дополнительных условиях $|(p_\nu + p_\alpha)^2| \ll m_W^2$ и $|(p_\nu - p_\beta)^2| \ll m_W^2$, пропагатор W -бозона можно приближенно записать как $-ig_{\mu\nu}/m_W^2$, что соответствует четырехфермионной теории слабого взаимодействия. Тогда, воспользовавшись известным тождеством $SM g^2/8 = G_F m_W^2/\sqrt{2}$, можно переписать матричные элементы ур. (5.86) в виде

$$M_s \approx -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_-(\mathbf{p}_\nu) \mathcal{J}_s^\mu O_\mu v(\mathbf{p}_\alpha), \quad M_d^* \approx -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{v}(\mathbf{p}_\beta) \mathcal{J}_d^{*\mu} O_\mu u_-(\mathbf{p}_\nu).$$

Однако это несколько ограничительное упрощение (неприменимое, в частности, при сверхвысоких энергиях) не является необходимым и не будет использоваться в дальнейшем анализе.

Тогда амплитуду ур. (5.87) можно представить в следующем виде:

$$\mathcal{A}_{\beta\alpha} = \frac{|\mathbb{V}_s(p_\nu)\mathbb{V}_d(p_\nu)|M_sM_d^*}{i4\pi^{3/2}\mathcal{N}L} \sum_j V_{\alpha j}^* \tilde{\mathcal{D}}_j V_{\beta j} e^{-\Omega_j - \Theta_j - i\theta}. \quad (5.88)$$

Используя ур. (5.61) можно представить функцию Θ_j в виде разложения по r_j :

$$\Theta_j = m_j^2 R \left[(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n}) + \frac{1}{2} (\mathbf{m} - \mathbf{n} - \mathbf{n}^2) r_j + \left(\mathbf{n} + \frac{1}{2} \right) (\mathbf{m} - \mathbf{n} - \mathbf{n}^2) r_j^2 + \mathcal{O}(r_j^3) \right].$$

Напомним, что функция \mathbf{n}_0 определяется согласно ур. (5.70) и совпадает с \mathbf{n} в случае точного сохранения энергии-импульса в вершинах (см. раздел 5.2.2). При выполнении

$$|\mathbf{n}|r_j \ll 1 \quad \text{и} \quad |\mathbf{m}|r_j \ll |\mathbf{n}|, \quad \forall j, \quad (5.89)$$

можно написать приближенно:

$$\Theta_j \approx m_j^2 R \left[(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n}) + \frac{1}{2} (\mathbf{m} - \mathbf{n} - \mathbf{n}^2) r_j \right],$$

а в окрестности максимума произведения $\tilde{\delta}_s(p_\nu - q_s)\tilde{\delta}_d(p_\nu + q_d)$ (т.е. при $q_s \approx -q_d \approx p_\nu$) можно пренебречь и закононеопределенной разностью $\mathbf{n}_0 - \mathbf{n}$. Тогда

$$\Theta_j \approx \frac{m_j^4 R (\mathbf{m} - \mathbf{n}_0 - \mathbf{n}_0^2)}{4E_\nu^2} = \frac{m_j^4 [R_{00}\mathcal{R} - (\mathbf{R}\mathbf{l})^2]}{4RE_\nu^2}. \quad (5.90)$$

Можно доказать, что эта величина положительна.

Из вывода формулы ур. (5.88) и ее структуры видно, что она справедлива не только для рассмотренного класса процессов, но, при соответствующем переопределении матричных элементов ур. (5.86), и для любых других процессов, идущих за счет обмена виртуальными нейтрино между вершинами макродиаграммы. Нетрудно обобщить формулу в ур. (5.87) и на случай реакций с обменом антинейтрино, для чего следует сделать в ней замену $\mathbf{V} \mapsto \mathbf{V}^\dagger$ (т.е., $V_{\alpha j}^* \mapsto V_{\alpha j}$, $V_{\beta j} \mapsto V_{\beta j}^*$) и должным образом модифицировать матричные элементы в ур. (5.86).

5.2.4 Эффективный волновой пакет ультрарелятивистского нейтрино

Вернемся к выражению в ур. (5.87). Входящая в него фазовая функция, даваемая ур. (5.83), может быть тождественно переписана в приближенно¹⁵ лоренц-инвариантной форме:

$$\Omega_j(T, L) = i(p_j X) + \frac{\tilde{\mathcal{D}}_j^2}{E_\nu^2} [(p_j X)^2 - m_j^2 X^2], \quad (5.91)$$

где $X = X_d - X_s$. Очевидно $(p_j X)^2 - m_j^2 X^2 = 0$ при $\mathbf{L} = \mathbf{v}_j T$. Понятно, однако, что при невырожденном спектре масс нейтрино, величины $(p_j X)^2 - m_j^2 X^2$ не могут обращаться в нуль сразу

¹⁵Функция $\tilde{\mathcal{D}}_j^2/E_\nu^2$ инвариантна с точностью до поправок $\mathcal{O}(v_j)$.

при всех значениях j . Отношение $L/T = |\mathbf{X}|/X_0$ задается пространственно-временными конфигурациями и скоростями внешних волновых пакетов. Оно не связано с эффективными скоростями виртуальных нейтрино. Поэтому L/T нельзя интерпретировать как некоторую среднюю скорость нейтрино. Итак, при фиксированных значениях j и T вектор $\delta\mathbf{x} = \mathbf{L} - \mathbf{v}_j T$ вообще говоря отличен от нуля, но коллинеарен вектору скорости $\mathbf{v}_j = v_j \mathbf{l}$.

Вычисленная амплитуда в ур. (5.87) позволяет найти волновую функцию виртуального нейтрино. Для этого можно провести вычисления, аналогичные вычислению амплитуды перехода в квантовомеханическом случае (см. ур. (3.102)). Найдем амплитуду перехода из состояния волнового пакета ν_j , заданного средним значением импульса \mathbf{p}_j , дисперсией импульса σ_{sj} и 4-координатой X_s , в состояние волнового пакета ν_j , заданного средним значением импульса \mathbf{p}_j , дисперсией импульса σ_{dj} и 4-координатой X_d , пренебрегая расплыванием волнового пакета в конфигурационном пространстве, т.е. работая в режиме СРГП приближения:

$$\frac{\langle \mathbf{p}_j, X_d; \sigma_{dj} | \mathbf{p}_j, X_s; \sigma_{sj} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{p}_j, X_d; \sigma_{dj} | \mathbf{p}_j, X_d; \sigma_{dj} \rangle \langle \mathbf{p}_j, X_s; \sigma_{sj} | \mathbf{p}_j, X_s; \sigma_{sj} \rangle}} = \left(\frac{2\sigma_{sj}\sigma_{dj}}{\sigma_{sj}^2 + \sigma_{dj}^2} \right)^{3/2} \psi(\mathbf{p}_j, X_d - X_s, \sigma_j), \quad (5.92)$$

где

$$\frac{1}{\sigma_j^2} = \frac{1}{\sigma_{sj}^2} + \frac{1}{\sigma_{dj}^2}. \quad (5.93)$$

В итоге, мы получили выражение, пропорциональное функции $\psi(\mathbf{p}, x)$ в СРГП приближении, которое следует сравнить с $e^{-\Omega_j(T, L)}$, где $\Omega_j(T, L)$ дается ур. (5.91). В результате такого сравнения получаем $\sigma_j = \mathfrak{D}_j / \Gamma_j$. Соответственно, \mathfrak{D}_j – эффективная неопределенность энергии нейтрино с учетом взаимодействий в источнике и детекторе, которую следует сравнить с σ_p , определенной согласно ур. (3.104), а \mathfrak{D}_j / E_ν – безразмерная неопределенность энергии, аналог $\sigma_{\text{rel}} = \sigma_p / p$. Поскольку, σ_{sj} и σ_{dj} – дисперсии нейтринного волнового пакета в источнике и детекторе, соответственно, то легко найти их явный вид, переписав первую формулу в ур. (5.55) в виде

$$R = \sigma_{xs}^2 + \sigma_{xd}^2, \quad (5.94)$$

где $\sigma_{xs}^2 = \tilde{\mathfrak{K}}_s^{\mu\nu} l_\mu l_\nu$, $\sigma_{xd}^2 = \tilde{\mathfrak{K}}_d^{\mu\nu} l_\mu l_\nu$. Нетрудно понять физический смысл σ_{xs} и σ_{xd} как соответствующих пространственных дисперсий волнового пакета нейтрино в источнике и детекторе, которые связаны с импульсными дисперсиями стандартными для гауссова пакета соотношениями:

$$\frac{1}{\sigma_{sj}^2} = 4\sigma_{xs}^2 = 4\tilde{\mathfrak{K}}_s^{\mu\nu} l_\mu l_\nu, \quad \frac{1}{\sigma_{dj}^2} = 4\sigma_{xd}^2 = 4\tilde{\mathfrak{K}}_d^{\mu\nu} l_\mu l_\nu. \quad (5.95)$$

Действительно, прямая подстановка σ_{sj} и σ_{dj} , определенных в ур. (5.95) в ур. (5.93) для вычисления амплитуды в ур. (5.92) дает с точностью до безразмерного множителя порядка единицы $e^{-\Omega_j(T, L)}$ с \mathfrak{D}_j , определенной согласно ур. (5.81). Учет расплывания волнового пакета приводит к замене $\mathfrak{D}_j \rightarrow \tilde{\mathfrak{D}}_j$, не изменяя полученных соотношений для σ_{sj} и σ_{dj} .

5.3 Микроскопическая вероятность макроскопически разнесенных событий

Теперь, с помощью ур. (5.87) и формул для четырехмерных объемов перекрытия $V_{s,d}$, введенных в разделе 5.1.11, мы получаем выражение для микроскопической вероятности процесса ур. (5.42)

$$|\mathcal{A}_{\beta\alpha}|^2 = \frac{(2\pi)^4 \delta_s(p_\nu - q_s) V_s |M_s|^2}{\prod_{\kappa \in S} 2E_\kappa V_\kappa} \frac{(2\pi)^4 \delta_d(p_\nu + q_d) V_d |M_d|^2}{\prod_{\kappa \in D} 2E_\kappa V_\kappa} \frac{1}{2(2\pi)^3 L^2} \left| \sum_j \tilde{\mathfrak{D}}_j V_{\alpha j}^* V_{\beta j} e^{-\Omega_j - \Theta_j} \right|^2. \quad (5.96)$$

Это выражение зависит от координат x_κ и средних импульсов p_κ всех участвующих в реакции волновых пакетов, а также от параметров σ_κ . Вероятность ур. (5.96) исчезающе мала, если мало произведение объемов перекрытия

$$V_s V_d = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 (|\mathfrak{R}_s| |\mathfrak{R}_d|)^{-1/2} \exp[-2(\mathfrak{S}_s + \mathfrak{S}_d)],$$

т.е., если in- и out-пакеты в источнике и детекторе не пересекаются в пространственно-временных областях, окружающих прицельные точки X_s и X_d .

Отметим, что и 4-вектор p_ν является функцией p_κ и σ_κ , причем $p_\nu = q_s = -q_d$ в пределе $\sigma_\kappa = 0, \forall \kappa$. Поэтому при достаточно малых σ_κ

$$\delta_s(p_\nu - q_s) \delta_d(p_\nu + q_d) \approx \delta_s(0) \delta_d(0) = (2\pi)^{-4} (|\mathfrak{R}_s| |\mathfrak{R}_d|)^{-1/2}.$$

Чем же определяется приближенное равенство q_s и q_d ? Для ответа на этот вопрос преобразуем выражение ур. (5.96) способом, предложенным Кардаллом [30]. Используя явный вид функций $\delta_{s,d}$ и \mathfrak{D} , нетрудно вывести следующее приближенное соотношение¹⁶

$$\sqrt{2\pi} \mathfrak{D} \delta_s(p_\nu - q_s) \delta_d(p_\nu + q_d) F(p_\nu) = \int dE'_\nu \delta_s(p'_\nu - q_s) \delta_d(p'_\nu + q_d) F(p'_\nu),$$

в котором $F(p_\nu)$ – произвольная медленно меняющаяся функция p_ν , а $p'_\nu = (E'_\nu, \mathbf{p}'_\nu) = E'_\nu l$. С помощью этого соотношения получаем

$$|\mathcal{A}_{\beta\alpha}|^2 = \int dE_\nu \frac{(2\pi)^4 \delta_s(p_\nu - q_s) V_s |M_s|^2}{\prod_{\kappa \in S} 2E_\kappa V_\kappa} \frac{(2\pi)^4 \delta_d(p_\nu + q_d) V_d |M_d|^2}{\prod_{\kappa \in D} 2E_\kappa V_\kappa} \times \frac{\mathfrak{D}}{2\sqrt{2\pi}(2\pi)^3 L^2} \left| \sum_j V_{\alpha j}^* V_{\beta j} e^{-\Omega_j - \Theta_j} \frac{1}{1 + i\tau_j} \right|^2, \quad (5.97)$$

где штрих у “немой” переменной интегрирования E_ν опущен, но теперь она (как и вектор $\mathbf{p}_\nu = E_\nu l$) уже никак не связана с параметрами внешних пакетов. В рамках сделанных приближений формулы ур. (5.96) и ур. (5.97) эквивалентны, но из ур. (5.97) видно, что закон сохранения энергии-импульса регулируется подынтегральными факторами $\delta_s(p_\nu - q_s)$ и $\delta_d(p_\nu + q_d)$, которые, при достаточно малых σ_κ , можно заменить обычными δ -функциями.

¹⁶Это соотношение справедливо с той же точностью, с какой была получена формула ур. (5.87) для амплитуды, а именно, – с точностью использованного при выводе метода перевала.

5.3.1 Макроскопическое усреднение

В большинстве современных нейтринных экспериментов информация о координатах частиц в источнике, а чаще всего и в детекторе, недоступна или не используется при обработке данных. Более того, измеряются, как правило, лишь импульсы вторичных частиц в детекторе. Поэтому для экспериментаторов представляет интерес вероятность ур. (5.97), усредненная по всем неизмеряемым переменным. Такое усреднение можно выполнить лишь с помощью некоторой математической модели реального эксперимента. Здесь мы будем использовать простую, но достаточно реалистичную модель, в которой предполагается, что распределения волновых пакетов in-частиц по средним импульсам, проекциям спинов и координатам в источнике и детекторе можно описать одночастичными функциями распределения $f_a(\mathbf{p}_a, s_a, x_a)$, нормированными согласно условию

$$\sum_{s_a} \int \frac{d\mathbf{x}_a d\mathbf{p}_a}{(2\pi)^3} f_a(\mathbf{p}_a, s_a, x_a) = n_a(x_a^0) \quad (a \in I_{s,d}),$$

где $n_a(x_a^0)$ – полное число частиц a в момент времени x_a^0 . Очевидны также соотношения для плотности числа частиц a в импульсном и конфигурационном пространствах:

$$\int \frac{d\mathbf{p}_a}{(2\pi)^3} f_a(\mathbf{p}_a, s_a, x_a) = \frac{dn_a(s_a, \mathbf{x}_a, x_a^0)}{d\mathbf{x}_a}, \quad \int d\mathbf{x}_a f_a(\mathbf{p}_a, s_a, x_a) = \frac{dn_a(s_a, \mathbf{p}_a, x_a^0)}{d\mathbf{p}_a}. \quad (5.98)$$

Предположим для определенности, что функции распределения f_a в \mathcal{S} и \mathcal{D} слабо зависят от времени в течение эксперимента и заменим их в дальнейшем “прямоугольными” зависимостями вида

$$\begin{aligned} f_a(\mathbf{p}_a, s_a; x) &= \theta(x^0 - x_1^0) \theta(x_2^0 - x^0) \bar{f}_a(\mathbf{p}_a, s_a; \mathbf{x}) \quad \text{для } a \in I_s, \\ f_a(\mathbf{p}_a, s_a; y) &= \theta(y^0 - y_1^0) \theta(y_2^0 - y^0) \bar{f}_a(\mathbf{p}_a, s_a; \mathbf{y}) \quad \text{для } a \in I_d. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Периоды стационарности $\tau_s = x_2^0 - x_1^0$ и $\tau_d = y_2^0 - y_1^0$ могут быть очень велики (как в экспериментах с солнечными и атмосферными нейтрино, в которых, понятно, $\tau_s \gg \tau_d$) или очень малы (как в экспериментах с импульсными пучками от ускорителя, в которых, обычно, $\tau_s \lesssim \tau_d$). В любом случае модель в ур. (5.99) предполагает, что интервалы времени “включения” и времени “выключения” источника (детектора) пренебрежимо малы по сравнению с τ_s (τ_d).

Мы можем теперь уточнить (а вернее – переопределить) термины “источник” и “детектор”, использовавшиеся при расчёте амплитуды для обозначения блоков макроскопической диаграммы. В дальнейшем мы будем называть “источником” и “детектором” носители \mathcal{S} и \mathcal{D} произведений функций распределения по пространственно-временным переменным (т.е., $\mathcal{S} = \text{supp}_{\{x_a\}} \prod_a f_a$, $a \in I_s$ и аналогично для \mathcal{D}), которые будем считать ограниченными и непересекающимися. Будем полагать, что характерные пространственные размеры \mathcal{S} и \mathcal{D} малы по сравнению с расстоянием между ними, но очень велики по сравнению с эффективными размерами всех движущихся в них волновых пакетов. Для определённости предположим, что в нашем эксперименте подлежат измерению только средние импульсы вторичных частиц в \mathcal{D} , причем (благодаря большому расстоянию между \mathcal{S} и \mathcal{D}) можно пренебречь фоном от вторичных частиц, попадающих в \mathcal{D} из \mathcal{S} . В этих предположениях макроскопически усредненная по конечным состояниям и проинтегрированная

по начальным вероятностям процесса ур. (5.42) – есть число событий $dN_{\alpha\beta}$. Это число отвечает следующим процессам в источнике \mathcal{S} и детекторе \mathcal{D} . В источнике, взаимодействие начальных частиц $a \in I_s$ приводит к рождению заряженного лептона ℓ_α^+ , набора частиц $b \in F_s$ в конечном состоянии и нейтрино. В детекторе, взаимодействие нейтрино с набором начальных частиц $a \in I_d$ приводит к рождению лептона ℓ_β^- и частиц $b \in F_d$ в конечном состоянии.

$$\begin{aligned} \langle\langle |\mathcal{A}_{\beta\alpha}|^2 \rangle\rangle \equiv dN_{\alpha\beta} &= \sum_{\text{spins}} \int \prod_{a \in I_s} \frac{d\mathbf{x}_a d\mathbf{p}_a f_a(\mathbf{p}_a, s_a, x_a)}{(2\pi)^3 2E_a V_a} \int \prod_{b \in F_s} \frac{d\mathbf{x}_b d\mathbf{p}_b}{(2\pi)^3 2E_b V_b} V_s \\ &\times \int \prod_{a \in I_d} \frac{d\mathbf{x}_a d\mathbf{p}_a f_a(\mathbf{p}_a, s_a, x_a)}{(2\pi)^3 2E_a V_a} \int \prod_{b \in F_d} \frac{d\mathbf{x}_b d\mathbf{p}_b}{(2\pi)^3 2E_b V_b} V_d \\ &\times \int dE_\nu (2\pi)^4 \delta_s(p_\nu - q_s) |M_s|^2 (2\pi)^4 \delta_d(p_\nu + q_d) |M_d|^2 \\ &\times \frac{\mathfrak{D}}{2\sqrt{2\pi}(2\pi)^3 L^2} \left| \sum_j V_{\alpha j}^* V_{\beta j} e^{-\Omega_j} \frac{1}{1 + i\tau_j} \right|^2. \end{aligned} \quad (5.100)$$

Здесь и далее символ \sum_{spins} обозначает усреднение по спинам всех in-частиц и суммирование по спинам всех out-частиц в \mathcal{S} и \mathcal{D} . Для простоты мы рассматриваем “идеальный” эксперимент, эффективность регистрации в котором равна 1, хотя формализм легко позволяет учесть реальные эффективность и акцептанс детектора, а также триггерные условия и критерии отбора событий, умножением на соответствующие эффективности.

Интегрирование по координатам пакетов в ур. (5.100) можно выполнить в явном виде, если воспользоваться интегральным представлением в ур. (5.8) для объёмов перекрытия $V_{s,d}$ и учесть, что функции распределения f_a в \mathcal{S} и \mathcal{D} , равно как и фактор $e^{-\Omega_j - \Omega_i^*}/L^2$, заметно меняются во времени и пространстве лишь на макроскопических масштабах, тогда как подынтегральные факторы в V_s и V_d существенно отличны от нуля лишь в малой окрестности соответствующей переменной интегрирования. Вспомнив теперь определение эффективного объёма пакета, даваемое ур. (4.29) и свойства прицельных точек ур. (5.17) и пренебрегая краевыми эффектами, мы можем записать ур. (5.100) в виде

$$\begin{aligned} dN_{\alpha\beta} &= \sum_{\text{spins}} \int dx (2\pi)^4 \delta_s(p_\nu - q_s) |M_s|^2 \prod_{a \in I_s} \frac{dn_a}{d\mathbf{x}_a} \frac{1}{2E_a} \prod_{b \in F_s} \frac{d\mathbf{p}_b}{(2\pi)^3 2E_b} \\ &\int dy (2\pi)^4 \delta_d(p_\nu + q_d) |M_d|^2 \prod_{a \in I_d} \frac{dn_a}{d\mathbf{x}_a} \frac{1}{2E_a} \prod_{b \in F_d} \frac{d\mathbf{p}_b}{(2\pi)^3 2E_b} \\ &\int dE_\nu \frac{\mathfrak{D}}{2\sqrt{2\pi}(2\pi)^3 |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2} \left| \sum_j V_{\alpha j}^* V_{\beta j} e^{-\Omega_j} \frac{1}{1 + i\tau_j} \right|^2, \end{aligned} \quad (5.101)$$

где $dn_a/d\mathbf{x}_a = dn_a(s_a, \mathbf{x}, x^0)/d\mathbf{x}$ определено согласно ур. (5.98). Для фазы Ω_j в ур. (5.101) по-прежнему справедливы определения в ур. (5.83) и в ур. (5.91), в которых теперь $T = X_0 = y_0 - x_0$ и $L = |\mathbf{X}| = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$. Следует подчеркнуть, что соображения, использованные при выводе ур. (5.101) основаны на свойствах принятой нами математической модели, которая может не отвечать условиям реальных экспериментов по исследованию нейтринных осцилляций.¹⁷ Поэтому

¹⁷Мы также неявно использовали экспериментальные ограничения на нейтринные массы, позволяющие считать, что $\text{Im}(\Omega_j + \Omega_i^*)$ существенно меняется лишь на макроскопически больших пространственных масштабах L_{ij} , а

сравнительно простая, но приближенная формула ур. (5.101) не эквивалентна более общему выражению ур. (5.100).

5.3.2 Факторизация на три множителя

Покажем, что ур. (5.101) может быть представлено в прозрачном виде, как интеграл по объемам источника и детектора от произведения плотности потока нейтрино из источника в детектор $\frac{d\Phi_\nu}{dE_\nu}$, сечения взаимодействия нейтрино с частицами в детекторе $d\sigma_\nu$, вычисленные для безмассового нейтрино в плосковолновом приближении, и “вероятности осцилляций” $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L)$.

Плотность числа безмассовых нейтрино в единицу времени, излучаемая единицей объема источника, равна

$$\begin{aligned} d\Gamma_\nu &= \sum_{\text{spins}} (2\pi)^4 \delta_s(p_\nu - q_s) |M_s|^2 \left[\prod_{a \in I_s} \frac{dn_a}{d\mathbf{x}} \frac{1}{2E_a} \prod_{b \in F_s} \frac{d\mathbf{p}_b}{(2\pi)^3 2E_b} \frac{d\mathbf{p}_\nu}{(2\pi)^3 2E_\nu} \right], \\ \frac{d\Gamma_\nu}{d\Omega_\nu dE_\nu} &= \sum_{\text{spins}} (2\pi)^4 \delta_s(p_\nu - q_s) |M_s|^2 \left[\prod_{a \in I_s} \frac{dn_a}{d\mathbf{x}} \frac{1}{2E_a} \prod_{b \in F_s} \frac{d\mathbf{p}_b}{(2\pi)^3 2E_b} \right] \frac{E_\nu}{16\pi^3}, \end{aligned} \quad (5.102)$$

где $d\Omega_\nu$ – телесный угол вылета нейтрино. Соответственно, плотность потока нейтрино на расстоянии $L = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ от единицы объема источника есть

$$\frac{d\Phi_\nu}{dE_\nu} = \frac{d\Gamma_\nu}{d\Omega_\nu dE_\nu L^2} = \sum_{\text{spins}} (2\pi)^4 \delta_s(p_\nu - q_s) |M_s|^2 \left[\prod_{a \in I_s} \frac{dn_a}{d\mathbf{x}} \frac{1}{2E_a} \prod_{b \in F_s} \frac{d\mathbf{p}_b}{(2\pi)^3 2E_b} \right] \frac{E_\nu}{16\pi^3 L^2}. \quad (5.103)$$

Сечение взаимодействия безмассового нейтрино с частицами в единице объема детектора равно

$$d\sigma_\nu = \sum_{\text{spins}} (2\pi)^4 \delta_d(p_\nu + q_d) |M_d|^2 \frac{1}{2E_\nu} \prod_{a \in I_d} \frac{dn_a}{d\mathbf{y}} \frac{1}{2E_a} \prod_{b \in F_d} \frac{d\mathbf{p}_b}{(2\pi)^3 2E_b}. \quad (5.104)$$

Определим “вероятность осцилляций” согласно:

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{\mathfrak{D}}{\tau_d}} \int_{y_1^0}^{y_2^0} dy^0 \int_{x_1^0}^{x_2^0} dx^0 \left| \sum_j V_{\alpha j}^* V_{\beta j} e^{-i\Omega_j} \frac{1}{1 + i\mathbf{r}_j} \right|^2. \quad (5.105)$$

Таким образом, комбинируя ур. (5.103), (5.104), (5.105), запишем ур. (5.101) в виде

$$\frac{dN_{\alpha\beta}}{\tau_d} = \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} dE_\nu \frac{d\Phi_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{dE_\nu} d\sigma_\nu(\mathbf{y}) \mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, |\mathbf{y} - \mathbf{x}|). \quad (5.106)$$

5.3.3 Вероятность осцилляций

Формула в ур. (5.105) – наиболее общий результат нашей работы. Ниже мы будем исследовать возможные приближения.

$\text{Re}(\Omega_j + \Omega_i^*)$ – на масштабах много больших L_{ij} . Напомним, однако, что такая интерпретация основана на квантовомеханическом анализе экспериментальных данных.

Формула с учетом расплывания для стационарного источника

Вычислим интегралы в ур. (5.105), предполагая $\tau_s = \infty$. В результате получаем формулу, аналогичную ур. (3.112)

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L) = \sum_{i,j} \frac{V_{\beta i} V_{\alpha i}^* V_{\alpha j} V_{\beta j}^*}{\sqrt[4]{1 + (L/L_{ij}^d)^2}} \exp[-i(\varphi_{ij} + \varphi_{ij}^d) - \mathcal{A}_{ij}^2 - \mathcal{B}_{ij}^2]. \quad (5.107)$$

Обсудим все входящие в ур. (5.107) функции.

– Фактор \mathcal{A}_{ij} дается

$$\mathcal{A}_{ij}^2 = \frac{1}{1 + (L/L_{ij}^d)^2} \left(\frac{L}{L_{ij}^{\text{coh}}} \right)^2. \quad (5.108)$$

– Фактор \mathcal{B}_{ij} определяется

$$\mathcal{B}_{ij}^2 = \left(\frac{\Delta E_{ij}}{2\sqrt{2}\mathfrak{D}} \right)^2 = \left(\frac{\pi \mathbf{n}}{\sqrt{2}\mathfrak{D}L_{ij}^{\text{osc}}} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}\pi\sigma_x \mathbf{n}}{L_{ij}^{\text{osc}}} \right)^2. \quad (5.109)$$

– Длина осцилляций в плосковолновом приближении

$$L_{ij}^{\text{osc}} = \frac{4\pi E_\nu}{\Delta m_{ij}^2}. \quad (5.110)$$

– Длина когерентности

$$L_{ij}^{\text{coh}} = \frac{2\sqrt{2}E_\nu^2}{\mathfrak{D}\Delta m_{ij}^2}. \quad (5.111)$$

– Длина дисперсии

$$L_{ij}^d = \frac{E_\nu^3}{\mathfrak{D}^2\Delta m_{ij}^2}. \quad (5.112)$$

– Эффективная пространственная ширина волнового пакета нейтрино с учетом взаимодействий в источнике и детекторе

$$\sigma_x = \frac{1}{2\mathfrak{D}}. \quad (5.113)$$

– Осцилляционная плосковолновая фаза

$$\varphi_{ij} = \frac{2\pi L}{L_{ij}^{\text{osc}}}. \quad (5.114)$$

– Поправка к осцилляционной фазе

$$\varphi_{ij}^d(L) = -\frac{1}{1 + (L/L_{ij}^d)^2} \left(\frac{L}{L_{ij}^{\text{coh}}} \right)^2 \frac{L}{L_{ij}^d} + \frac{1}{2} \arctan \frac{L}{L_{ij}^d}. \quad (5.115)$$

Формула в ур. (5.107) совпадает с ур. (3.112), если сделать замену $\sigma_p \rightarrow \mathfrak{D}$. Существенной деталью, однако, теперь является то, что эффективная неопределенность энергии нейтрино \mathfrak{D} есть функция кинематических переменных частиц в источнике и детекторе, в отличие от σ_p в ур. (3.112). Также, функция \mathcal{B}_{ij} отличается дополнительным фактором \mathbf{n} , который может заметно отличаться от единицы в зависимости от кинематических условий. Физический смысл введенных величин подробно обсуждался в разделе 3.7.3.

Формула в режиме “без расплывания” нейтринного волнового пакета

Начиная с этого места, будем пренебрегать дисперсией волнового пакета нейтрино, что означает $\tilde{\mathfrak{D}}_j \rightarrow \mathfrak{D}$, а также пренебрегаем знаменателем $1 + it_j$ в ур. (5.105). Тогда,

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L) = \sum_{ij} V_{\alpha i} V_{\beta j} V_{\alpha j}^* V_{\beta i}^* S_{ij} \exp(i\varphi_{ij} - \mathcal{A}_{ij}^2). \quad (5.116)$$

Обсудим все входящие в ур. (5.116) функции.

- Функция \mathcal{A}_{ij} отвечает за подавление интерференции на расстояниях, превышающих длину когерентности в режиме пренебрежительно малого вклада эффекта пространственной дисперсии волнового пакета:

$$\mathcal{A}_{ij} = \frac{(v_j - v_i)\mathfrak{D}L}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi\mathfrak{D}L}{E_\nu L_{ij}} = \frac{L}{L_{ij}^{\text{coh}}}, \quad (5.117)$$

где

$$L_{ij}^{\text{coh}} = \frac{E_\nu L_{ij}^{\text{osc}}}{\sqrt{2}\pi\mathfrak{D}} \quad (5.118)$$

является квантовополевым обобщением квантовомеханической длины когерентности в ур. (3.116), формально совпадая с ней заменой $\sigma_p \rightarrow \mathfrak{D}$.

- Новый по сравнению с квантовомеханическим рассмотрением безразмерный фактор S_{ij} учитывает конечные интервалы интегрирования по временам работы источника и детектора, а также возможное отсутствие синхронизации времен испускания и детектирования нейтрино:

$$S_{ij} = \frac{\exp(-\mathcal{B}_{ij}^2)}{4\tau_d\mathfrak{D}} \sum_{l,l'=1}^2 (-1)^{l+l'+1} \text{Ierf} \left[2\mathfrak{D} \left(x_l^0 - y_{l'}^0 + \frac{L}{v_{ij}} \right) - i\mathcal{B}_{ij} \right]. \quad (5.119)$$

В ур. (5.119) мы используем следующее определение “интеграла от функции ошибок”

$$\text{Ierf}(z) = \int_0^z dz' \text{erf}(z') + \frac{1}{\sqrt{\pi}} = z \text{erf}(z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}, \quad (5.120)$$

где $\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dt e^{-t^2}$ – интеграл ошибок.

Несинхронизированные измерения Поскольку наше рассмотрение процессов взаимодействия в источнике и детекторе было весьма общим, то мы не можем ожидать, что времена детектирования нейтрино будут синхронизированы с временем испускания нейтрино источником. Действительно, эффективные времена взаимодействия даются нулевыми компонентами 4-векторов X_s, X_d , определенных в ур. (5.17). X_s, X_d даются максимальным перекрытием всех волновых пакетов в источнике и детекторе, соответственно. В свою очередь, на положение волнового пакета в заданный момент времени не накладывалось никаких ограничений. Важной особенностью разработанного формализма является то, что он полностью воспроизводит подобные ожидания. Нетрудно показать, что в случае отсутствия синхронизации времен испускания и детек-

тирования нейтрино, фактор S_{ij} стремится к нулю. Уже одно это важное обстоятельство поясняет, почему “вероятность осцилляций” пишется нами в кавычках. Очевидно, что это, *не вероятность осцилляций*, поскольку величина $P_{\alpha\beta}$ не удовлетворяет ожидаемым соотношениям типа $\sum_{\beta} P_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha} P_{\alpha\beta} = 1$, в случае асинхронных измерений.

Как мы увидим далее, диагональная функция $S_{ii} = S_0$ не зависит от индекса i . Функция S_0 описывает подавление числа событий в случаях несинхронизированных процессов излучения нейтрино и его детектирования, а также, если время экспозиции детектора больше времени работы источника, либо много меньше пространственно-временной “ширины” нейтринного волнового пакета. Эти эффекты не связаны с интерференцией нейтринных состояний, поэтому представляется оправданным определить “вероятность осцилляций” нейтрино, выделив функцию S_0 согласно $P_{\alpha\beta}(E_{\nu}, L) = S_0 P_{\alpha\beta}(E_{\nu}, L)$, где

$$P_{\alpha\beta}(E_{\nu}, L) = \frac{1}{S_0} \sum_{ij} V_{\alpha i} V_{\beta j} V_{\alpha j}^* V_{\beta i}^* S_{ij} \exp(i\varphi_{ij} - \mathcal{A}_{ij}^2). \quad (5.121)$$

В общем случае, впрочем и для введенной таким образом “вероятности осцилляций” нейтрино не справедливы унитарные соотношения $\sum_{\beta} P_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha} P_{\alpha\beta} = 1$. Причина этого заключается в том, что факторы S_{ij} и \mathcal{A}_{ij} неявно зависят от индексов α, β . Только в случае соответствующей слабой численной зависимости выполняются унитарные соотношения. Этот эффект является прямым следствием рассмотрения в рамках квантовой теории поля и учета кинематических соотношений – явление, которое нельзя получить в рамках квантовомеханического вычисления.

Далее, будем предполагать, что времена испускания и детектирования нейтрино синхронизированы и изучим новые эффекты, связанные с конечностью интервалов испускания и детектирования нейтрино.

Синхронизированные измерения Рассмотрим синхронизированные измерения, для которых $x_{1,2}^0 = \mp \tau_s/2$, $y_{1,2}^0 = L \mp \tau_d/2$. После небольших упрощений технического характера, фактор ур. (5.119) выражается через вещественнозначную функцию $S(t, t', b)$ трех безразмерных вещественных переменных, а именно,

$$S_{ij} = S(\mathcal{D}\tau_s, \mathcal{D}\tau_d, \mathcal{B}_{ij}), \quad (5.122)$$

$$2t' S(t, t', b) = e^{-b^2} \operatorname{Re} [\operatorname{Ierf}(t + t' + ib) - \operatorname{Ierf}(t - t' + ib)].$$

На рис. 5.8 показано поведение функции $S_0(t, t') = S(t, t', 0)$ и её плотности распределения в плоскости (t, t') . Можно доказать, что $0 < S_0(t, t') < 1$ при любых $t, t' > 0$ и, кроме того, $S_0(t, t') < t/t'$ при $t' \geq t$. Отсюда следует, что средняя скорость счёта событий в детекторе $dN_{\alpha\beta}/\tau_d$ (но, конечно, не полное число событий) уменьшается с ростом отношения $\tau_d/\tau_s > 1$. Причина этого понятна: детектор не может зарегистрировать больше нейтрино, чем их было испущено источником. Менее очевидное заключение следует из неравенства $S_0(t + \delta t, t) > \operatorname{erf}(\delta t)$, справедливого для $\delta t > 0$: общее подавление $dN_{\alpha\beta}/\tau_d$ отсутствует при достаточно большом отношении τ_s/τ_d .¹⁸ Две пунктирные прямые на правой панели рис. 5.8 отделяют области, в которых $S_0 < 0.5$ ($\tau_s < 2\tau_d$) и

¹⁸Это условие “с большим запасом” выполняется в экспериментах с солнечными и атмосферными нейтрино, но может не выполняться в ускорительных и реакторных экспериментах.

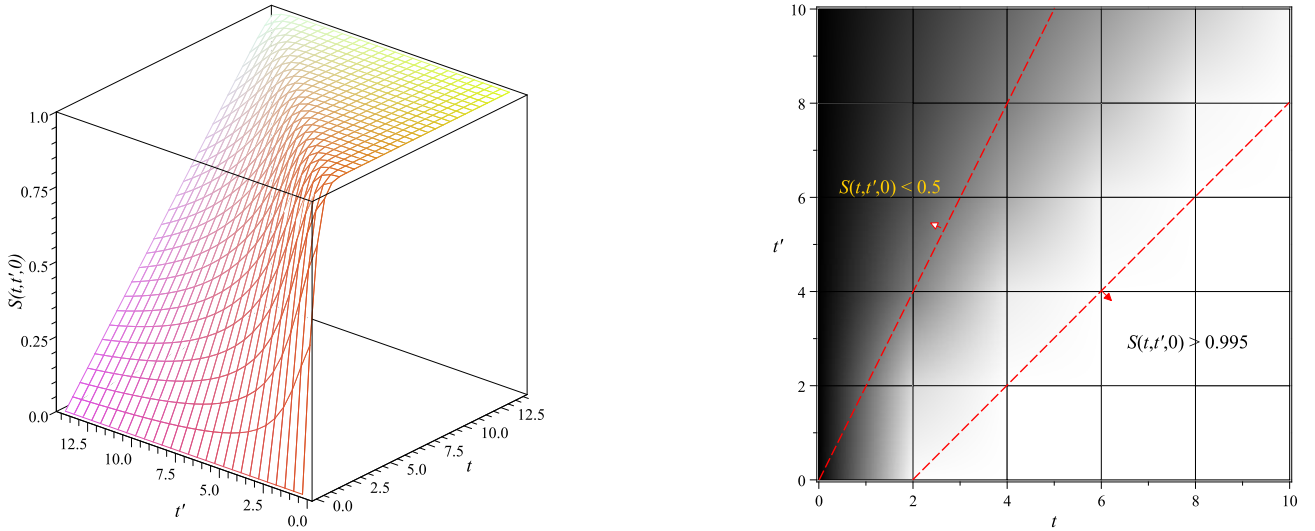


Рисунок 5.8 — Функция декогерентности $S_0(t, t') = S(t, t', 0)$ (левая панель) и график её плотности распределения в плоскости (t, t') (правая панель). Тёмные области на правой панели отвечают меньшим, а светлые — большим значениям $S_0(t, t')$.

$S_0 > 0.995$ ($\tau_s > \tau_d + 2/\mathcal{D}$). В случае $t = t'$ функция S_0 стремится к единице только при очень больших t (на практике при $t \gtrsim 100$). Т.о., чтобы положить $S_0(t, t') = 1$ необходимо (но все ещё не достаточно), чтобы время экспозиции детектора τ_d было либо мало по сравнению с τ_s , либо (при $\tau_d \approx \tau_s$) было много больше эффективного масштаба времени $\tau_\nu = 1/\min(\mathcal{D})$, где минимум берётся по тем областям фазового объёма реакций в \mathcal{S} и \mathcal{D} , которые дают существенный вклад в скорость счёта.

С другой стороны, сильная зависимость фактора $S_0(t, t')$ от своих аргументов при $t \lesssim t'$ предоставляет потенциальную возможность экспериментальной оценки функции \mathcal{D} (точнее, — её средних значений внутри вышеупомянутых областей фазового объёма), основанной на измерении скорости счёта, как функции переменных τ_d и τ_s (при фиксированном L) и сравнении данных с результатами монте-карловского моделирования. Оптимальная стратегия подобного эксперимента должна быть предметом специального исследования.

Для важного случая $t' = t$, соответствующего, например, некоторым ускорительным экспериментам, находим простое аналитическое выражение

$$S_0(t, t) = \text{erf}(2) - \frac{1 - e^{-4t^2}}{2\sqrt{\pi}t} \approx \begin{cases} \frac{2t}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{2t^2}{3} + \frac{8t^4}{15}\right), & \text{для } t \ll 1 \\ 1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}t}, & \text{для } t \gg 1, \end{cases} \quad (5.123)$$

приведенное на рис. 5.9. На рис. 5.10 показаны профили функции $S(t, t', b)$, вычисленные при нескольких значениях параметра b . Видно, что с ростом b поведение $S(t, t', b)$, как функции t и t' , становится все более сложным. При $b > 3 - 4$ функция $S(t, t', b)$ быстро осциллирует вблизи нуля. Такое поведение приводит к сильному подавлению “недиагональных” (с $i \neq j$) вкладов в $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L)$.

На рис. 5.11 показана функция $S(t, t, b)$ в зависимости от b , вычисленная при фиксированных значениях t . При небольших t эта зависимость имеет квазипериодический характер, проявляющийся на фоне быстрого падения $S(t, t, b)$ с ростом b . При очень больших t функция $S(t, t, b)$

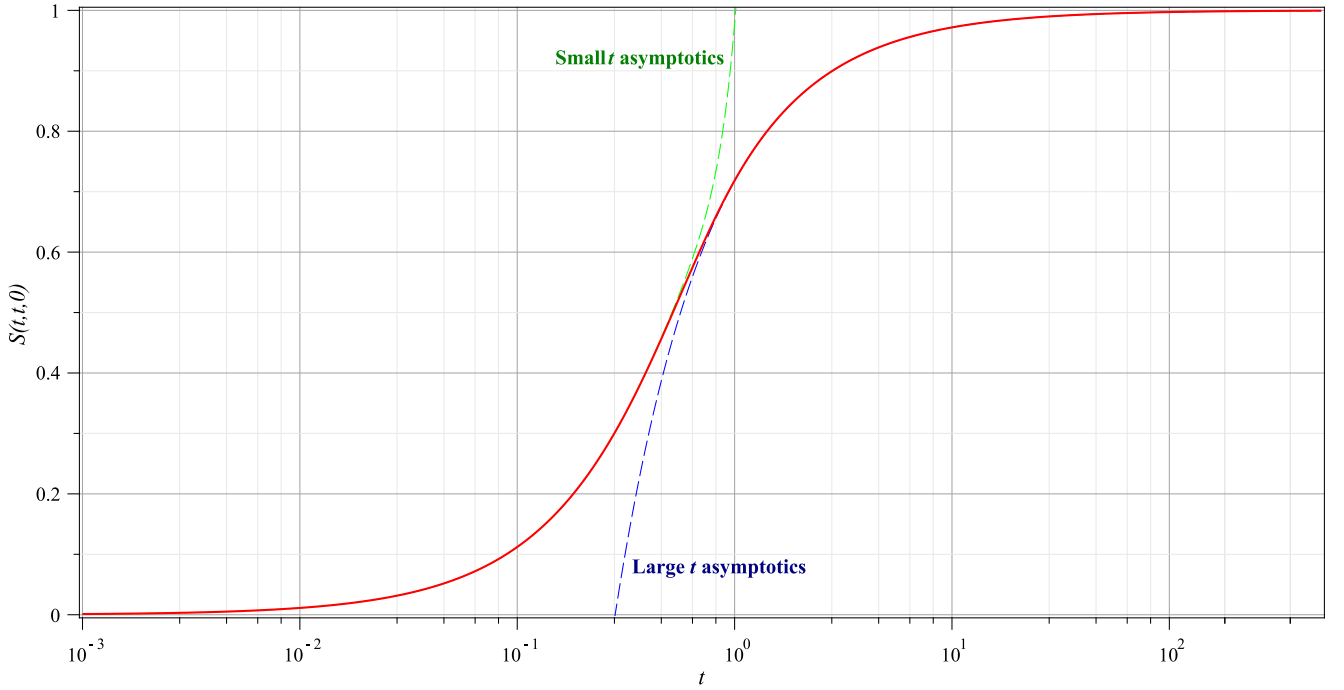


Рисунок 5.9 — Зависимость $S_0(t, t)$ от t

перестаёт зависеть от t , очень медленно приближаясь к своему асимптотическому виду $\exp(-b^2)$. В таком асимптотическом режиме “вероятность” в ур. (5.116) принимает вид, уже известный из литературы (см., например, [27; 28; 174] и ссылки в этих работах),

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L) = \sum_{ij} V_{\alpha i} V_{\beta j} V_{\alpha j}^* V_{\beta i}^* \exp(i\varphi_{ij} - \mathcal{A}_{ij}^2 - \mathcal{B}_{ij}^2), \quad (5.124)$$

с той существенной разницей, что входящие в \mathcal{A}_{ij} и \mathcal{B}_{ij} функции \mathfrak{D} и \mathfrak{n} зависят от импульсов внешних пакетов и энергии нейтрино. Эта зависимость качественно изменяет поведение факторов подавления “осцилляций”, если хотя бы некоторые из внешних пакетов имеют релятивистские средние импульсы.

5.4 Обсуждение результатов

5.4.1 Метод и основные этапы вычисления

Начнем обсуждение полученных результатов с напоминания основных этапов вычисления.

1. Разработана теория ковариантного волнового пакета и детально исследованы его свойства. В качестве рабочей модели предложен и рассмотрен релятивистский гауссов волновой пакет. В нашей работе показано, что традиционно используемый гауссов волновой пакет вида $\propto e^{-(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2/4\sigma_p^2}$ является нерелятивистским приближением релятивистского гауссова волнового пакета, предложенного в нашей работе.

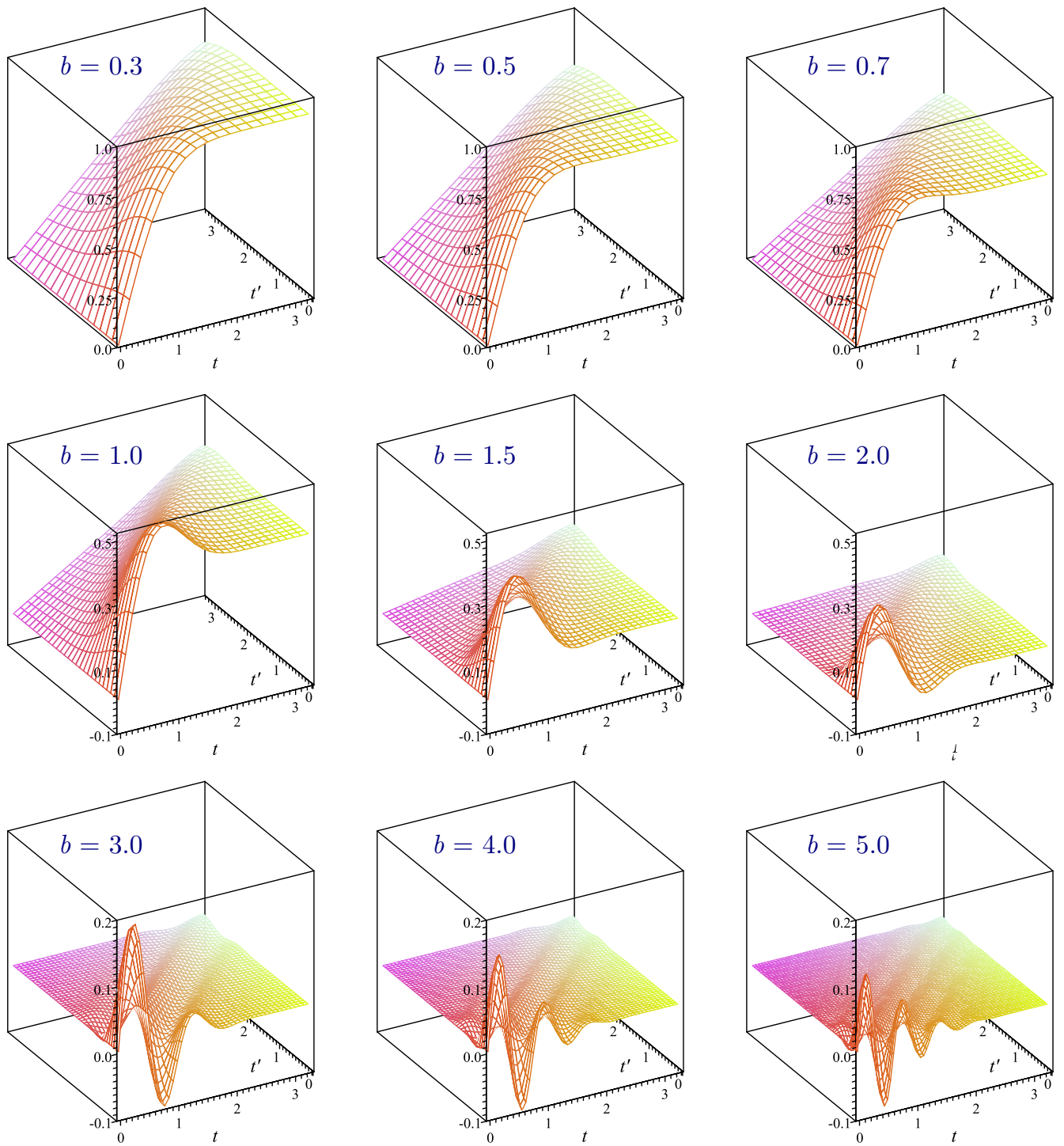


Рисунок 5.10 — Профили функции декогерентности $S(t, t', b)$ вычисленные при девяти значениях параметра b , указанных на панелях.

2. Вычислена амплитуда $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ “макроскопической” диаграммы, в которой “источник” и “детектор” нейтрино разделены макроскопическим расстоянием; начальные и конечные частицы описываются построенными ковариантными волновыми пакетами; нейтрино – виртуальная частица. В “источнике” и “детекторе” рождаются заряженные лептоны ℓ_{α}^{+} и ℓ_{β}^{-} , соответственно.
3. Вычислена микроскопическая вероятность $|\mathcal{A}_{\alpha\beta}|^2$. Поскольку каждый волновой пакет характеризуется средней координатой x_{κ} в момент времени x_{κ}^0 , средним 4-импульсом p_{κ} ,

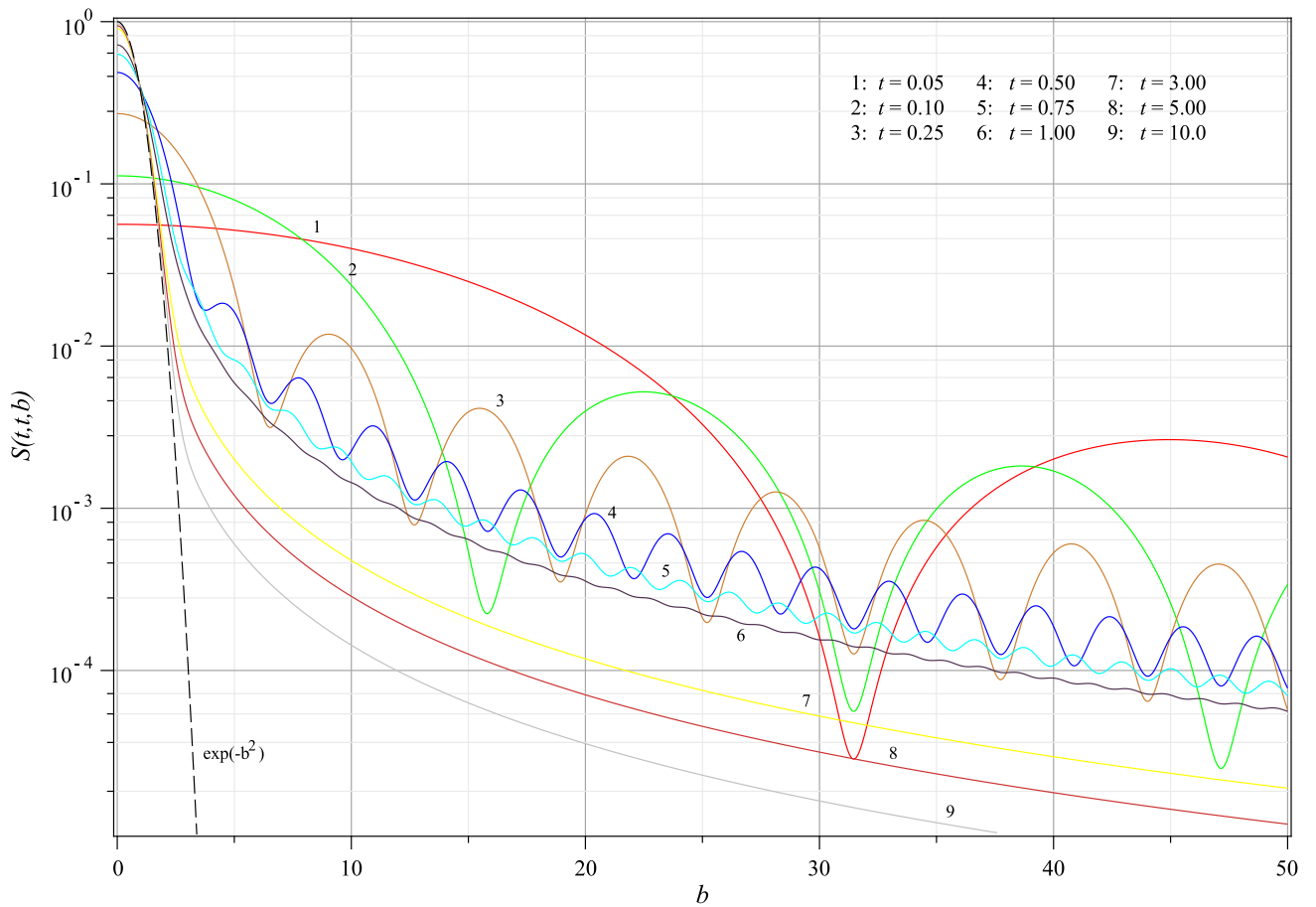


Рисунок 5.11 — Функция $S(t, t, b)$ в зависимости от b при фиксированных значениях t , указанных в легенде. Для сравнения пунктирной кривой показана асимптотика функции $S(t, t, b)$ при $t \rightarrow \infty$ и конечных b .

а также дисперсией импульса σ_κ , то $|\mathcal{A}_{\alpha\beta}|^2$ зависит параметрически от всех параметров $\{x_\kappa, p_\kappa, \sigma_\kappa\}$.

4. Произведено макроскопическое усреднение по параметрам $\{x_\kappa, p_\kappa\}$, что позволило вычислить число событий $N_{\alpha\beta}$ с ℓ_α^+ в источнике и ℓ_β^- в детекторе. Понятия “источник” и “детектор” обретают свой смысл как области пространства-времени вокруг прицельных точек $X_{s,d}$, определяемых параметрами волновых пакетов $\{x_\kappa, p_\kappa, \sigma_\kappa\}$ в вершинах с рождением ℓ_α^+ и ℓ_β^- , соответственно.
5. Найдены условия, при которых $N_{\alpha\beta}$ может быть представлено в виде интеграла по объемам источника и детектора от произведения трех множителей $\Phi_\nu(E_\nu, L) \times \mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L; \mathcal{D}) \times \sigma(E_\nu)$. Поток безмассового нейтрино от источника в детектор $\Phi_\nu(E_\nu, L) \propto 1/L^2$. $\sigma(E_\nu)$ – сечение рассеяния безмассового нейтрино в детекторе.
6. Множитель $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$, зависящий от флейворных индексов α, β , энергии нейтрино, эффективного расстояния между источником и детектором и дисперсии энергии-импульса нейтрино \mathcal{D} , является обобщением квантовомеханической вероятности осцилляций нейтрино. Ниже мы качественно рассмотрим свойства этого объекта, обсуждая полученные результаты.

Концептуальное отличие механизма нейтринных осцилляций в рамках квантовой теории поля от квантовомеханического подхода состоит в том, эффект осцилляций в КТП – это просто следствие

интерференции диаграмм с ν_i ($i = 1, 2, 3$) в промежуточном состоянии. В квантовомеханическом подходе нейтринные осцилляции это (квази-)периодическое взаимное превращение ν_α в ν_β .

5.4.2 Как виртуальное нейтрино становится реальным

Нейтрино в макроскопической диаграмме, отвечающей рождению в “источнике” и “детекторе” заряженных лептонов ℓ_α^+ и ℓ_β^- , описывается как виртуальная частица. С другой стороны, интуитивно следует ожидать, что любая виртуальная частица, распространяющаяся на достаточно большое расстояние, должна быть “похожа” на реальную частицу, с 4-импульсом на массовой поверхности. Например, свет, излученный лампочкой и попавший на светочувствительные колбочки нашего глаза, можно рассматривать в рамках двух подходов. В первом, распространяется реальный фотон с 4-импульсом на массовой поверхности. Во втором, оба акта - излучение света и его детектирование глазом, можно описывать на языке квантовой теории поля как единую макроскопическую диаграмму с двумя вершинами - в источнике (лампочка) и в детекторе (глаз). Разумеется, никакого противоречия в этих описаниях нет.

В конфигурационном пространстве виртуальная частица¹⁹ с массой m описывается причинной функцией Грина [175]

$$D^c(x) = \frac{im}{4\pi^2} \frac{K_1(m\sqrt{-\lambda + i\epsilon})}{\sqrt{-\lambda + -\epsilon}},$$

где $\lambda = x^2 = x_0^2 - \mathbf{x}^2$ и $\sqrt{-\lambda + i\epsilon} = i\sqrt{\lambda}$ при $\lambda > 0$. $K_\nu(x)$ – функция Ханкеля (функция Бесселя третьего рода). Функция $D^c(x)$ убывает на пространственной бесконечности (в причинно несвязанной области) как $|\lambda|^{-3/4} e^{-m\sqrt{|\lambda|}}$, а на временной бесконечности (в причинно связанной области) как $|\lambda|^{-3/4}$. $D^c(x)$ сосредоточена вблизи светового конуса $\lambda = 0$ и имеет там особенности.

Диаграммный подход с источником и детектором, описываемыми в координатном пространстве некоторыми функциями $\psi_s(x - x_s)$ и $\psi_d(x - x_d)$, соответственно, приводит к амплитуде вида

$$\mathcal{A}(x_d - x_s) \propto \int dx dy \psi_s(x - x_s) \psi_d(y - x_d) D^c(y - x),$$

где x_s, x_d – точки, в которых $|\psi_s(x - x_s)|$ и $|\psi_d(x - x_d)|$ имеют максимум.

Таким образом, поскольку $D^c(x)$ существенно отлична от нуля только вблизи светового конуса, а функции $\psi_s(x - x_s)$ и $\psi_d(x - x_d)$ сосредоточены около точек x_s, x_d , то для достаточно больших²⁰ $|x_d - x_s|$ амплитуда $\mathcal{A}(x_d - x_s)$ с хорошей точностью соответствует волновому пакету, описывающему частицу с массой m , распространяющуюся по классической траектории $\mathbf{x} = \mathbf{x}_s + \mathbf{v}(t - t_s)$ из точки \mathbf{x}_s в точку \mathbf{x}_d с экспоненциально малым отклонением от нее. Скорость $\mathbf{v} = \mathbf{np}/E$, где $\mathbf{n} = (\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_s)/|\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_s|$, и модуль импульса p – эффективный импульс, при котором насыщается интеграл $\mathcal{A}(p) \propto \int dk \mathcal{A}(x) e^{-ikx}$, соответствующей амплитуде в импульсном представлении.

¹⁹Для простоты ограничимся в этом обсуждении случаем скалярной частицы.

²⁰По сравнению с пространственными дисперсиями функций $\psi_{s,d}(x)$

Поэтому, для макроскопических расстояний виртуальная частица практически становится реальной, устраняя тем самым кажущееся противоречие.

Волновая функция виртуального нейтрино и амплитуда процесса

Амплитуда $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ “макроскопической” диаграммы, вычисленная в нашей работе (см. ур. (5.87)), позволила найти волновую функцию виртуального нейтрино (см. раздел 5.2.4). Волновая функция ν_j , рожденного в точке X_s в источнике, в произвольной точке x есть волновой пакет в СРГП приближении $\psi^*(\mathbf{p}, x - X_s)/|x - \mathbf{X}_s|$, где $\psi(\mathbf{p}, x) = e^{-\Omega_j(T, L)}$, и $\Omega_j(T, L)$ дается ур. (5.91). Дисперсия импульса рожденного в источнике ν_j дается дисперсиями и импульсами всех частиц в источнике (см. σ_{sj} в ур. (5.95)). Аналогично, волновая функция ν_j , взаимодействующего в точке X_d в детекторе дается $\psi(\mathbf{p}, X_d - x)$ с дисперсией импульса σ_{dj} , определяемой дисперсиями и импульсами всех частиц в детекторе ур. (5.95). Проекция состояния $|\mathbf{p}_j, X_s; \sigma_{sj}\rangle$ в источнике на состояние $|\mathbf{p}_j, X_d; \sigma_{dj}\rangle$ в детекторе определяет амплитуду $\mathcal{A}_{\alpha\beta} \propto \langle \mathbf{p}_j, X_d; \sigma_{dj} | \mathbf{p}_j, X_s; \sigma_{sj} \rangle$.

5.4.3 Усреднение по ансамблю и роль релятивистской ковариантности

В соответствии с интуитивным ожиданием, интерференция диаграмм, отвечающих внешним состояниям с хорошо определенными импульсами, оказывается подавлена. Действительно, в таком случае промежуточные нейтрино с разными m_i отвечают внешним состояниям с *разными* импульсами. Такие состояния ортогональны друг другу, и в соответствии с правилами КТП, диаграммы с разными внешними состояниями необходимо складывать на уровне квадратов модулей матричных элементов, что уничтожает интерференцию между ними. Отметим, что вычисление с волновыми пакетами, отвечающими внешним состояниям, воспроизводит это правило. Для этого необходимо *всегда* складывать амплитуды. Интерференционные члены в квадрате модуля амплитуды исчезают в плосковолновом пределе автоматически.

Корректное определение вероятности осцилляций нейтрино в рамках КТП формализма возможно в результате факторизации ожидаемого числа событий $N_{\alpha\beta}$ (с появлением заряженных лептонов ℓ_α^+ и ℓ_β^- в источнике и детекторе) на три множителя $\Phi_\nu(E_\nu, L) \times \mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L; \mathfrak{D}) \times \sigma(E_\nu)$. В свою очередь, вычисление ожидаемого числа событий возможно после процедуры усреднения по ансамблю начальных частиц и интегрирования по координатам и импульсам конечных. Лоренц-инвариантность $N_{\alpha\beta}$ требует ковариантности волновых пакетов, отвечающих внешним частицам. По построению, это требование удовлетворено в рамках развитого в этой работе формализма. Кроме того, ковариантность волновых пакетов играет фундаментальную роль при определении прицельного 4-вектора. Ненулевые прицельные 4-векторы рассеивающихся волновых пакетов при-

водят к подавлению вероятности взаимодействия. В рамках модели нековариантного волнового пакета $\propto e^{-(k-p)^2/4\sigma_p^2}$ было бы крайне сложно, если вообще возможно, определить правильную формулу подавления, связанного с ненулевыми прицельными 4-векторами в силу того, что объект σ_p преобразуется при лоренцовских преобразованиях очень сложным образом.

Лоренц-инвариантность вероятности нейтринных осцилляций является прямым следствием ковариантности нашего формализма. В этой связи поучительно рассмотреть кажущийся парадокс, связанный с интерференцией нейтринных состояний. Пусть имеются два состояния нейтрино с массами $m_i = 0$ и $m_j = m > 0$. Перейдем в систему покоя тяжелого нейтрино. В этой системе отсчета безмассовое нейтрино улетает от покоящегося тяжелого нейтрино в сторону мишени со скоростью света. Могут ли эти два массовых состояния находиться в когерентной суперпозиции, чтобы привести к нейтринным осцилляциям? Действительно, безмассовое нейтрино прилетит в детектор намного раньше тяжелого и может перестать с ним перекрываться, что должно приводить к демпированию осцилляций.

Обсудим этот парадокс. Начнем рассмотрение с простого случая, когда оба состояния нейтрино описываются плоскими волнами. В этом случае, ν_i и ν_j сохраняют когерентность бесконечно долго и во всем пространстве Вселенной в силу того, что плоская волна равномерно распределена по всему пространству-времени. Поэтому, даже покоящееся нейтрино взаимодействует с мишенью в любой момент времени. Таким образом, в плосковолновом приближении парадокса не возникает.

В модели волнового пакета уместно говорить о скорости распространения. Поэтому, действительно безмассовое состояние ν_i попадает в мишень первым. Согласно нашему обсуждению в предыдущем разделе, волновая функция нейтрино в нашем формализме это релятивистский инвариант²¹ с дисперсией импульса \mathcal{D} , которая преобразуется как энергия, т.е. \mathcal{D}/E_ν – лоренц-инвариант. При переходе в систему покоя ν_j , получим что $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}m/E_\nu$. Следовательно, пространственная ширина покоящегося нейтрино преобразуется $\sigma_x \rightarrow \sigma_x E_\nu/m$, т.е. становится много больше, чем в лабораторной системе.

Нейтрино ν_i и ν_j потеряют когерентность, если их волновые функции перестанут перекрываться, т.е. при таких временах t^{coh} , при которых безмассовое нейтрино ν_i , движущееся со скоростью света улетит на расстояние дальше, чем ширина пакета ν_j в его системе покоя $\sigma_x E_\nu/m$: $t^{\text{coh}} \geq \sigma_x E_\nu/m$. С учетом того, что период осцилляций теперь в этой системе это $2\pi/m$, получаем с точностью до константы ту же формулу для длины когерентности как ур. (5.111). Тем самым, ковариантность волнового пакета разрешает кажущийся парадокс.

5.4.4 Вероятность флэйворных переходов

Формула (5.105) – наиболее общий результат нашей работы. Однако, $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L; \mathcal{D})$ это еще не вероятность осцилляций нейтрино в квантовомеханическом смысле. Эта величина зависит от

²¹Спиновые степени свободы учтены в матричном элементе.

энергии нейтрино, от расстояния между источником и детектором, от эффективной дисперсии нейтринного волнового пакета \mathfrak{D} , от ширины временных интервалов работы источника (τ_s) и детектора (τ_d). В силу общности нашего рассмотрения, времена излучения и детектирования нейтрино не обязаны быть синхронизированы.

Синхронизированные и несинхронизированные времена рождения и детектирования нейтрино. Унитарные соотношения

В случае несинхронизированных процессов рождения и детектирования $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L; \mathfrak{D})$ экспоненциально подавлена в согласии с интуитивными ожиданиями. Уже одно это обстоятельство поясняет почему не следует ожидать выполнения унитарных соотношений $\sum_\beta \mathcal{P}_{\alpha\beta} = \sum_\alpha \mathcal{P}_{\alpha\beta} = 1$.

В случае синхронизированных времен рождения и детектирования нейтрино формула ур. (5.105) предсказывает ряд важных явлений. Новые эффекты связаны с соотношениями трех параметров τ_s , τ_d и $\tau_\nu = 1/\min \mathfrak{D}$.

Стационарный источник. В формальном пределе $\tau_s \rightarrow \infty$ (или в приближении $\tau_s \gg \tau_d$) мы приходим к так называемому случаю стационарного источника, при котором $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L; \mathfrak{D})$ дается ур. (5.107). Этот случай подробно обсуждается нами в разделе 3.7.3. Важное отличие от квантовомеханического рассмотрения заключается в том, что функции \mathfrak{D} и \mathcal{B}_{ij}^2 зависят от кинематики события, а следовательно и от 4-импульсов ℓ_α^+ и ℓ_β^- , т.е. от и индексов α, β . Поэтому, унитарные соотношения для $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L; \mathfrak{D})$ могут выполняться только в случае слабой зависимости \mathfrak{D} и \mathcal{B}_{ij}^2 от индексов α, β .

За исключением этих важных обстоятельств, формула в ур. (5.107) аналогична квантовомеханической формуле в ур. (3.112). Предсказывается исчезновение интерференционных членов в ур. (5.107) на расстояниях, превышающих длину когерентности. Экспоненциальная потеря когерентности частично компенсируется продольным расплыванием волновых пакетов нейтрино. Эффект расплывания проявляется также в степенном подавлении интерференционных членов.

Функция \mathcal{B}_{ij}^2 приводит к экспоненциальному подавлению интерференционных членов в $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L; \mathfrak{D})$, не зависящему от расстояния. Подавление будет тем больше, чем меньше дисперсия энергии-импульса нейтрино \mathfrak{D} . Таким образом, в плосковолновом пределе $\mathfrak{D} \rightarrow 0$ вероятность флэйворных переходов перестает зависеть от расстояния, нейтринные осцилляции пропадают. Формальной причиной подавления осцилляций является уже отмеченное нами выше правило КТП складывать квадраты амплитуд, соответствующих диаграммам с ортогональными друг другу внешними состояниями. Хорошей физической иллюстрацией этого явления может служить квантовомеханический эксперимент с двумя щелями и электроном, проходящим через них на экран, на котором можно наблюдать появление электрона. Как только экспериментатор может указать щель, через которую распространяется электрон, на экране исчезает интерференционная картина. Аналогично, случай $\mathfrak{D} \rightarrow 0$ эквивалентен тому, что мы однозначно можем указать массу проме-

жуточного нейтрино, разрушая интерференцию диаграмм с обменом ν_i и ν_j ($m_i \neq m_j$). Функция \mathcal{B}_{ij}^2 иллюстрирует почему не осциллируют заряженные лептоны. Впервые ответ на этот вопрос был дан в работе [34].

Потеря когерентности нейтрино зависит от величины \mathcal{D} или от относительной дисперсии $\sigma_{\text{rel}} = \mathcal{D}/E_\nu$. Существующие оценки этой величины, например, для реакторных антинейтрино, варьируются на несколько порядков. Диаметр ядра урана дает $\sigma_x \simeq 10^{-12}$ см и $\mathcal{D} \simeq 10$ МэВ). Атомные или межатомные расстояния приводят к оценке $\sigma_x \simeq (10^{-8} - 10^{-7})$ см, $\mathcal{D} \simeq (10^3 - 10^2)$ эВ. Уширение линий при ненулевой температуре среды позволяет оценить $\sigma_x \simeq 10^{-4}$ см, $\mathcal{D} \simeq 0.1$ эВ и т.д. Не исключено, что декогерентность в нейтринных осцилляциях может проявить себя в планируемых экспериментах с ожидаемым большим числом осцилляционных циклов, как например, в эксперименте JUNO [73]. На рис. 5.12 приведена вероятность выживания $\bar{\nu}_e$ для расстояния $L = 52$ км как функция энергии антинейтрино в плосковолновой модели и в модели с волновым пакетом нейтрино для некоторых значений параметра σ_{rel} . Видно, что эффект декогерентности при некоторых значениях параметра σ_{rel} может играть существенную роль в возможности определения иерархии масс нейтрино. Отметим, что область $10^{-16} \ll \sigma_{\text{rel}} \ll 10^{-1}$ отвечает ситуации когда эффекты волнового пакета нейтрино для расстояния $L \leq 52$ км пренебрежимо малы и формула $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L; \mathcal{D})$ численно становится эквивалентной формуле для вероятности осцилляций в плосковолновом приближении. В разделе 8.5.5 приведены результаты нашего анализа данных эксперимента Daya Bay на ограничение параметра σ_{rel} .

Нестационарный источник. В случае $\tau_s \leq \tau_d$, характерному для некоторых ускорительных экспериментов появляется дополнительная возможность измерить дисперсию \mathcal{D} , сравнивая скорость счета с полученной формулой $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L; \mathcal{D})$. Отметим также важное новое обстоятельство. При конечных τ_s и τ_d интерференционные члены подавляются меньше, чем предсказывается в случае стационарного источника множителем $e^{-\mathcal{B}_{ij}^2}$. Функциональная зависимость соответствующего нового подавления, не зависящего от расстояния L , но зависящего от временных интервалов работы источника τ_s и детектора τ_d , подробно изучена в нашей работе.

Обсудим на качественном уровне вопрос о том, почему при конечных τ_s и τ_d подавление $S(t, t, b)$ меньше асимптотического предела $\exp(-b^2)$, где $b = \mathcal{B}_{ij}$ зависит от дисперсии энергии нейтрино. Интерпретация обнаруженного эффекта может быть найдена в квантовомеханической аналогии: измерение энергии-импульса при конечных временах эквивалентно внесению дополнительной неопределенности в их определение, что делает нейтринные состояния более когерентными.

Предложенная в нашей работе теория флэйворных переходов исчерпывающего решает все парадоксы наивного плосковолнового приближения квантовомеханической теории. Также, предсказывается ряд новых эффектов, которые можно исследовать в экспериментах с ускорительными, атмосферными, реакторными нейтрино и нейтрино от радиоактивных источников. Первое такое исследование выполнено в работе [176]. Возможное влияние эффектов декогерентности²² на определение угла смешивания θ_{23} в ускорительных экспериментах было исследовано в работе [177].

²²Возможная потеря когерентности в этой работе не связана с природой волнового пакета, а вызвана возможным взаимодействием с окружающей средой.

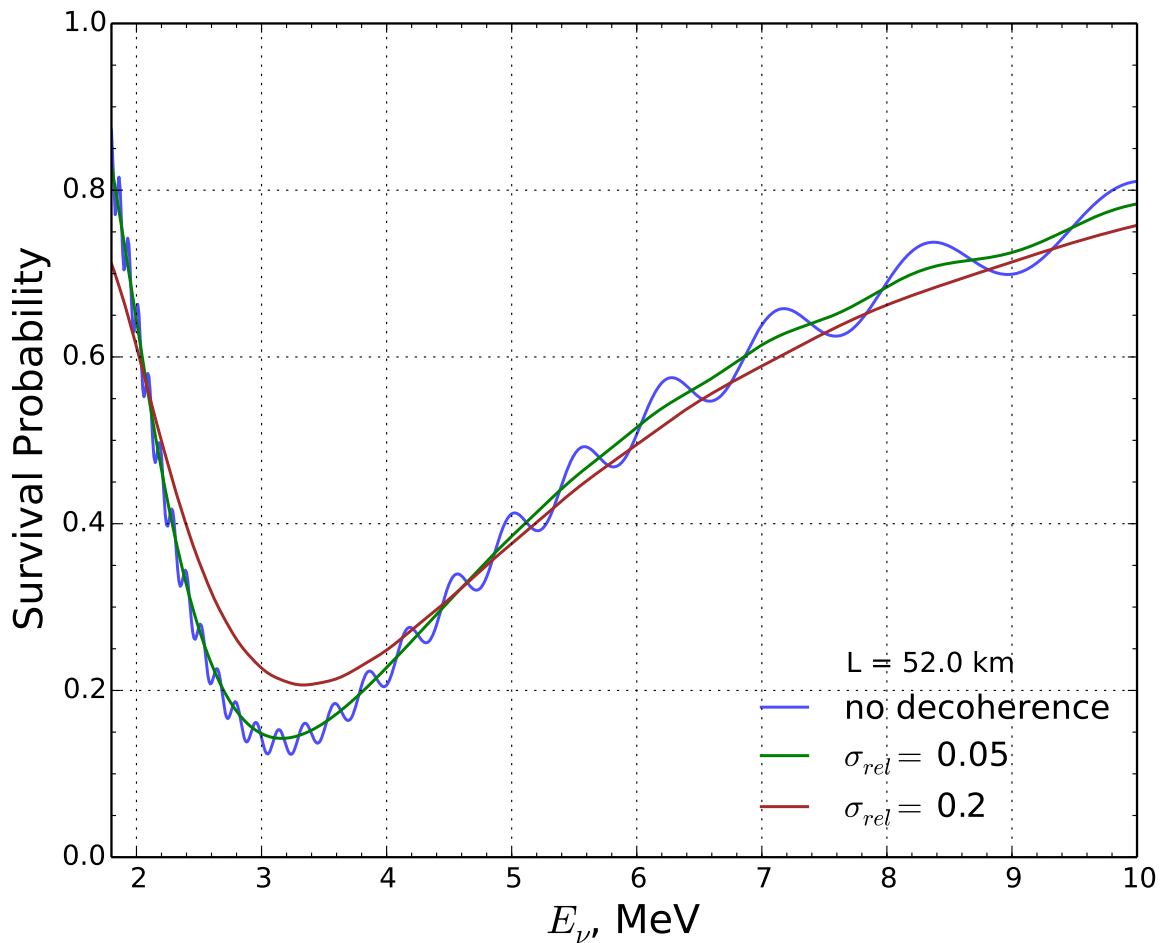


Рисунок 5.12 — Вероятность выживания $\bar{\nu}_e$ (на расстоянии $L = 52$ км) как функция энергии антинейтрино в плосковолновой модели (синяя линия) и в модели с волновым пакетом нейтрино (коричневая линия соответствует $\sigma_{rel} = 0.2$), (зеленая линия соответствует $\sigma_{rel} = 0.05$).

5.4.5 Наблюдаемость волнового пакета

Несмотря на очевидный успех теоретического описания нейтринных осцилляций в модели с волновым пакетом, читатель, знакомый с классическими работами (см. например, монографии [151; 165]) по теории рассеяния вправе задать следующий вопрос. “В учебниках по теории рассеяния, действительно, демонстрируется, что последовательное теоретическое описание процессов рассеяния невозможно без рассмотрения волновых пакетов. Однако, в результате усреднения сечения взаимодействия по ансамблю рассеивающихся частиц никакой информации о свойствах волновых пакетов в усредненном сечении не остается. В предложенной вами работе теории нейтринных осцилляций число событий $N_{\alpha\beta}$, полученное после усреднения по ансамблю частиц зависит от дисперсий всех волновых пакетов посредством функций \mathcal{D} , n . Нет ли здесь противоречия?”

Попробуем дать ответ на это очень интересное возражение. Напомним основные шаги вычисления Тэйлора, используя наши обозначения. Амплитуда

$$\mathcal{A} = \langle \{\mathbf{p}_f, x_f\} | \mathbb{S} - 1 | \{\mathbf{p}_i, x_i\} \rangle$$

рассеяния волновых пакетов может быть представлена в виде (см. раздел 4.3)

$$\mathcal{A} = \int d^4x \left(\prod_{i,f} \int \frac{d\mathbf{q}_i \phi(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i) e^{+iq_i(x_i-x)} d\mathbf{k}_f \phi^*(\mathbf{k}_f, \mathbf{p}_f) e^{-ik_f(x_f-x)}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{q}_i} (2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_f}} \right) \frac{1}{\mathcal{N}} i\mathcal{M}(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{k}_f\}),$$

где $\mathcal{N} = \sqrt{\langle \{\mathbf{p}_f, x_f\} | \{\mathbf{p}_f, x_f\} \rangle \cdot \langle \{\mathbf{p}_i, x_i\} | \{\mathbf{p}_i, x_i\} \rangle}$ – нормировка состояний, а $i\mathcal{M}(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{k}_f\})$ – матричный элемент в плосковолновом приближении.

Вычисление Тэйлора [151] (повторенное потом в книге Пескина и Шредера [165]) предполагает, что зависимость матричного элемента процесса $i\mathcal{M}(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{k}_f\})$ от импульсов $(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{k}_f\})$ более слабая, чем зависимость волнового пакета $\phi(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i)$ от импульсов. В таком приближении, возможна факторизация

$$\mathcal{A} \simeq \frac{1}{\mathcal{N}} \left(\int d^4x \prod_{i,f} \psi(\mathbf{p}_i, x - x_i) \psi^*(\mathbf{p}_f, x - x_f) \right) i\mathcal{M}(\{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f\}).$$

В таком случае, макроскопически усредненная величина $\langle |\mathcal{A}|^2 \rangle$, действительно не зависит от вида волнового пакета [151].

- Однако, приближение Тэйлора не всегда адекватно. Приведем несколько контр-примеров.
- Зависимость $i\mathcal{M}(\{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f\})$ от импульсов $(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{k}_f\})$ может быть сильная (например, адронные резонансы).
 - В пучках с закрученными электронами (разновидность волнового пакета) [178; 179] предлагается возможность измерения фазы матричного элемента в линейном приближении к плосковолновому сечению. Учет квадратичных поправок к приближению Тэйлора также позволяет измерить фазу матричного элемента [170]. Такие измерения невозможны в рамках плосковолнового приближения.
 - Для некоторых процессов, например $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$, сечение вычисленное в плосковолновом приближении противоречит экспериментальным данным [166]. Как мы отмечали в разделе 4.3, измеренное сечение оказалось меньше вычисленного примерно на 30% в области малых энергий фотона. Это объясняется тем, что заметный вклад в сечение этого с малыми энергиями фотона дают прицельные параметры ρ вплоть до 5 см, в то время как поперечные размеры сталкивающихся пучков не превышали $a \simeq 10^{-3}$ см. Ограничение прицельных параметров величиной $\rho \leq a$ приводит к уменьшению наблюдаемого числа фотонов. Соответствующая теория, учитывающая конечные размеры сталкивающихся пучков, была развита в работе [168].
 - В случае когда матричный элемент представляет собой сумму сингулярных матричных элементов, как например

$$i\mathcal{M}(\{\mathbf{q}_i, \mathbf{k}_f\}) \sim \sum_k V_{\alpha k} V_{\beta k}^* \mathcal{M}'_d \frac{1}{q^2 - m_k^2} \mathcal{M}'_s,$$

то форму волнового пакета невозможно отфакторизовать в одной точке по 4-импульсу q , если массы m_k разные. Матричный элемент именно такого вида отвечает интерференции диаграмм с виртуальными нейтрино в квантовополевой теории нейтринных осцилляций, или, более правильно, флэйворных переходов. Таким образом, рассмотрение осцилляций нейтрино в квантовой теории поля в модели волнового пакета, действительно является важным исключением, не описываемым приближением Тэйлора.

5.4.6 Сравнение с результатами работ других авторов

Обсудим теперь полученные результаты и методы вычисления в сравнении с работами других авторов. Сравнить результаты нашей работы с каждой работой на эту тему не представляется возможным в силу огромного числа работ на эту тему. С необходимостью, мы вынуждены провести сравнение с некоторой выборкой наиболее репрезентативных по мнению автора работ. Мы отдаем себе отчет в том и сожалеем, что не все заслуживающие внимания работы попали в наше сравнение.

Первое работой, в которой была рассмотрена макроскопическая фейнмановская диаграмма с виртуальным нейтрино, была работа 1981 года [180]. К достоинствам этой работы следует отнести то,

- что она содержит идею и первое вычисление макроскопической фейнмановской диаграммы с виртуальным нейтрино.
- Были сформулированы первые “правила сумм” для нейтринных осцилляций.
- Вычисленное сечение содержит множитель $1/L^2$.

Пионерская работа [180] важная с концептуальной точки зрения, содержит ряд упрощений и допущений, главным из которых является отсутствие волновых пакетов для начальных и конечных состояний. Поэтому, провести предметное обсуждение вероятности осцилляций не представляется нам возможным.

Отметим, что все обсуждаемые далее работы, кроме наших [32; 33; 181] содержат ряд общих допущений. Упрощения и приближения, свойственные конкретным работам обсуждаются индивидуально для каждого отдельного случая. Итак, в основном, в работах других авторов используются следующие приближения.

- Используется нековариантный формализм, что неприменимо ни к одному эксперименту как мы аргументировали в настоящей работе.
- Все волновые пакеты сталкиваются в одной точке “источника” x_S или “детектора” x_D в один момент времени. Такое приближение также не представляется нам реалистичным.

Следующей после [180] работой, в которой была рассмотрена макроскопическая фейнмановская диаграмма с виртуальным нейтрино, была статья [182]. К ее достоинствам следует отнести то, что

- начальные и конечные частицы описываются волновыми пакетами.

- Вероятность осцилляций нейтрино $P_{\alpha\beta}$ содержит подавление интерференции из-за L^{coh} и локализационного члена.

К недостаткам работы мы относим то, что

- не проведено макроскопическое усреднение. Не получена формула для числа событий. Поэтому, невозможно корректно вывести вероятность осцилляций $P_{\alpha\beta}$.
- Не учтена дисперсия волнового пакета нейтрино.

В работе [29] была доказана очень полезная для вычислений теорема (см. раздел 5.2.1). К недостаткам работы мы относим то, что

- рассмотрены стационарные нестабильные состояния, что является внутренним противоречием.
- Не учтена дисперсия волнового пакета нейтрино.
- Предполагается $L^{\text{coh}} = \infty$.
- Не получена формула $P_{\alpha\beta}$.
- Не проведено макроскопическое усреднение. Не получена формула для числа событий. Поэтому, невозможно корректно вывести вероятность осцилляций $P_{\alpha\beta}$.

В работе [30] была предпринята первая попытка вычислить число событий, соответствующее макроскопической фейнмановской диаграмме с виртуальным нейтрино, что является ее несомненным достоинством. Однако, эта работа не свободна от неоправданных допущений и недостатков.

- Не учтена дисперсия волнового пакета нейтрино.
- Процедура макроскопического усреднения не корректна и не обоснованна. Например, квадрат модуля волновой функции частицы заменяется на функцию распределения $|\psi(\mathbf{k}, x)|^2 \rightarrow \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} f(\mathbf{k}, x)$. Конечный объем перекрытия \mathcal{V}_S интерпретируется как дифференциал 4-мерного объема $dx_S^0 d\mathbf{x}_S$.
- В формуле для вероятности осцилляций нейтрино $P_{\alpha\beta}$ потерян множитель с подавлением интерференции из-за локализационного члена ($\propto e^{-\mathcal{B}_{ij}^2}$).
- Не рассмотрен случай конечных временных интервалов в источнике и детекторе

Обширная работа [27], написанная по материалам кандидатской диссертации М. Beuthe, содержит подобный обзор существующей литературы в едином ключе на 2003 год. Кроме того, к достоинствам этой работы следует отнести то, что

- учтены продольная и поперечная дисперсии волнового пакета.
- Приведены формулы для $P_{\alpha\beta}$ в разных режимах расплывания волнового пакета.

Кроме общих приближений, обсуждаемых выше, в работе [27]

- не проведено макроскопическое усреднение. Не получена формула для числа событий. Как следствие, невозможно корректно вывести вероятность осцилляций $P_{\alpha\beta}$.

К достоинствам наших работ [32; 33; 181], которые легли в основу части II настоящей диссертации, можно отнести следующее.

- Используется ковариантный формализм волновых пакетов.
- Точки столкновения волновых пакетов произвольные. Это привело к четырехмерному обобщению прицельного параметра. Также, из формализма автоматически следует корректное определение точек \mathbf{x}_S и \mathbf{x}_D , характеризующих рождение и детектирование нейтрино. Эти точки не задаются “руками”, как в работах других авторов. Напротив, они

определяются как эффективные точки, возникающие в фазе комплекснозначного четырехмерного объема перекрытия волновых пакетов с произвольными x_k . Вычислено геометрическое подавление вероятности взаимодействия волновых пакетов для неколлинеарных столкновений. Вычислены объемы перекрытия с учетом ненулевых прицельных параметров.

- Учтена продольная дисперсия эффективного волнового пакета нейтрино.
- Предложена новая модель релятивистского гауссова волнового пакета (РГП).
- Разработан и применен корректный метод макроскопического усреднения. Метод включает учет конечных временных интервалов работы “источника” и “детектора”. Времена в источнике и детекторе могут быть синхронизированы и не синхронизированы. Получена формула для числа событий, соответствующего макроскопической фейнмановской диаграмме. Вычислено обобщение вероятности осцилляций $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ с учетом всех вышеупомянутых эффектов.
- В предельных случаях $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ согласуется с известными формулами. Новым является:
 - Зависимость от конечных временных интервалов работы “источника” и “детектора”. Это важно для ускорительных нейтрино.
 - Подавление числа несинхронизированных событий.
 - Учет расплывания эффективного ВП нейтрино.
 - Единственный дополнительный параметр – дисперсия импульса нейтрино, зависит от кинематики событий в источнике и детекторе.

Наша работа содержит следующие приближения

- изучена модель симметричного релятивистского гауссова пакета.
- Теорема Гримуса-Стокингера (см. раздел 5.2.1), использованная в нашем вычислении может быть не применима на малых расстояниях.
- В формализме не учитываются ширины распадов нестабильных частиц.

Работа [31] интересна и важна подробным сравнением квантовомеханического и КТП подходов к теории нейтринных осцилляций. Среди достоинств этой работы следует перечислить

- сравнение КТП и КМ подходов.
- Обсуждаются условия применимости гауссовых волновых пакетов.
- Произведено вычисление числа событий и получена формула для вероятности осцилляций в КТП подходе.
- Рассмотрен случай распада нестабильных частиц.

На наш взгляд, полнота работы [31] была бы больше, если бы были учтены следующие моменты.

- Отсутствует процедура макроскопического усреднения. Нормированное число событий вычислено на эвристическом уровне строгости.
- Одним из важных выводов работы [31] является утверждение о том, что в КМ подходе нормировку $P_{\alpha\beta}$ приходится делать “руками”. Мы считаем, что этот вывод необоснован. В настоящей работе в разделе 3.7.2 приведен, на наш взгляд, корректный способ (макроскопическое усреднение), приводящий к правильной нормировке в КМ подходе автоматически.

- В работе имеются некоторые математические несовершенства. Например, интегрирование по времени путается с усреднением по времени. Форма пакета нейтрино усредняется по направлению в амплитуде \mathcal{A} вместо квадрата амплитуды $|\mathcal{A}|^2$. Не указан контур обхода полюса при интегрировании по энергии в пропагаторе нейтрино.

Эти положения не умаляют важности как самой работы [31], так и других работ авторов на эту тему, внесших значительный вклад в развитие теории нейтринных осцилляций.

В работах [156; 173]

- изучены общие свойства ковариантных волновых пакетов, пригодных для описания асимптотически свободных in- и out-состояний.
- Подробно изучен простейший (после релятивистского гауссова пакета) асимметричный волновой пакет.
- Доказана обобщенная теорема Гримуса-Стокингера и найдены поправки к соответствующей асимптотике в виде асимптотического разложения по обратным степеням $1/L^2$.
- Уточнен дуализм между пропагатором и эффективным волновым пакетом нейтрино.
- Получены явные формулы для обратного тензора перекрытия для произвольного числа взаимодействующих внешних пакетов.

Несущественным недостатком работ [156; 173] является пренебрежение дисперсией волнового пакета нейтрино, поскольку изучаются относительно малые (макроскопические) расстояния.

Поправки к теореме Гримуса-Стокингера изучены также в работах [183—185].

5.5 Заключение к главе

Построение квантово-полевой теории нейтринных осцилляций начинается с вычисления основных строительных блоков макроскопических фейнмановских диаграмм. Формулируется, что имеется в виду под макроскопической диаграммой общего вида. Приводятся конкретные примеры. Формулируются изменения в правила Фейнмана.

Важными элементами в вычислении макроскопической диаграммы оказываются интеграл перекрытия от произведения волновых функций ψ всех частиц, участвующих в реакции, и экспоненциальный множитель, оставшийся от пропагатора нейтрино. Приводится вычисление этого интеграла перекрытия, имеющего размерность четырехмерного объема. Найдена связь этого интеграла с функцией, переходящей в плосковолновом пределе в четырехмерную дельта функцию, отвечающую за сохранение 4-импульса, а также с геометрическим подавлением числа взаимодействий волновых пакетов, рассеивающихся друг на друге с ненулевым прицельным параметром.

Доказываются свойства инвариантности квадратичных форм \mathfrak{S}_s и \mathfrak{S}_d относительно трансляций всех координат x_μ на один и тот же произвольный 4-вектор y и относительно инверсии пространственно-временных координат $x_\mu \mapsto -x_\mu$. Обнаруживается, что волновой пакет СРГП инвариантен относительно сдвига вдоль классической мировой линии центра пакета. Поэтому как $X_{s,d}$ – точки, определяющие эффективные положения источника и детектора, так и $\mathfrak{S}_{s,d}$ – геометрические факторы подавления конфигураций с ненулевыми прицельными параметрами, од-

нозначно задаются фиксацией скоростей v_{κ} и произвольных пространственно-временных точек \tilde{x}_{κ} на этих мировых линиях.

Делается обобщение трехмерного прицельного вектора (b_{κ}) на четырехмерный случай (b_{κ}), что позволяет выразить геометрические факторы $\mathfrak{S}_{s,d}$ через b_{κ} всех участвующих в процессе волновых пакетов. Обсуждение геометрических факторов подавления позволяет сформулировать математические и физические условия, при которых можно считать асимптотические начальные и конечные состояния свободными.

Затем мы приступаем к вычислению амплитуды процесса с рождением двух разных заряженных лептонов ℓ_{α} и ℓ_{β} в макроскопически разделённых вершинах диаграммы. В качестве внешних состояний используются релятивистские гауссовы пакеты (РГП), теория которых обсуждается в предыдущей главе. Нейтрино проявляет себя как виртуальная частица, распространяющаяся из области источника в область детектора на расстояние L . Распространение массивного нейтрино описывается стандартным причинным пропагатором в конфигурационном пространстве, выраженном в виде четырехмерного интеграла Фурье по энергии-импульсу q виртуального нейтрино от пропагатора нейтрино в импульсном пространстве.

С помощью теоремы Гримуса-Стокингера (ГС) [29] вычисляется интеграл по трехмерному импульсу q в пределе больших L . Далее, методом перевала вычисляется оставшийся интеграл по q_0 . Находятся эффективные значения энергии-импульса нейтрино, дающие максимальный вклад в вычисляемую амплитуду. Рассмотрены два случая: ультра релятивистского и нерелятивистского нейтрино. Это позволяет нам вычислить амплитуду процесса.

Сравнение вычисленной амплитуды с квантовомеханической амплитудой перехода нейтрино из источника в детектор позволяет найти волновые функции нейтрино, рожденного в источнике, и нейтрино, взаимодействующего в детекторе. Волновые функции оказались волновыми пакетами в СРГП приближении. Найдены релятивистски-инвариантные дисперсии “выходящего” и “входящего” нейтрино.

Затем, вычисляется микроскопическая вероятность рассматриваемого процесса:

$$|\mathcal{A}_{\beta\alpha}|^2 = \int dE_{\nu} \frac{(2\pi)^4 \delta_s(p_{\nu} - q_s) \mathbf{V}_s |M_s|^2}{\prod_{\kappa \in S} 2E_{\kappa} V_{\kappa}} \frac{(2\pi)^4 \delta_d(p_{\nu} + q_d) \mathbf{V}_d |M_d|^2}{\prod_{\kappa \in D} 2E_{\kappa} V_{\kappa}} \times \\ \times \frac{\mathfrak{D}}{2\sqrt{2\pi}(2\pi)^3 L^2} \left| \sum_j V_{\alpha j}^* V_{\beta j} e^{-\Omega_j - \Theta_j} \frac{1}{1 + i\tau_j} \right|^2,$$

где $\delta_s(p_{\nu} - q_s)$, $\delta_d(p_{\nu} + q_d)$ – функции, отвечающие за сохранение энергии-импульса в источнике и детекторе, соответственно. В пределе бесконечно малых дисперсий волновых пакетов эти функции превращаются в четырехмерные дельта функции Дирака. $|M_s|^2$ и $|M_d|^2$ – квадраты матричных элементов процессов с рождением безмассового нейтрино в источнике и детектированием безмассового нейтрино в детекторе, соответственно. E_{κ} , V_{κ} – средняя энергия и трехмерный объем волнового пакета κ . Фаза $\Omega_j(T, L) = i(p_j X) + \frac{\mathfrak{D}_j^2}{E_j^2} [(p_j X)^2 - m_j^2 X^2]$ приведет в итоге к осцилляторному поведению числа событий с рождением двух разных заряженных лептонов ℓ_{α} и ℓ_{β} в макроскопически разделённых вершинах диаграммы. Заметим, что состояния нейтрино с определенным ароматом не используются. Осцилляторное поведение вероятности такого макроскопического события как функция отношения L/E_{ν} , где E_{ν} – эффективная энергия нейтрино,

возникает в результате интерференции амплитуд с разными промежуточными состояниями массивных нейтрино. Величина $\tau_j = L/\tau_{Lj}$, где τ_{Lj} – время распыливания волнового пакета в продольном направлении. Фаза Θ_j вычислена в явном виде. Она представляет собой поправку к $\Omega_j(T, L)$.

Далее, производится макроскопическое усреднение полученной формулы. В результате, число событий может быть представлено в прозрачном виде

$$\frac{dN_{\alpha\beta}}{\tau_d} = \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} dE_\nu \frac{d\Phi_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{dE_\nu} d\sigma_\nu(\mathbf{y}) \mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, |\mathbf{y} - \mathbf{x}|),$$

где $\frac{d\Phi_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{dE_\nu}$ – плотность потока числа нейтрино из единичного объема источника в единичный интервал энергии нейтрино, E_ν , $d\sigma_\nu(\mathbf{y})$ – сечение взаимодействия нейтрино с частицами в единичном объеме детектора. Обе величины соответствуют плосковолновому приближению и безмассовым нейтрино. Эффекты волновых пакетов проявляются в величине $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, |\mathbf{y} - \mathbf{x}|)$, которая оказывается квантовополевым обобщением “вероятности осцилляций”:

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mathfrak{D}}{\tau_d} \int_{y_1^0}^{y_2^0} dy^0 \int_{x_1^0}^{x_2^0} dx^0 \left| \sum_j V_{\alpha j}^* V_{\beta j} e^{-\Omega_j} \frac{1}{1 + i\tau_j} \right|^2,$$

где (x_1^0, x_2^0) – время работы источника, а (y_1^0, y_2^0) – время работы детектора. В пределе $(x_1^0, x_2^0) = (-\infty, \infty)$ формула для $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L)$ становится обобщенным, с учетом процессов рождения и детектирования нейтрино, аналогом формулы, полученной в главе 4, обобщая ее учетом процессов рождения и детектирования нейтрино. Это модифицирует функции \mathcal{A}_{ij} , \mathcal{B}_{ij} .

Вычисляя интеграл по конечным интервалам времени и пренебрегая дисперсией волнового пакета нейтрино в конфигурационном пространстве, получена формула для $P_{\alpha\beta}(E_\nu, L) \equiv \frac{1}{S_0} \mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L)$

$$P_{\alpha\beta}(E_\nu, L) = \frac{1}{S_0} \sum_{ij} V_{\alpha i} V_{\beta j} V_{\alpha j}^* V_{\beta i}^* S_{ij} \exp(i\varphi_{ij} - \mathcal{A}_{ij}^2).$$

Важное отличие от квантовомеханического рассмотрения заключается в том, что функции \mathfrak{D} и \mathcal{B}_{ij}^2 зависят от кинематики события, а следовательно и от 4-импульсов ℓ_α^+ и ℓ_β^- , т.е. от индексов α , β . Поэтому, унитарные соотношения для $P_{\alpha\beta}(E_\nu, L; \mathfrak{D})$ могут выполняться только в случае слабой зависимости \mathfrak{D} и \mathcal{B}_{ij}^2 от индексов α , β .

Фактор \mathcal{A}_{ij}^2 подавляет интерференцию состояний нейтрино ν_i и ν_j на расстояниях, превышающих длину когерентности, аналогично квантовомеханическому рассмотрению. Важным отличием от последнего, однако, оказывается то, что дисперсия энергии нейтринного волнового пакета, с учетом взаимодействий нейтрино в источнике и детекторе, является функцией кинематических переменных. Новым оказывается фактор S_{ij} , который подавляет как диагональные члены с функцией подавления $S_0 = S_{ii}$, так и не диагональные члены в формуле для вероятности осцилляций.

Полученная формула для $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L)$ правильно воспроизводит интуитивное ожидание подавления числа взаимодействий в случае, если времена работы источника и детектора не синхронизированы друг с другом. В случае синхронизированных интервалов времен, S_{ij}/S_0 представляет собой новую квантово-полевую функцию подавления интерференционных членов в формуле для вероятности. При определенных условиях функция S_{ij} переходит в независимый от L фактор $\exp(-\mathcal{B}_{ij}^2)$, ответственный за подавление когерентности при рождении и детектировании нейтрино. Соответствующие условия возникают в двух случаях. В первом, когда время экспозиции

детектора $\tau_d = (y_2^0 - y_1^0)$ много меньше времени работы источника $\tau_s = (x_2^0 - x_1^0)$. Во втором, когда $\tau_d \approx \tau_s \gg \tau_\nu$, где τ_ν может быть интерпретировано как временная дисперсия волнового пакета нейтрино. В противоположном случае фактор S_{ij} предсказывает меньшее подавление, по сравнению с $\exp(-\mathcal{B}_{ij}^2)$, что объясняется дополнительным внесением неопределенности в измерение энергии нейтрино из-за конечных временных интервалов. Сильная зависимость S_0 от параметров τ_s и τ_d предоставляет возможность измерения усреднённого значения функции \mathcal{D} в специальном ускорительном эксперименте, допускающем вариацию этих параметров (или одного из них). Такое измерение было бы очень полезно для планирования и обработки данных будущих прецизионных экспериментов. Недиagonальные факторы декогерентности S_{ij} ($i \neq j$) имеют более сложное поведение, что иллюстрируют аналитические и численные оценки.

Часть III

**Измерение угла смешивания θ_{13} и разности
квадратов масс Δm_{ee}^2 в эксперименте Daya
Bay**

Глава 6. Эксперимент Daya Bay

6.1 Введение

Эксперименты, проведенные в последние годы, существенно улучшили наше понимание физики нейтрино. Хотя при построении СМ предполагалось, что нейтрино безмассовые частицы, сегодня очевидно, что они обладают ненулевой (хотя и малой) массой. Дефицит потока солнечных ν_e , по сравнению с расчетами в рамках моделей без нейтринных осцилляций, был подтвержден последующими радиохимическими экспериментами [16; 98; 186]. Вариация отношения ν_μ/ν_e атмосферных потоков обеспечила первое указание на зависимость дефицита ν_μ от расстояния [187]. Последовавшее за этим наблюдение исчезновения ν_μ , рожденных в ускорителях частиц, подтвердило измерения потоков атмосферных нейтрино [188]. Сравнение измеренных потоков солнечных ν_e с полным потоком ν показало, что дефицит ν_e был следствием конверсии ν_e в нейтрино других ароматов [189; 190]. Исчезновение $\bar{\nu}_e$, испущенных ядерными реакторами, обладало очевидной зависимостью от L/E_ν – отношения расстояния, пройденного нейтрино к энергии этой частицы, подтверждая гипотезу нейтринных осцилляций в качестве объяснения наблюдения нарушения лептонного аромата [20].

Эксперимент с реакторными антинейтрино Daya Bay был задуман для ответа на вопрос, есть ли примесь массового состояния ν_3 в состоянии ν_e ? Этот вопрос эквивалентен вопросу, отличен ли угол смешивания θ_{13} от нуля. Эксперименты с солнечными и реакторными нейтрино установили существенную примесь массовых состояний $\nu_{1,2}$ в состоянии ν_e , описываемую $\sin^2(2\theta_{12}) = 0.846 \pm 0.021$ [158]. Эксперименты с атмосферными и ускорительными нейтрино обнаружили почти максимальную примесь массовых состояний $\nu_{2,3}$ в состоянии ν_μ , описываемую $\sin^2(2\theta_{23}) = 0.999^{+0.001}_{-0.018}$ [158]. Поиски, предшествующие эксперименту Daya Bay, не обнаружили доказательств исчезновения $\bar{\nu}_e$ на расстояниях порядка 1 км, что позволило установить предел $\sin^2 2\theta_{13} \leq 0.17$ на 90% уровне достоверности (У.Д.) [191; 192]. Измерение θ_{13} , последнего неизменного до 2012 года угла смешивания лептонов в ν СМ – модели с массивными нейтрино, может дать более глубокое понимание природы смешивания и массовой структуры лептонов. Ненулевое значение θ_{13} также позволит будущим экспериментам определить иерархию масс нейтрино и измерить нарушение СР-инвариантности (СР) в лептонном секторе [193].

Ядерные реакторы являются источником интенсивного и чистого потока $\bar{\nu}_e$, что может быть использовано для измерения θ_{13} . Примерно 2×10^{20} $\bar{\nu}_e$ в секунду излучает ядерный реактор на один ГВт термальной мощности. Поток $\bar{\nu}_e$ быстро падает с ростом энергии и становится пренебрежимо малым при энергии выше 10 МэВ. В разделе 8 приводятся дополнительные детали излучения $\bar{\nu}_e$ ядерными реакторами. Стандартным способом детектирования реакторных $\bar{\nu}_e$ является использование реакции обратного бета-распада (ОБР)

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n. \quad (6.1)$$

Свертка энергетического спектра реакторных $\bar{\nu}_e$ с сечением ОБР дает спектр взаимодействующих $\bar{\nu}_e$, который растет с ростом энергии $\bar{\nu}_e$ от порога реакции 1.8 МэВ до максимума при энергии порядка 4 МэВ, и уменьшается до малых значений при энергиях выше 8 МэВ. При таких энергиях $\bar{\nu}_\mu$ или $\bar{\nu}_\tau$ взаимодействия с обменом заряженным бозоном запрещены законом сохранения энергии. Поэтому осцилляции нейтрино проявляют себя как уменьшение или *исчезновение* ожидаемого числа $\bar{\nu}_e$ в гипотезе без нейтринных осцилляций. В 3ν модели нейтринных осцилляций, вероятность выживания $\bar{\nu}_e$ с энергией E_ν на расстоянии L от источника может быть выражена как:

$$P_{\text{sur}} = 1 - \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \Delta_{21} - \sin^2 2\theta_{13} (\cos^2 \theta_{12} \sin^2 \Delta_{31} + \sin^2 \theta_{12} \sin^2 \Delta_{32}), \quad (6.2)$$

где $\Delta_{ji} \simeq 1.267 \Delta m_{ji}^2 (\text{эВ}^2) L(\text{м}) / E_\nu (\text{МэВ})$. Эксперимент KamLAND измерил первый член этой формулы, соответствующий исчезновению реакторных $\bar{\nu}_e$ с длиной осцилляций порядка 60 км. Измерение $|\Delta m_{32}^2|$ при помощи обнаружения осцилляции атмосферных и ускорительных ν предсказывает длину порядка 1.6 км для оставшихся членов формулы ур. (6.2). На таком расстоянии осцилляционные фазы Δ_{31} и Δ_{32} практически неразличимы. Поэтому ур. (6.2) можно приближенно записать, используя эффективную фазу Δ_{ee} ,

$$P_{\text{sur}} \simeq 1 - \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \Delta_{21} - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \Delta_{ee}, \quad (6.3)$$

которая не зависит от иерархии масс нейтрино. Связь эмпирической величины Δm_{ee}^2 , извлекаемой из анализа данных при помощи ур. (6.3), с фундаментальными параметрами Δm_{31}^2 , Δm_{32}^2 , удовлетворяет соотношению $\Delta m_{ee}^2 \simeq \cos^2 \theta_{12} |\Delta m_{31}^2| + \sin^2 \theta_{12} |\Delta m_{32}^2|$ [194]. С учетом текущих результатов, $|\Delta m_{31}^2| \simeq |\Delta m_{ee}^2| \pm 2.3 \times 10^{-5} \text{эВ}^2$ и $|\Delta m_{32}^2| \simeq |\Delta m_{ee}^2| \mp 5.2 \times 10^{-5} \text{эВ}^2$, в предположении нормальной (верхний знак) или обратной (нижний знак) иерархии масс нейтрино.

Преыдушие поиски нейтринных осцилляций, модулируемых ненулевым углом смешивания θ_{13} , были ограничены неопределенностью в предсказании потока реакторных $\bar{\nu}_e$ [191; 192]. Чтобы преодолеть эту проблему, в работе [195] было предложено использовать дополнительный детектор, установленный рядом с реактором. Сравнение наблюдений в дальнем и ближнем детекторах избавляет от неопределенности в знании потока реакторных $\bar{\nu}_e$. Чувствительность к наблюдению нейтринных осцилляций зависит от относительных неопределенностей для детекторов в знании числа протонов N_p , эффективности детектирования ϵ и расстояния до реактора L . Если эти относительные неопределенности хорошо контролируются, то небольшая разница в вероятности выживания может быть обнаружена в отношении чисел взаимодействий $\bar{\nu}_e$ в ближнем и дальнем детекторах

$$\frac{N_f}{N_n} = \left(\frac{N_{p,f}}{N_{p,n}} \right) \left(\frac{L_n}{L_f} \right)^2 \left(\frac{\epsilon_f}{\epsilon_n} \right) \left[\frac{P_{\text{sur}}(E_\nu, L_f)}{P_{\text{sur}}(E_\nu, L_n)} \right]. \quad (6.4)$$

Основываясь на этой методике были осуществлены три эксперимента: Daya Bay [196], RENO [197], и Double CHOOZ experiments [198]. В марте 2012 эксперимент Daya Bay сообщил об открытии исчезновения $\bar{\nu}_e$ в результате осцилляций с ненулевым значением угла θ_{13} [199]. Обнаруженные осцилляции нейтрино были позднее подтверждены другими экспериментами [200; 201], а также другой методикой [202; 203]. Относительно большое измеренное значение θ_{13} позволило также измерить $|\Delta m_{ee}^2|$, исследовав наблюдаемый дефицит событий как функцию энергии $\bar{\nu}_e$. Согласованность измерений разницы квадратов масс между экспериментами с реакторными

$\bar{\nu}_e$, ускорительными и атмосферными ν_μ ГэВных энергий, позволило строго установить 3ν модель нейтринных масс и смешивания.

Структура этой части. В главе 6 дается обзор эксперимента Daya Bay, включая калибровку и характеризацию эксперимента. Глава 7 посвящена методам отбора антинейтринных событий, оценке фона, а также оценкам эффективностей детектирования сигнальных и фоновых событий. Наконец, в главе 8 дается оценка потока $\bar{\nu}_e$ от реактора, обсуждаются все принятые во внимание источники систематических ошибок, описывается осцилляционный анализ экспериментальных данных и обсуждаются полученные результаты.

6.2 Описание эксперимента

Принцип относительного измерения, отраженный в ур. 6.4, сильно повлиял на дизайн эксперимента Daya Bay. Исчезновение $\bar{\nu}_e$ проявляется максимальным образом на расстоянии первого осцилляционного минимума P_{sur} . Основываясь на результатах измерений Δm_{32}^2 с ускорительными и атмосферными ν_μ , для реакторных $\bar{\nu}_e$ со средней энергией ~ 4 МэВ ожидаемый минимум соответствует $L_f \approx 1.6$ км. Значительное исчезновение $\bar{\nu}_e$ в ближних детекторах уменьшило бы общую чувствительность метода сравнения сигналов в дальних и ближних детекторах, поэтому расстояние L_n не превышало ~ 500 м. Использование модульных детекторов идентичного дизайна уменьшило вариацию в числе протонов N_p и эффективности детектирования ϵ . Расположение детекторов на достаточной глубине под землей уменьшило наиболее важный фон от нейтронов и коротко-живущих изотопов, рожденных космогенными мюонами. Статистическая значимость растет с увеличением потока $\bar{\nu}_e$, массы мишени, эффективности детектора, что мотивировало использование мощных реакторов и больших детекторов.

Кампус атомных электростанций (АЭС) Daya Bay, расположенных около китайского города Шэньчжэнь, хорошо подходил для целей эксперимента. К моменту этого измерения комплекс состоял из шести водо-водяных реакторов, выделяющих термальную мощность 2.9 ГВт каждый и являющихся источником порядка 3.5×10^{21} $\bar{\nu}_e$ /с. Таким образом, комплекс представлял собой один из самых интенсивных источников $\bar{\nu}_e$ на Земле. Крутые горы, примыкающие к реакторам, обеспечили хорошую защиту от космогенных мюонов. Для того чтобы разместить 160 тонн вещества мишени для взаимодействий $\bar{\nu}_e$, были выкопаны так называемые “экспериментальные холлы”. Вещество мишени поровну поделили между ближними и дальними холлами. Такое расположение соответствовало ~ 2000 взаимодействий $\bar{\nu}_e$ в день в ближних и ~ 250 взаимодействий в дальних детекторах, с вкладом от космогенного фона не превышающем 0.5%. Масса вещества мишени была разделена между 8 модульными антинейтринными детекторами (AD). Инсталляция, по крайней мере, двух AD в каждый экспериментальный холл, позволила продемонстрировать отклонение в эффективности детектирования $\bar{\nu}_e$ менее 0.2% между двумя детекторами. Сравнение эксплуатационных качеств первых двух AD дано в работе [204]. Эти основные характеристики позволили измерить $\sin^2 2\theta_{13}$ с точностью $\sim 4\%$, угол θ_{13} с точностью $\sim 4\%$ и $|\Delta m_{ee}^2|$ с точностью

$\sim 3\%$, что обсуждается далее в этой части. В этом разделе мы даем краткое описание эксперимента Daya Bay. Более детальное описание дается в работе [205].

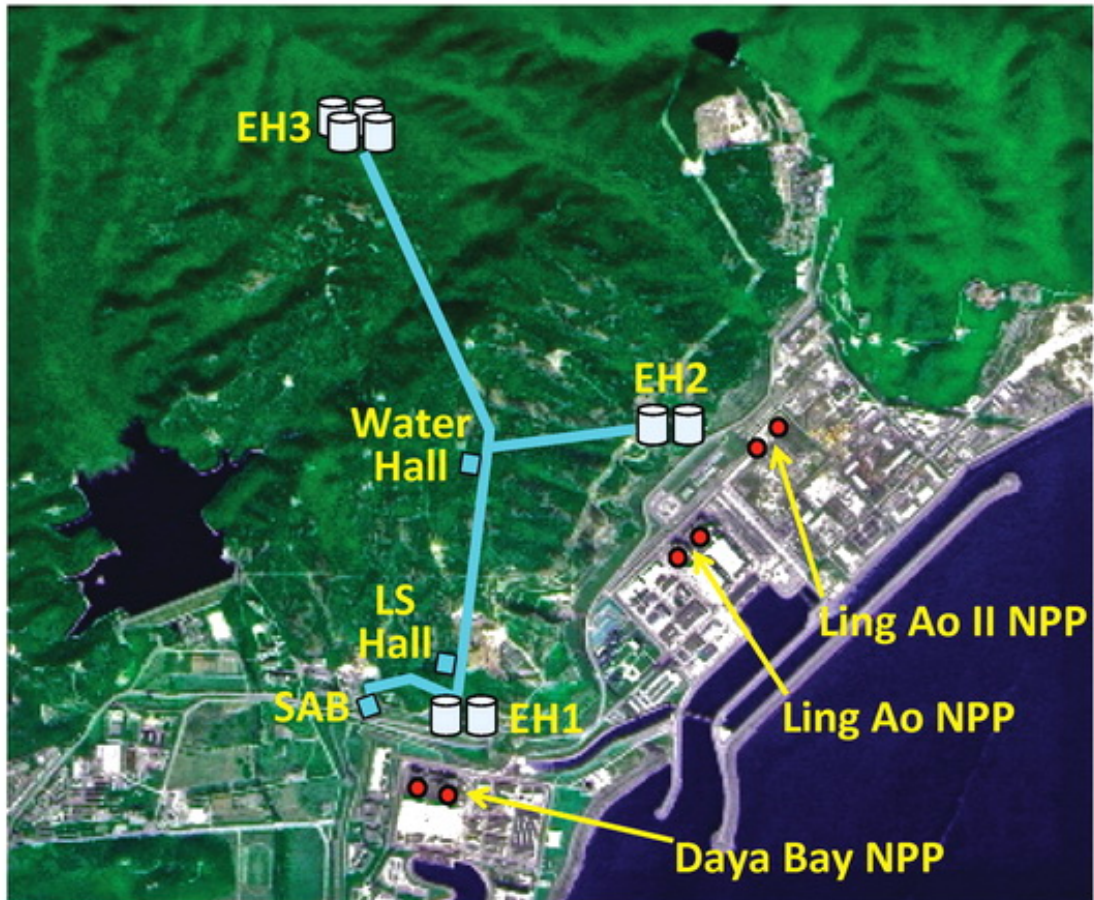


Рисунок 6.1 — Размещение эксперимента Daya Bay. Реакторы АЭС Daya Bay и Ling Ao (красные кружки) располагаются на узком прибрежном шельфе между побережьем и внутренними горами. Пара АД, установленных в каждом подземном экспериментальном холле вблизи с реакторами (EH1 и EH2), измеряют поток $\bar{\nu}_e$, испущенных реакторами, в то время как четыре АД в дальнем экспериментальном холле (EH3) измеряют дефицит потока $\bar{\nu}_e$ вследствие осцилляций нейтрино. Детекторы были построены и протестированы в сборочном цехе на поверхности (SAB), перевезены в жидкосцинтилляционный холл (LS hall) для заполнения жидким сцинтиллятором (ЖС) и затем установлены в экспериментальный холл.

Реакторы в Daya Bay организованы в два кластера: кластер Daya Bay состоит из двух реакторов (D1 и D2), а кластер Ling Ao из четырех (L1, L2, L3 и L4). Соответственно, четыре ближних детектора были поделены между двумя ближними экспериментальными холлами (EH1 и EH2) около двух реакторных кластеров. Оставшиеся четыре детектора установлены в одном экспериментальном холле (EH3). Положения экспериментальных холлов были выбраны с учетом оптимального расстояния для наибольшей чувствительности к θ_{13} и географических факторов: положения реакторов и топологии гор. В случае одного работающего реактора неопределенность в знании реакторного потока минимальна. При наличии нескольких реакторов, расположенных на разных расстояниях от детекторов, полное сокращение неопределенностей в знании потока $\bar{\nu}_e$

							Реактор						
							D1	D2	L1	L2	L3	L4	
							\overline{W}_{th}^{6AD}	2.082	2.874	2.516	2.554	2.825	1.976
							\overline{W}_{th}^{8AD}	2.514	2.447	2.566	2.519	2.519	2.550
							X [м]	359.20	448.00	-319.67	-267.06	-543.28	-490.69
							Y [м]	411.49	411.00	-540.75	-469.21	-954.70	-883.15
							Z [м]	-40.23	-40.24	-39.73	-39.72	-39.80	-39.79
Холл	Глубина [м (м.в.э.)]	Детектор	Масса [кг]	X [м]	Y [м]	Z [м]	Расстояние [м]						
ЕН1	93	AD1	19941 ± 3	362.83	50.42	-70.82	362.38	371.76	903.47	817.16	1353.62	1265.32	
	(250)	AD2	19967 ± 3	358.80	54.86	-70.81	357.94	368.41	903.35	816.90	1354.23	1265.89	
ЕН2	100	AD3	19891 ± 4	7.65	-873.49	-67.52	1332.48	1358.15	467.57	489.58	557.58	499.21	
	(265)	AD8	19944 ± 5	9.60	-879.15	-67.52	1337.43	1362.88	472.97	495.35	558.71	501.07	
ЕН3	324 (860)	AD4	19917 ± 4	936.75	-1419.01	-66.49	1919.63	1894.34	1533.18	1533.63	1551.38	1524.94	
		AD5	19989 ± 3	941.45	-1415.31	-66.50	1917.52	1891.98	1534.92	1535.03	1554.77	1528.05	
		AD6	19892 ± 3	940.46	-1423.74	-66.50	1925.26	1899.86	1538.93	1539.47	1556.34	1530.08	
		AD7	19931 ± 3	945.17	-1420.03	-66.49	1923.15	1897.51	1540.67	1540.87	1559.72	1533.18	

Таблица 6 — Измеренные координаты геометрических центров эксперимента Daya Bay. Детекторы нумеруются от AD1 до AD8, согласно порядку их сбора и инсталляции. Ось X направлена на север, ось Z вертикальна в начале ординат. Координаты были определены при помощи комбинации электронного теодолита и измерений спутниковой системы навигации (GPS) с точностью 18 мм. Приводятся соответствующие расстояния для пары реактор-детектор. Также даются приблизительная толщина защиты в м.в.э. и масса мишени в кг. Средняя термальная мощность каждого реактора (единица измерения, ГВт) приводится отдельно для периодов набора данных для шести и восьми детекторов.

невозможно. Оптимизация расположения детекторов уменьшила эту неопределенность в отношении “дальний детектор/ближний детектор” к числу $\leq 0.1\%$ (см. главу 8). Расположение шести реакторов и трех экспериментальных холлов показано на рис. 6.1.

Наибольшая относительная поправка, которая применялась при сравнении измерений в ближних и дальних детекторах, была поправка на телесный угол, под которым видны детекторы, как следует из ур. (6.4). Аккуратная геодезия экспериментального сайта позволила прецизионно учесть этот эффект. Геодезия состояла и измерений с электронным теодолитом в комбинации с дополнительными измерениями при помощи GPS. Ввиду отсутствия GPS-приемника под землей, геодезия экспериментальных холлов и туннелей для доступа к холлам полагалась на избыточных измерениях с электронным теодолитом. В таб. 6 приведены измеренные координаты реакторов и детекторов, где ось X направлена на север, ось Z вертикальна в начале ординат. Неопределенности в измеренных координатах порядка 18 мм, в основном, связаны с точностью GPS и разницей в результатах измерений при помощи GPS и электронного теодолита. Положение излучения $\bar{\nu}_e$ распределено вдоль топливных элементов каждого реактора, и покрывает область порядка 3.7 м по высоте и 3 м в диаметре. Реакторные модели ограничивают горизонтальный центроид изучения $\bar{\nu}_e$ двумя сантиметрами от геометрического центра каждого реактора. С учетом этого ограничения, пространственная вариация излучения $\bar{\nu}_e$ реактором пренебрежимо мала для осцилляционного измерения.

Комбинация органического сцинтиллятора с фотоэлектронными умножителями (ФЭУ) обеспечивает надежный метод детектирования реакторных $\bar{\nu}_e$. Сцинтилляторы содержат свободные протоны (в атомах ^1H), которые служат мишенью для ОБР (см. ур. (6.1)). В тоже время сцин-

тилляторы являются чувствительной средой, излучающей фотоны в ответ на ионизацию, вызванную продуктами ОБР. Детектирование фотонов при помощи ФЭУ дает калориметрическое измерение энергии, выделенной первичным позитроном, являющейся суммой кинетической и аннигиляционной энергий позитрона, $E_{\text{prompt}} = T_{e^+} + 2m_e$. Энергия взаимодействующего $\bar{\nu}_e$ с хорошей точностью может быть оценена при помощи $E_\nu \simeq E_{\text{prompt}} + 0.8 \text{ МэВ}$, с учетом кинематики ОБР. Кинетическая энергия нейтрона, рожденного в ОБР, мала – порядка $O(10 \text{ (кэВ)})$. Нейтрон термализуется и затем захватывается ядром в сцинтилляторе за время $O(100 \mu\text{с})$. Получившееся ядро быстро снимает возбуждение, излучая один или несколько γ -квантов. Детектирование задержанной вспышки света от сцинтиллятора, возникающей от захвата нейтрона, является уникальной сигнатурой взаимодействия $\bar{\nu}_e$, эффективно подавляющей фоновые процессы.

Восемь АД эксперимента Daya Bay, использующие эту методику детектирования, были специально оптимизированы таким образом, чтобы ограничить потенциальные вариации в отклике и эффективности детекторов. Как показано на рис. 6.2, каждый детектор состоит из трех, вложенных друг в друга, зон. Центральная зона, служащая мишенью для $\bar{\nu}_e$, содержит 20 тонн линейного алкилбензола (LAB), с примесью гадолиния (Gd) с массовым содержанием 0.1% (Gd-ЖС). Подробности производства и состава сцинтиллятора эксперимента Daya Bay приведены в работе [206]. Ядра гадолиния эффективно захватывают нейтроны, излучая несколько γ -квантов с полной энергией $\sim 8 \text{ МэВ}$ на захват. Относительно высокая энергия излучаемых фотонов усиливает возможность дискриминации сигнала от фона, порождаемого естественной радиоактивностью с энергией $\lesssim 5 \text{ МэВ}$. Добавление гадолиния в сцинтиллятор дает также физический метод создания доверительного объема детектора, позволяющий осуществлять эффективное отбрасывание взаимодействий $\bar{\nu}_e$, происходящих за пределами объема мишени. Сцинтиллятор, служащий мишенью, содержится в цилиндрическом объеме высотой и диаметром 3 м, ограниченном IAV, прозрачном для УФ диапазона. Мишенный объем был вложен в аналогичный акриловый резервуар размером 4 м×4 м, названный OAV, заполненный сцинтиллятором без добавления гадолиния (ЖС). Этот внешний сцинтиллирующий объем существенно увеличил эффективность детектирования γ -квантов, рожденных в мишенной части, уменьшив систематические неопределенности, связанные с границей мишени. Таким образом, этот объем мы называем захватчиком γ -квантов (gamma catcher). Оба объема были помещены внутрь SSV 5 м×5 м, заполненного минеральным маслом (ММ). Плотность ММ совпадает с плотностью ЖС и Gd-ЖС, что уравнивает напряжение на тонких стенках ($\sim 1.5 \text{ см}$) акрилового контейнера. Минеральное масло также защищает сцинтиллирующие объемы от γ -квантов, от радиоактивности в SSV и ФЭУ и обеспечивает прозрачной средой для распространения сцинтилляционного света к ФЭУ.

Сцинтилляционный свет регистрируется 192 8-дюймовыми ФЭУ (Hamamatsu R5912), погруженными в ММ и установленными на восьми кольцах (с 24 ФЭУ на каждом) на внутренней поверхности SSV. Зеркальные отражатели, установленные сверху и снизу OAV, улучшили однородность сбора света относительно положения источника света в сцинтилляционном объеме. В радиальном направлении были установлены черные светопоглощающие щиты, маскирующие внутреннюю поверхность SSV, кроме ФЭУ, что упрощает и объединяет оптические характеристики восьми детекторов. Сверху детекторов установлены резервуары для излишков жидкости, что позволяет немного изменять объем каждой области в ответ на изменения температуры и давления.

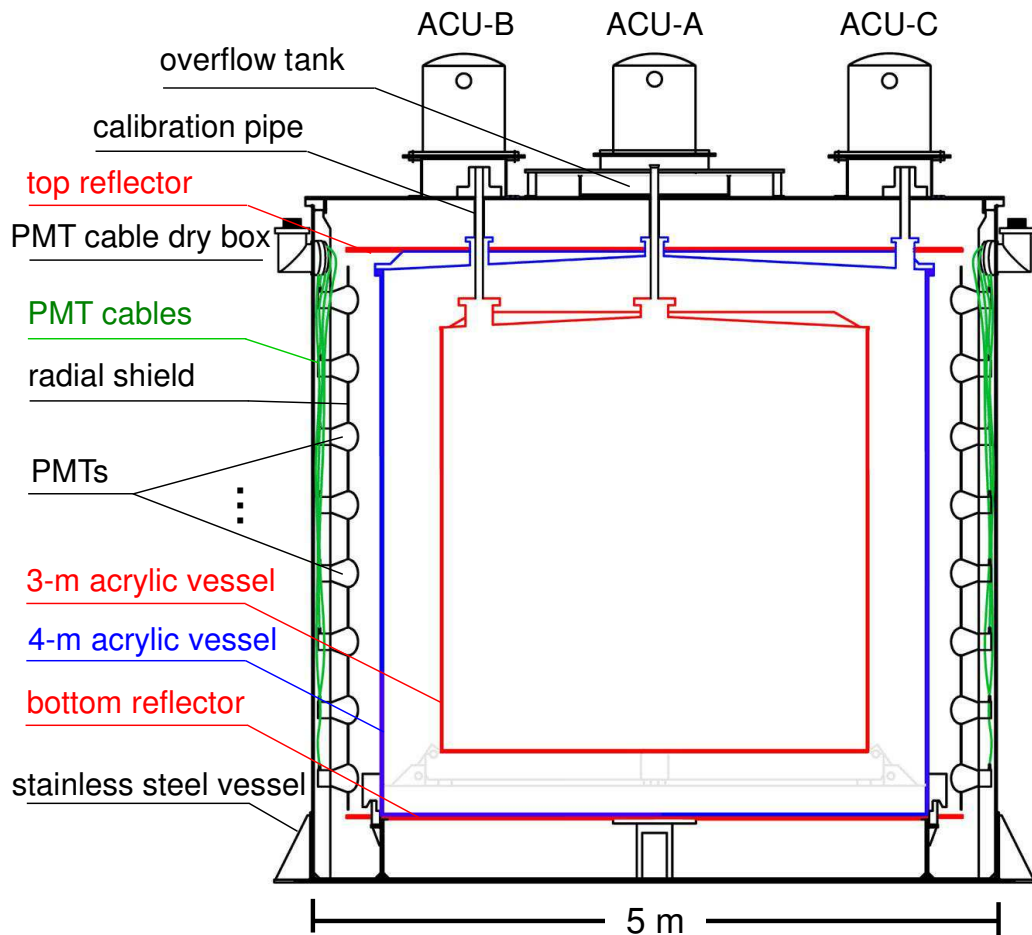


Рисунок 6.2 — Сечение антинейтринного детектора (AD). Сцинтилляционный свет рождается, когда реакторное $\bar{\nu}_e$ взаимодействует в центральном 20 тонном объеме жидкого сцинтиллятора с добавлением гадолиния (Gd-ЖС), заключенном в прозрачном акриловом контейнере. Мишенная часть окружена дополнительными 20 тоннами чистого ЖС для увеличения эффективности детектирования γ -квантов, рожденных в центральной части. Сцинтилляционный свет регистрируется 192 ФЭУ, установленными на внутренней поверхности контейнера из нержавеющей стали (SSV), заполненного минеральным маслом.

Три автоматические калибровочные системы (ACU) использовались для развертывания радиоактивных источников (^{60}Co , ^{68}Ge , и ^{241}Am - ^{13}C) и светодиодов (LED) через узкие тефлоновые каналы в области Gd-ЖС и ЖС. Детали калибровочной системы даны в работе [207].

Небольшая разница ($<0.5\%$) в полном числе протонов в каждом AD была наибольшей поправкой при сравнении измерений в дальнем и ближнем детекторах (т.е. N_p в ур. (6.4)). После механической сборки и тестов в SAB, каждый сухой AD перевозился в подземный холл для заполнения жидким сцинтиллятором. Весь Gd-ЖС был произведен заранее и поделен поровну между восемью AD, чтобы обеспечить одинаковые плотности числа протонов и ядер гадолиния, а также оптические свойства детектора. Каждый AD заполнялся Gd-ЖС из резервуара, установленного на прецизионные датчики нагрузки, точность которых была предварительно проверена на тестовых массах. Наибольшая систематическая ошибка ± 2 кг в измерении массы Gd-ЖС связана с дрейфом считывания показаний датчиков. В качестве независимого измерения относительной разницы в массе заполняемой жидкости в каждом AD использовался расходомер Кориолиса, обладающий

точностью в несколько кг, худшей, чем у прецизионных датчиков нагрузки. Была учтена также поправка в 0.13%, учитывающая массу газообразного азота, которым выдувался Gd-ЖС из резервуара во время заполнения. После заполнения была учтена еще одна поправка, учитывающая маленькую долю Gd-ЖС, оставшуюся в калибровочных трубках и баке переполнения, и таким образом, не попавшую в IAV. В таб. 6 приведена измеренная масса Gd-ЖС для каждого IAV. Поправка в 3 кг на массу мишени внесла пренебрежимо малую неопределенность на уровне 0.015% при сравнении чисел взаимодействия антинейтрино в AD.

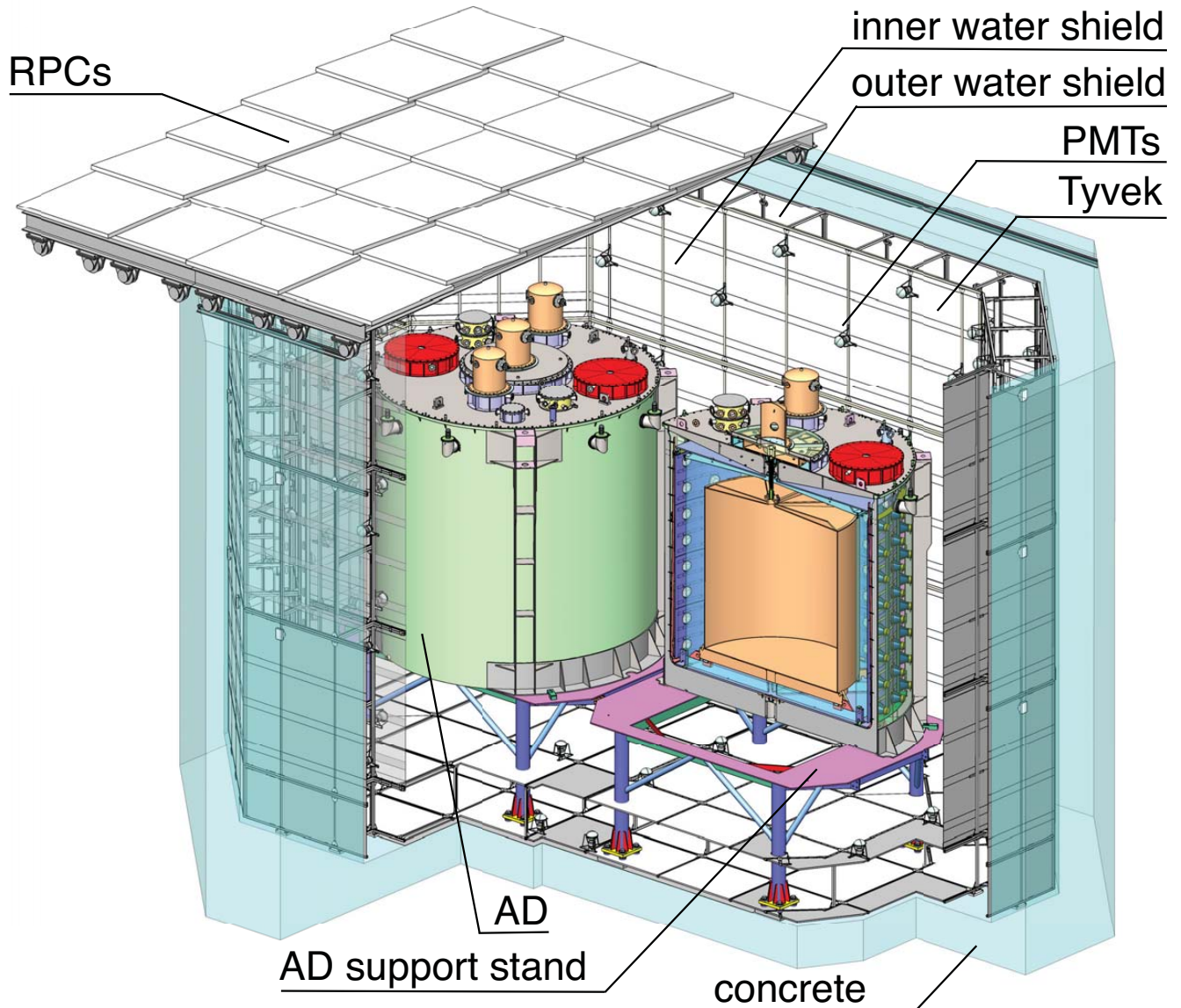


Рисунок 6.3 — Ближние детекторы. Два антинейтринных детектора погружены в водно-черенковский детектор, который служит как для пассивной защиты от радиации, так и в качестве активной вето системы против космогенных мюонов. Шторка из тайвека делит бассейн на два оптически разделенных детектора, внутренний и внешний водные буферы. Сверху бассейн накрыт системой резистивных плоских камер (РПК), обеспечивающих дополнительную идентификацией мюонов.

После заполнения, антинейтринные детекторы были установлены в водный бассейн глубиной 10 м в каждом подземном экспериментальном холле, как показано на рис. 6.3. Вода защищает детекторы от γ -квантов, возникающих от естественной радиоактивности, и нейтронов, вызванных

космогенными мюонами и проникающими в детектор от окружающей горной породы. Шторка из тайвека делит бассейн на два оптически разделенных детектора, IWS и OWS. В обеих областях установлены ФЭУ для детектирования черенковского света, порождаемого космогенными мюонами. Четырехслойная система из РПК установлена поверх бассейна, обеспечивая дополнительной идентификацией мюонов и используемая в исследованиях фона, вызванного мюонами. Идентификация мюонов, оставивших отклик в IWS, OWS и РПК усиливает подавление фона от нейтронов, рожденных во взаимодействиях мюонов в непосредственной близости от антинейтринных детекторов. Подробное описание мюонной системы приведено в работе [208]. Фоны, индуцированные мюонами, обсуждаются в разделе 7.

Единый коаксиальный кабель обеспечивает ФЭУ высоковольтным питанием положительной полярности и передает сигнал от ФЭУ. Пассивная цепь переменного тока отделяет быстрый сигнал с ФЭУ от постоянного высоковольтного напряжения и передает его на входной канал считывающей электроники (FEE). Высоковольтное напряжение каждого ФЭУ настроено для чувствительности к одиночным фотоэлектронам (ф.э.), с усилением $\sim 1.0 \times 10^7$ с точностью 5%. После начального быстрого усиления, FEE разделяет сигнал для отдельных измерений заряда и относительного времени прихода. Одна копия сигнала поступает на дискриминатор с порогом ~ 0.25 ф.э., что служит стартовым сигналом для время-цифрового преобразователя (TDC) с разрешением 1.6 нс. Вторая копия сигнала поступает на RC-цепочку, в которой измеряется интегральный заряд с константой интегрирования ~ 100 нс [209]. Сигнал усиливается в 10 раз и оцифровывается 12-битным аналого-цифровым преобразователем (АЦП) на частоте 40 МГц, что обеспечивает разрешение лучше 0.1 ф.э. Для увеличения динамического зарядового диапазона для очень больших сигналов, дополнительная копия выхода с RC-цепочки умножается на фактор 0.5 и оцифровывается эквивалентным АЦП. Пиковое значение каждого АЦП, а также измерение пьедестала каждого АЦП, предшествующее сигналу, запоминается в специальном буфере и ожидает сигнала триггера от детектора.

Каждый детектор (AD, IWS, OWS) функционирует как независимая триггерная система, используя локальную триггерную микросхему (LTB). Каждый FEE принимает сигналы от одного до 16 ФЭУ, а затем передает число каналов с сигналами выше порога, а также аналоговую сумму сигналов, в LTB. Триггерный сигнал вырабатывался для каждого детектора при выполнении следующих условий.

- AD: Полное число каналов с сигналом выше порога (NHIT) ≥ 45 или аналоговая сумма (ESUM) ≥ 65 ф.э. (~ 0.4 МэВ).
- IWS: NHIT ≥ 6 для IWS.
- OWS: NHIT ≥ 7 для OWS из ближних холлов или ≥ 8 для OWS из дальнего холла.
- РПК: 3 из 4 слоев модуля выше порога.
- Случайный: Случайный триггер с частотой ~ 10 Гц для мониторинга уровня активности каждого детектора под порогом.
- Калибровочный: одновременно с каждым импульсом света, излучаемым светодиодом.
- Меж-детекторный: Плата управляющего триггера (Master Trigger Board) (МТВ) с каждого сайта может передавать триггерный сигнал от одного детектора к другому. Целью этого триггера было исследовать подпороговую активность мюонной системы, когда один

из AD детектирует кандидата в реакторное $\bar{\nu}_e$ (например, два AD триггера разделены во времени $\leq 200 \mu\text{s}$).

Когда детектор получает сигнал триггера, он вырабатывает сигнал остановки для TDC. После этого, время TDC, пик и пьедестал АЦП каждого канала с сигналом выше порога за предшествующие $1.2 \mu\text{s}$ запоминаются. Цифровая карта с отсчетами для каждого РПК модуля, который удовлетворяет триггерному условию, также запоминается. GPS-синхронизированная метка времени триггера (с точностью 25 нс) использовалась в качестве измерения абсолютного времени события с триггером.

Представленный в данной работе анализ основан на комбинации данных за два периода работы эксперимента. Первый период набора данных состоит из 217 дней, набранных с декабря 2011 по июль 2012. В это время работали 6 AD: 2 в ЕН1, 1 в ЕН2, и 3 в ЕН3. Последние два AD, AD7 и AD8, были собраны и установлены в ЕН3 и ЕН2, соответственно, в течении лета 2012. Дополнительные 1013 дней данных были набраны с октября 2012 по июль 2015. Для этих двух периодов, 189 дней (87%) и 920 дней (91%) рабочего времени были приняты для осцилляционного анализа. Большая часть времени простоя связана с еженедельными калибровками детектора.

6.3 Калибровка детектора

Задача калибровки заключается в уточнении оцифрованных времен и зарядов, чтобы с их помощью получить аккуратные, согласованные и стабильные оценки времени, энергии и положения взаимодействия частиц в детекторе. В этом разделе мы обсуждаем детали калибровочного процесса. Описания калибровочных систем приведены в работах [207] и [208].

6.3.1 Временная калибровка

Согласно обсуждению в предыдущем разделе, время триггера каждого детектора известно с точностью 25 нс. Светодиоды с высокой частотой развертки использовались для измерения относительного времени отклика фотоумножителей внутри одного детектора. Временные задержки, наблюдаемые в каждом канале, поправлялись на расстояние от светодиода до ФЭУ и подгонялись с учетом интенсивности света. Полученные результаты сохранялись в базе данных и использовались для поправки TDC отсчетов при анализе данных. Временная калибровка повторялась при каждой модификации детекторной системы (например, замены FEE, LTB, или MTB).

6.3.2 Калибровка энергии

Наиболее важной задачей калибровки детектора было уменьшить потенциальную разницу в эффективности детектирования $\bar{\nu}_e$ разными AD, как видно из ур. (6.4). Поэтому был реализован калибровочный процесс для уменьшения вариации между детекторами в оценке энергии эквивалентных взаимодействий частиц. На низшем уровне, некалиброванный заряд от каждого ФЭУ с номером i определялся как разность между пиковым значением АЦП и пьедесталом АЦП переданным FEE, $Q_i = ADC_i^{\text{peak}} - ADC_i^{\text{ped}}$. Каждый AD это калориметрический детектор, поэтому оценка полной энергии выделенной во взаимодействии частиц, E_{rec} , пропорциональна калиброванной сумме зарядов, измеренной каждым ФЭУ, Q_i . Эта сумма может быть выражена как

$$E_{\text{rec}} = \left(\sum_i \frac{Q_i}{\bar{Q}_i^{\text{SPE}}(t)} \right) \frac{f_{\text{act}}(t)}{N^{\text{PE}}(t)} f_{\text{pos}}(\mathbf{r}_{\text{rec}}, t), \quad (6.5)$$

и включает в себя следующие калибровочные поправки.

- Усиление ФЭУ, $\bar{Q}_i^{\text{SPE}}(t)$: переводной фактор при преобразовании от заряда к детектированным ФЭУ фотонам, уникальный для каждого ФЭУ с учетом электроники. Один ф.э. (single photoelectron – SPE) соответствует примерно 19 отсчетам АЦП.
- Поправка на число активных ФЭУ, $f_{\text{act}}(t)$: безразмерная поправка, компенсирующая уменьшение в числе собранного света в случае, когда некоторые каналы ФЭУ были временно выключены. Этот фактор вычисляется как отношение полного к активному числам ФЭУ и представляет собой небольшую поправку на уровне $(1/192) \simeq 0.5\%$ для одного неактивного ФЭУ в AD.
- Световыход, $N^{\text{PE}}(t)$: переводной фактор при преобразовании от количества зарегистрированных фотонов к средней энергии взаимодействия, что составляет примерно 170 ф.э. на МэВ выделенной энергии.
- Поправка на неоднородность AD, $f_{\text{pos}}(\mathbf{r}_{\text{rec}}, t)$: безразмерный фактор, компенсирующий наблюдаемую вариацию собранного света относительно оценки положения взаимодействия частицы \mathbf{r}_{rec} в AD. Поправка оказалась на уровне $\pm 5\%$ в области мишени, и от -6% до $+15\%$, с учетом взаимодействий в OAV.

В следующих разделах мы обсуждаем, как эти калибровочные факторы были определены и проверены.

Калибровка усиления ФЭУ

Первый шаг в цепочке калибровки энергетической шкалы состоял в учете разницы на уровне в несколько процентов в коэффициенте усиления для разных ФЭУ и связанной с ними электроникой, как функции времени, $\bar{Q}_i^{\text{SPE}}(t)$. Высоковольтные напряжения, необходимые для достижения общего усиления 1×10^7 , $\pm 5\%$, были определены для каждого ФЭУ до установки в детек-

тор. Каждый канал электроники обладает дополнительной вариацией усиления на уровне 3%. Поскольку отклик каждого канала дрейфует при изменении внешних условий, таких как замена оборудования, был развит метод калибровки, который функционирует параллельно обычному набору данных. В этом методе усиление определялось с использованием индивидуальных сигналов с ФЭУ, некоррелированных со взаимодействиями частиц в сцинтилляторе. Этими сигналами были, в первую очередь, одиночные ф.э. от теплового излучения, также называемого темновым шумом ФЭУ, регистрируемые системой сбора данных за несколько сотен наносекунд до взаимодействия частицы, вызвавшей триггерный сигнал детектора. Распределения зарядов (за вычетом постоянной компоненты) этих некоррелированных сигналов для каждого канала используются для оценки временного дрейфа усиления одиночных ф.э. (SPE). Усиление оценивается каждые ~ 6 часов, поскольку это минимальное время, требуемое для набора необходимого количества некоррелированных сигналов для каждого канала ФЭУ. Распределение вероятности заряда Q , произведенного сигналом в ФЭУ, моделируется сверткой распределений Пуассона и Гаусса [210],

$$S(Q) = \sum_n \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!} \frac{1}{\sigma_{\text{SPE}} \sqrt{2n\pi}} \exp\left(-\frac{(Q - n\bar{Q}^{\text{SPE}})^2}{2n\sigma_{\text{SPE}}^2}\right), \quad (6.6)$$

где μ – среднее число ф.э., собранное на первом диноде, и \bar{Q}^{SPE} и σ_{SPE} это одноэлектронные средний заряд и разрешение в единицах отсчетов АЦП. Для каждого ФЭУ были определены значения этих параметров, наилучшим образом описывающие наблюдаемые распределения $S(Q)$. Сигналами от темнового шума ФЭУ были, в основном, одиночные ф.э. Поэтому сумма в ур. (6.6) может быть оборвана при $n \leq 2$ без потери точности. Шум добавлял флуктуаций в распределения при числе отсчетов АЦП меньше 10, поэтому результаты были более стабильными, если эта область не принималась во внимание при подгонке параметров модели. Пример одно-фотоэлектронного распределения заряда в данных и соответствующая модель приведены на рис. 6.4.

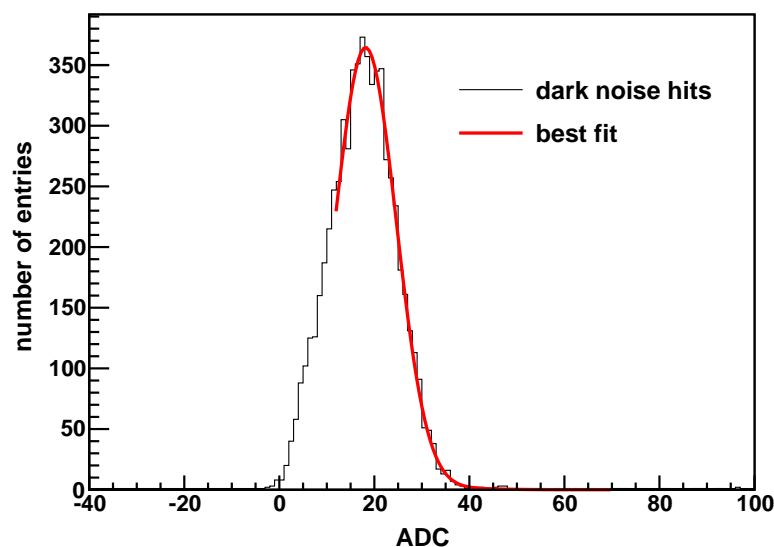


Рисунок 6.4 — Пример распределения заряда (за вычетом постоянной подложки) АЦП некоррелированных сигналов от ФЭУ (гистограмма). Результаты модели, описываемые ур. (6.6), показаны сплошной линией.

Эта процедура применялась к каждому каналу ФЭУ. На рис. 6.5 в зависимости от времени показан одноэлектронный средний заряд, усредненный также по всем каналам в каждом AD. Характерная калибровочная константа – 19 отсчетов АЦП на одиночный ф.э., хотя средний коэффициент усиления отличается на несколько процентов в разных AD. Для всех детекторов наблюдается небольшое увеличение коэффициента усиления со временем. Этот дрейф частично, но не полностью, объясняется изменениями в температуре FEE. Скачки среднего заряда, коррелированные между AD в одном экспериментальном холле, объясняются изменениями высоковольтного напряжения. Независимый метод определения коэффициента усиления ФЭУ, основанный на еженедельных калибровках светодиодами низкой интенсивности, воспроизводит все наблюдаемые особенности.

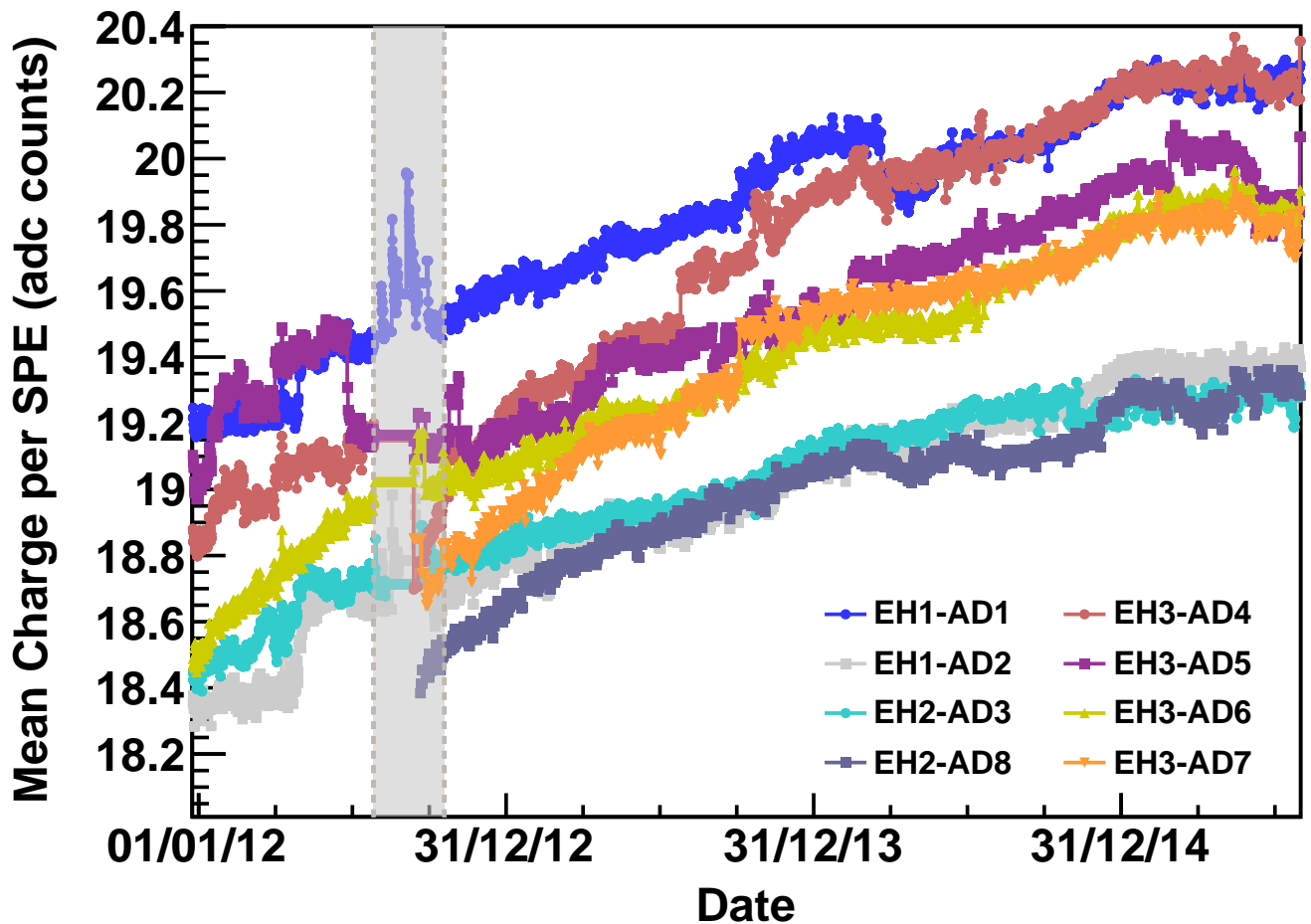


Рисунок 6.5 — Одноэлектронный средний заряд, усредненный также по всем каналам в каждом AD, как функция времени. Затемненная область ограничивает период лета 2012, в течение которого проводились работы по инсталляции детекторов, включались/выключались источники питания, прерывался набор данных.

Поправка на число активных ФЭУ

Обеспечение данных высокого качества потребовало внедрения специального процесса мониторинга. В этом процессе, подозрительные каналы ФЭУ временно удалялись из анализа из-за плохого усиления, высокого уровня шума или других особенностей, идентифицированных автоматическим алгоритмом, выполняющимся параллельно с набором данных. Чаще всего, причина выключения канала ФЭУ была в нестабильности высоковольтного питания. Полное число выключенных из анализа в какой-то момент времени каналов ФЭУ флуктуировало около пяти, с учетом всех восьми детекторов, и очень редко было больше одного для данного детектора. Отсутствие одного канала ФЭУ смещало оценку полного числа сцинтилляционных фотонов в среднем на $1/192 \approx 0.5\%$. Поправка наблюдаемого числа ф.э. с использованием простого фактора $f_{\text{act}}(t) = N_{\text{total}}/N_{\text{active}}(t)$, где N_{active} – число активных каналов ФЭУ, и $N_{\text{total}} = 192$, была достаточной для компенсации этого смещения.

Определение световыхода

Среднее число детектированных ф.э., при одном взаимодействии частицы определенной энергии, немного варьируется между детекторами, а также зависит от периода времени набора данных в детекторе. Среднее число наблюдаемых ф.э. на МэВ выделенной энергии, $N^{\text{PE}}(t)$, оценивалось двумя независимыми и дополняющими друг друга методами: (i) еженедельной установкой ^{60}Co в центре детектора (калибровка А) и (ii) детектированием событий равномерно распределенных нейтронов от развалов ядер, накапливаемых параллельно с набором антинейтринных данных (калибровка В).

Световойход определялся измерением среднего значения известного пика в соответствующем энергетическом спектре, или 2.506 МэВ для ^{60}Co , или два пика 7.95 МэВ и 8.54 МэВ для захвата нейтрона на гадолинии. γ -кванты, выходящие за границы объемов, содержащих ЖС, вносили низко-энергетический хвост в распределение, который учитывался при помощи функции Crystal Ball для каждого пика [211]. Получившиеся энергетические переводные константы, полученные при помощи данных с источниками ^{60}Co и нейтронами от развала ядер, приведены на рис. 6.6. Наблюдаемый световойход немного зависит от энергии и типа частицы (см. раздел 6.3.4). С учетом того, что эта зависимость очень похожа для всех детекторов, мы выбрали световойход, соответствующий пику захвата нейтрона ядром гадолиния в качестве общего соглашения. Таким образом, световойход, полученный при помощи источника ^{60}Co был перенормирован с использованием световыхода, измеренного при помощи источника нейтронов $^{241}\text{Am-}^{13}\text{C}$, помещенного в центр детектора. Уменьшение световыхода на уровне от 1% до 1.5% в год наблюдается для обоих методов. Причина этого до конца не понятна. Уменьшение световыхода проявляется сильнее для метода с использованием источника ^{60}Co , устанавливаемого в центре детектора, по сравнению с равномерно распределенными нейтронами от развалов ядер, что наводит на мысль о том,

что наблюдаемый эффект связан с небольшой деградацией светопропускания жидкого сцинтиллятора. Наблюдаемый дрейф световыходов приводит к временной зависимости пространственной однородности и незначительной деградации разрешения энергии. Ни один из этих второстепенных эффектов не имел заметного влияния на осцилляционный анализ, обсуждаемый в этой части. Аналогично, мы не ожидаем, что эти эффекты могут иметь серьезные последствия для работы детекторов в будущем.

Пространственная неоднородность

Наблюдаемый световойход зависит от положения взаимодействия частицы в детекторе. Такая пространственная неравномерность приписывается оптическим характеристикам детектора, в первую очередь, геометрическому акцептансу ФЭУ. Этот эффект похож для всех детекторов и воспроизводится при помощи моделирования детектора. Поправка на этот эффект улучшает разрешение энергии в каждом детекторе, а также приводит к более похожему отклику детекторов.

Для поправки на пространственную неоднородность необходим метод определения положения частицы в детекторе. Для этой цели были развиты два независимых метода реконструкции. Метод реконструкции **A** вычисляет центр заряда (COC – center-of-charge) для каждого сигнала,

$$r_{\text{COC}} = \left(\sum_i r_i \frac{Q_i}{Q_i^{\text{SPE}}(t)} \right) / \left(\sum_i \frac{Q_i}{Q_i^{\text{SPE}}(t)} \right). \quad (6.7)$$

Наблюдаемое значение r_{COC} переводится в реконструированное положение r_{rec} в цилиндрических координатах с использованием соотношений

$$\begin{aligned} r_{\text{rec}} &= c_1 \times r_{\text{COC}} - c_2 \times r_{\text{COC}}^2, \\ z_{\text{rec}} &= (z_{\text{COC}} - c_3 \times z_{\text{COC}}^3) \times (c_4 - c_5 \times r_{\text{COC}}), \\ \phi_{\text{rec}} &= \phi_{\text{COC}}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Моделирование, основанное на программе Geant4 [212], мотивировало функциональную форму этой модели с пятью параметрами c_i . Значения c_i определялись из данных, когда источник ^{60}Co помещали в известные положения внутри детекторов. В другом методе реконструкции **B** делается сравнение распределения заряда, наблюдаемого 192 ФЭУ с библиотечными распределениями, полученными из моделирования процессов в детекторе. Моделирование взаимодействий в детекторе на сетке с 20 интервалами по каждой из переменных r и z , и 24 интервалами по переменной ϕ позволило построить специальную библиотеку из 9600 зарядовых шаблонов. Наблюдаемое распределение заряда сравнивается с шаблоном с использованием

$$\chi^2 = -2 \sum_i \ln \frac{P(N_i^{\text{obs}}, N_i^{\text{temp}}(r_{\text{rec}}))}{P(N_i^{\text{obs}}, N_i^{\text{obs}})}, \quad (6.9)$$

где $P(n, \mu)$ пуассоновская вероятность обнаружить n ф.э. при среднем значении μ , N_i^{obs} – наблюдаемое число ф.э. в ФЭУ с порядковым номером i , и $N_i^{\text{temp}}(r, z, \phi)$ – ожидаемое число ф.э. в соответствующем ФЭУ согласно предсказанию модельного шаблона. Функция χ^2 интерполируется для

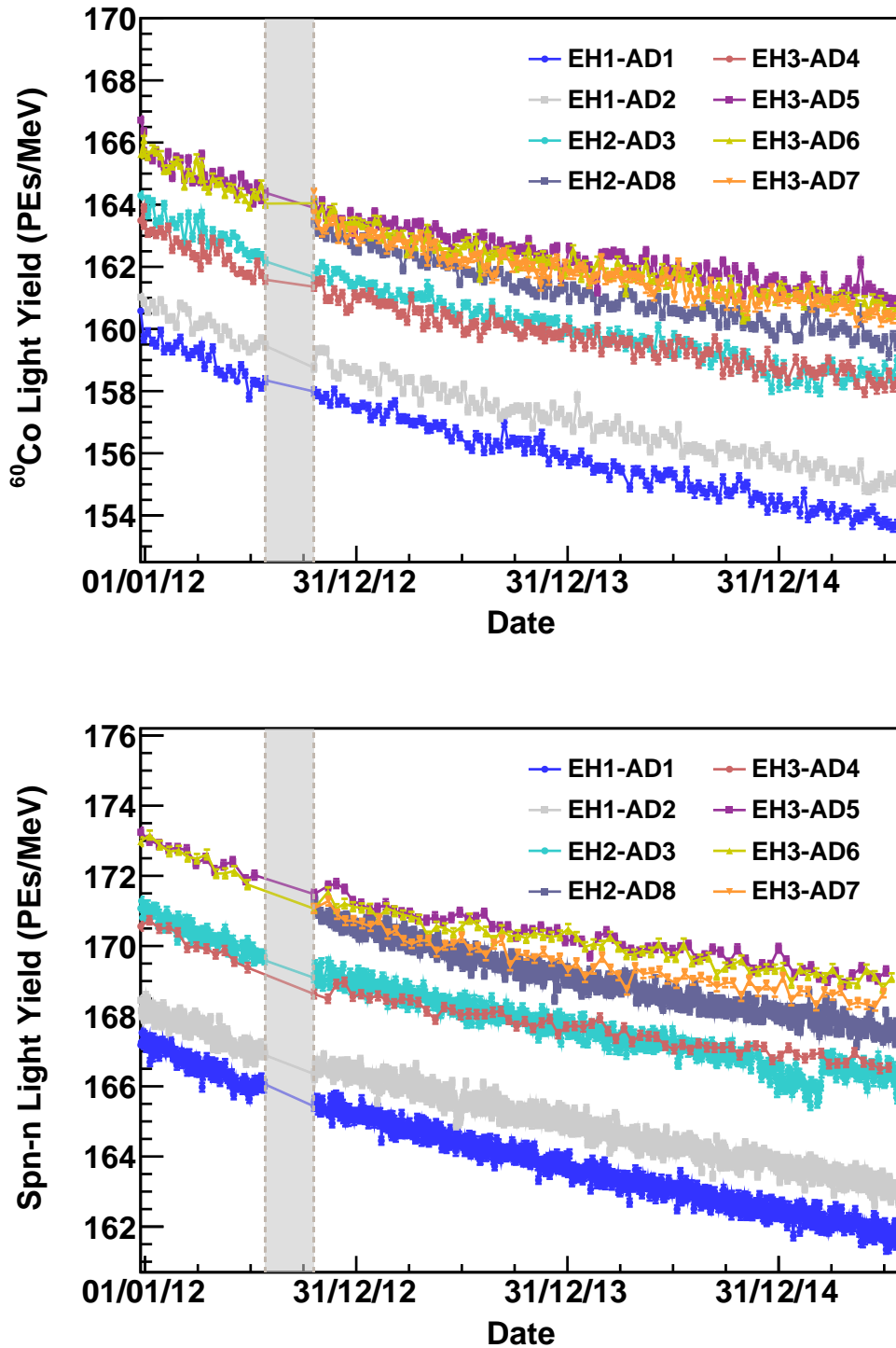


Рисунок 6.6 — Наблюдаемый световыход в зависимости от времени, в единицах числа наблюдаемых ф.э./МэВ, полученный при помощи источника ^{60}Co , еженедельно устанавливаемого в центр детектора (верхний рисунок), и при помощи захватов медленных нейтронов, равномерно распределенных в объеме детектора, ядрами гадолиния (нижний рисунок). Световыход уменьшается $\sim 1\%$ в год, что согласованно наблюдается всеми детекторами. Разница в световыходе, измеренная двумя калибровками, возникает из-за нелинейности в отклике детекторов. Вертикальные затененные области соответствуют летнему периоду 2012 года, в течение которого были установлены последние два детектора, что приводило к частичной остановке в наборе данных.

тех значений r_{rec} , которые находятся между положениями, выбранными для моделирования шаблонов. Реконструированное положение определяется из минимума χ^2 . Работоспособность обоих методов реконструкции была изучена с использованием калибровочных данных. Оба метода обладают схожим качеством реконструкции. В частности, оба метода реконструируют положение сигнала от источника ^{60}Co со смещением < 20 см и разрешением < 40 см в объемах детектора, содержащих жидкий сцинтиллятор. Оба метода учитывают неработающие каналы ФЭУ либо не включая их в вычисление r_{COC} (реконструкция А), либо удаляя такие каналы из данных и шаблонов (реконструкция В).

Реконструированное положение используется для поправки наблюдаемой вариации в световых выходе относительно положения взаимодействия частицы в детекторе. Поправка $f_{\text{pos}}(r_{\text{rec}}, t)$ может быть представлена в виде произведения функций, учитывающих азимутальную, z - r , и t - r вариации,

$$f_{\text{pos}}(r_{\text{rec}}, t) = [f_a(\phi) f_b(z, r) f_c(t, r)]^{-1}. \quad (6.10)$$

Зависимость $\sim 1\%$ световых выхода от азимутального угла ϕ наблюдалась для всех детекторов и оказалась коррелированной с ориентацией ФЭУ относительно локального геомагнитного поля. Этот эффект моделируется согласно формуле

$$f_a(\phi) = 1 + \alpha^a \sin(\phi - \phi_0), \quad (6.11)$$

где параметры α^a и ϕ_0 были определены из наблюдаемой вариации световых выхода в событиях захвата нейтронов от развалов ядер. Вариация световых выхода относительно r и z была большей. Для этой компоненты, реконструкция А использует параметризацию, основанную на моделировании,

$$f_b(z, r) = (\alpha_0^b r^2) \times (\alpha_1^b + \alpha_2^b z + \alpha_3^b z^2 + \alpha_4^b z^3), \quad (6.12)$$

где параметры α_i^b были определены с использованием источников ^{60}Co , устанавливаемых в известные положения в каждом детекторе. Модельная вариация для детектора ЕН1-AD1 приведена на рис. 6.7.

В реконструкции В используются сигналы от захвата нейтронов от развалов ядер. Для создания карты неоднородности пространство z и r^2 разбивается на 100 ячеек. Для каждой ячейки строится отношение наблюдаемого световых выхода к среднему для всего объема мишени, как проиллюстрировано на рис. 6.8 для детектора ЕН1-AD1.

Поправочная карта для внутреннего Gd-ЖС и внешнего ЖС объемов детектора строится при помощи событий с захватом нейтронов ядрами гадолиния и водорода, соответственно. Усредненная карта используется в переходной области. Оба метода согласуются друг с другом в оценке пространственной неоднородности. Вариации порядка 10% и 17% наблюдаются в вертикальном и горизонтальном направлениях во внутреннем Gd-ЖС и внешнем ЖС объемах детектора. Разница в неоднородностях на уровне нескольких процентов наблюдается на краях детектора, как показано на рис. 6.9. Пространственная неоднородность в световых выходе немного зависит от времени. С учетом того, что средний дрейф световых выхода со временем уже учитывается в $N^{\text{PE}}(t)$, время-зависимая поправка на неоднородность учитывает только относительные различия в дрейфах между положениями в детекторе. Таким образом, оказалось, что изменение поправки на неоднородность свето-

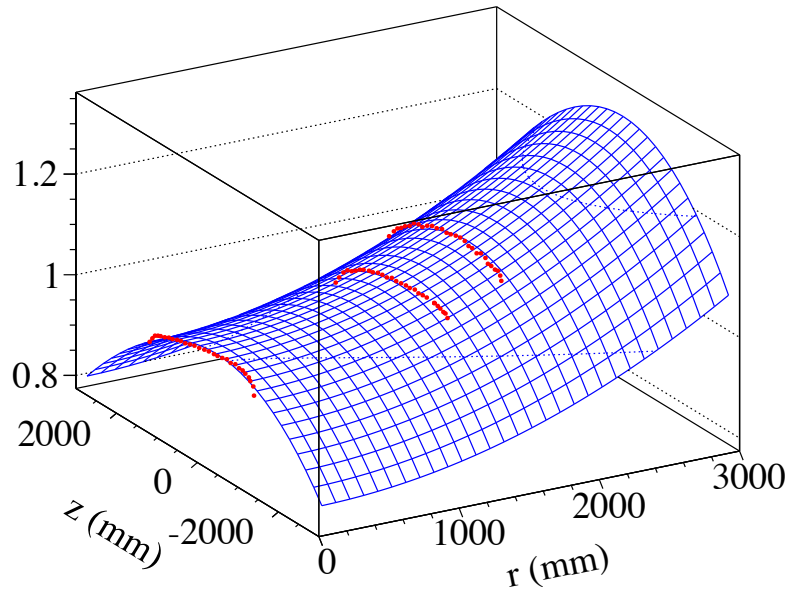


Рисунок 6.7 — Вариация световыхода относительно вертикального (z) и радиального (r) положения взаимодействия в детекторе ЕН1-AD1 для реконструкции А (голубая поверхность). Функциональная форма вариации $f_b(z,r)$ основана на результатах моделирования, с параметрами уточненными сравнением с калибровочными данными по измерению выхода света от источника ^{60}Co , устанавливаемого в точках АСU А ($r=0$ мм), АСU В ($r=1350$ мм) и АСU С ($r=1772.5$ мм) (красные точки). Хотя модельная поправка варьировалась от -6% до 17% в объеме детектора, она оказалась универсальной для всех детекторов, отличаясь не более чем на 3.2% между всеми восемью детекторами.

сбора адекватно моделируется зависимостью

$$f_c(t,r) = (\alpha_0^c + \alpha_1^c r^2) t. \quad (6.13)$$

Параметры α_i^c были определены с использованием данных от источников ^{60}Co за первые три года работы эксперимента, а для реконструкции В использовались сигналы от захватов нейтронов ^1H . Временная зависимость оказалась практически одинаковой для всех детекторов, поэтому в анализе были использованы значения параметров модели пространственной неоднородности, общие для всех детекторов. Поправка была наибольшей для сигналов на границе ЖС объема, для которой наблюдается дрейф $<0.5\%$ в год в энергетическом отклике детектора.

Качество калибровки

Как обсуждалось в предыдущем разделе, усиление ФЭУ, качество канала, световыход в АД и поправка на пространственную неоднородность – все эти параметры зависят от времени. Качество всего процесса калибровки энергии проверялось изучением стабильности реконструированной энергии в зависимости от времени для широкого круга калибровочных данных. На рис. 6.10 показана, реконструированная методами А и В, средняя энергия захвата водородом нейтронов от

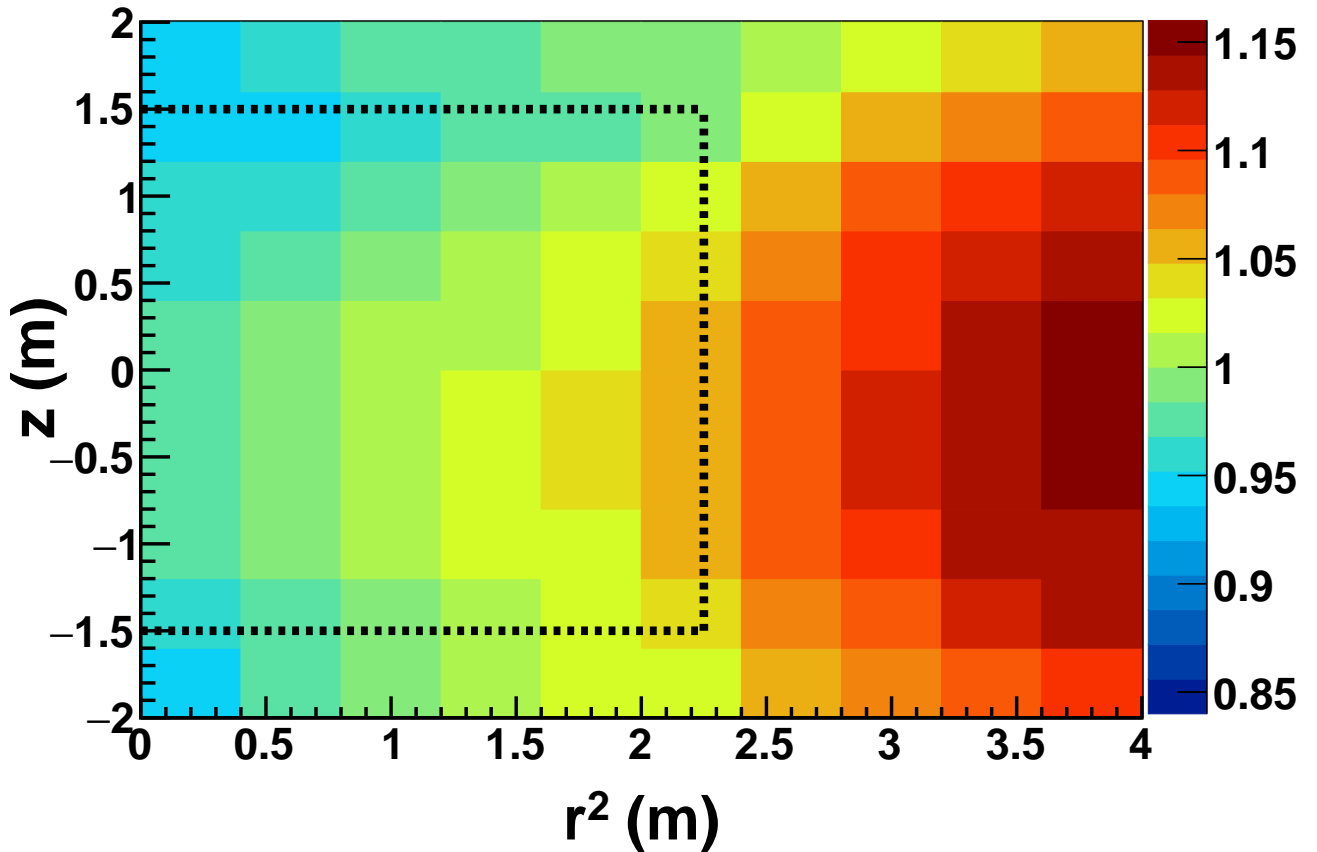


Рисунок 6.8 — Вариация световыхода относительно вертикальной (z) и радиальной (r^2) положений захвата нейтронов в детекторе EN1-AD1 для метода реконструкции В. Каждая ячейка соответствует отношению наблюдаемого световыхода к среднему по Gd-ЖС детектору. Пунктирные линии соответствуют границе между внутренним Gd-ЖС и внешним ЖС объемов детектора. Нейтроны, захваченные ядрами гадолиния использовались для карты Gd-ЖС объема, а захваты на водороде были использованы для карты внешнего ЖС объема. Небольшая разница ($<3.0\%$) в неоднородностях наблюдается для восьми детекторов.

развалов ядер за весь период набора данных, рассмотренный в этом анализе. Оба метода демонстрируют на рис. 6.10 стабильную во времени ($\leq 0.2\%$) энергию n-H захвата. Калибровка была необходима также для того, чтобы убедиться в максимальной идентичности реконструированной энергии взаимодействующего антинейтрино. Небольшие отличия в энергетическом отклике детекторов могут приводить к искажениям в относительной эффективности дальних и нижних детекторов, смещая оценку θ_{13} , как легко видеть из ур. 6.4. Также, небольшие отличия в энергетическом отклике детекторов могут приводить к искусственным искажениям антинейтринного энергетического спектра в ближних и дальних детекторах, ухудшая измерение Δm_{ee}^2 . Разница в откликах антинейтринных детекторов оценивалась при помощи 13 различных калибровочных эталонов. Данные от источников, используемых на еженедельной основе, включают γ -кванты от ^{68}Ge и ^{60}Co , а также нейтроны от ^{241}Am - ^{13}C . Сигналы от естественной радиоактивности, включающие α -распады ^{212}Po , ^{214}Po , ^{215}Po и ^{219}Po и γ -кванты от ^{40}K и ^{208}Tl , также сравнивались между детекторами. Нейтроны от ОБР и развалов ядер мюонами, которые захватываются ядрами водо-

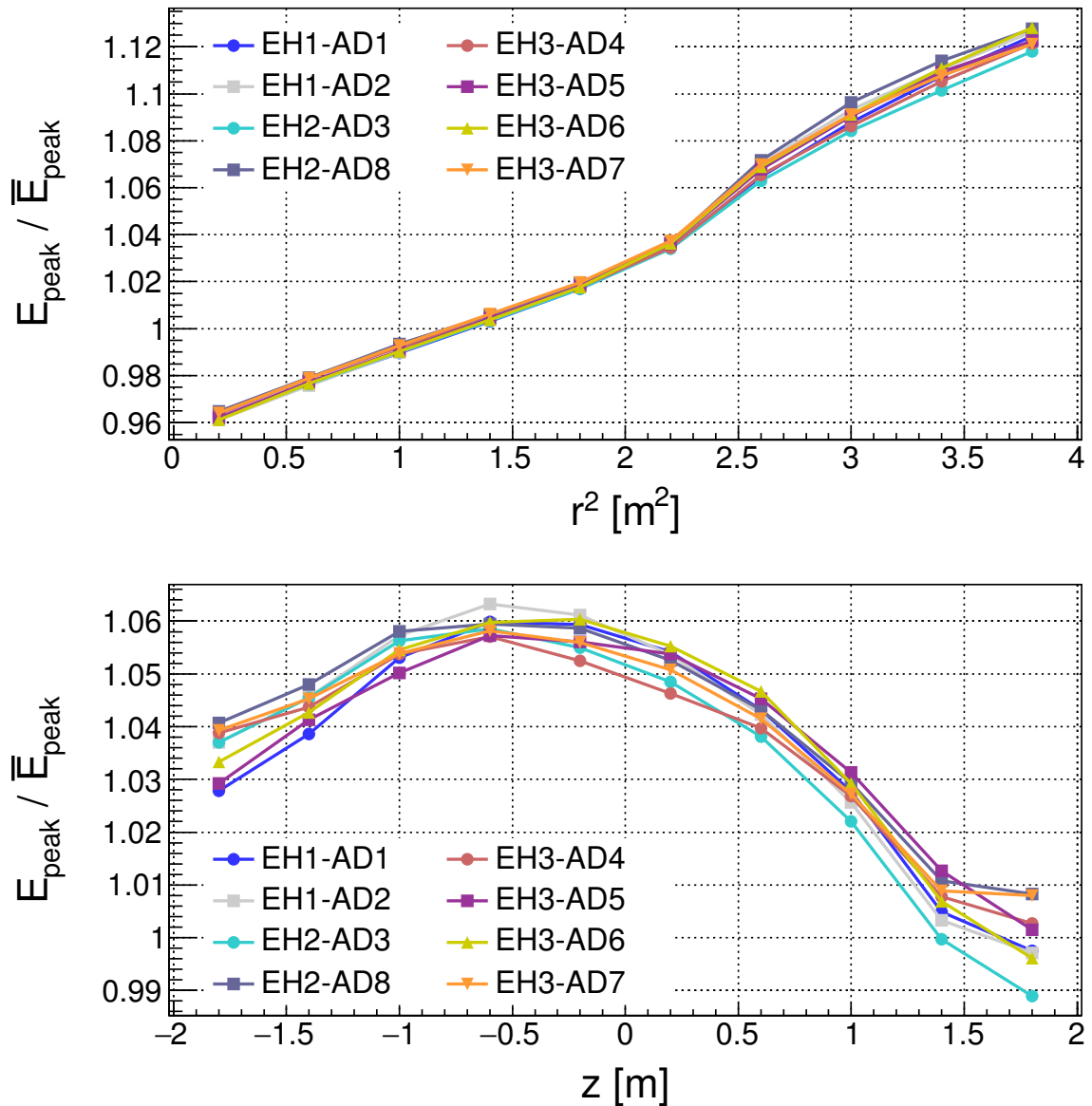


Рисунок 6.9 — Сравнение вариаций в световыходе относительно радиального (верхний рисунок) и вертикального (нижний рисунок) положения в методе реконструкции V. Каждая точка соответствует отношению наблюдаемого световыхода к усредненному по Gd-ЖС объему. Вариация, в первую очередь, связана с оптическим аксептансом ФЭУ, зависящим от положения, что хорошо воспроизводится моделированием. Небольшая разница (<3.0%) в неоднородностях наблюдается для восьми детекторов.

рода и гадолиния, обеспечивают дополнительными калибровочными эталонами. Все эти данные охватывают полный период набора данных, используемых для осцилляционного анализа.

Пространственное распределение взаимодействий отличалось для используемых калибровочных эталонов. Некоторые источники, например, нейтроны, которые захватываются водородом, или γ -кванты от распадов ^{40}K и ^{208}Tl , концентрируются на границе сцинтилирующих объемов, рядом с ФЭУ. Отбор сигналов с реконструированным положением внутри объема мишени все равно приводит к распределениям с доминирующим вкладом от взаимодействий вне объема мишени из-за ограниченной точности реконструкции положения. Отбрасывание сигналов с реконструированным положением около границы мишени (не далее 20 см от границы) приводит к распреде-

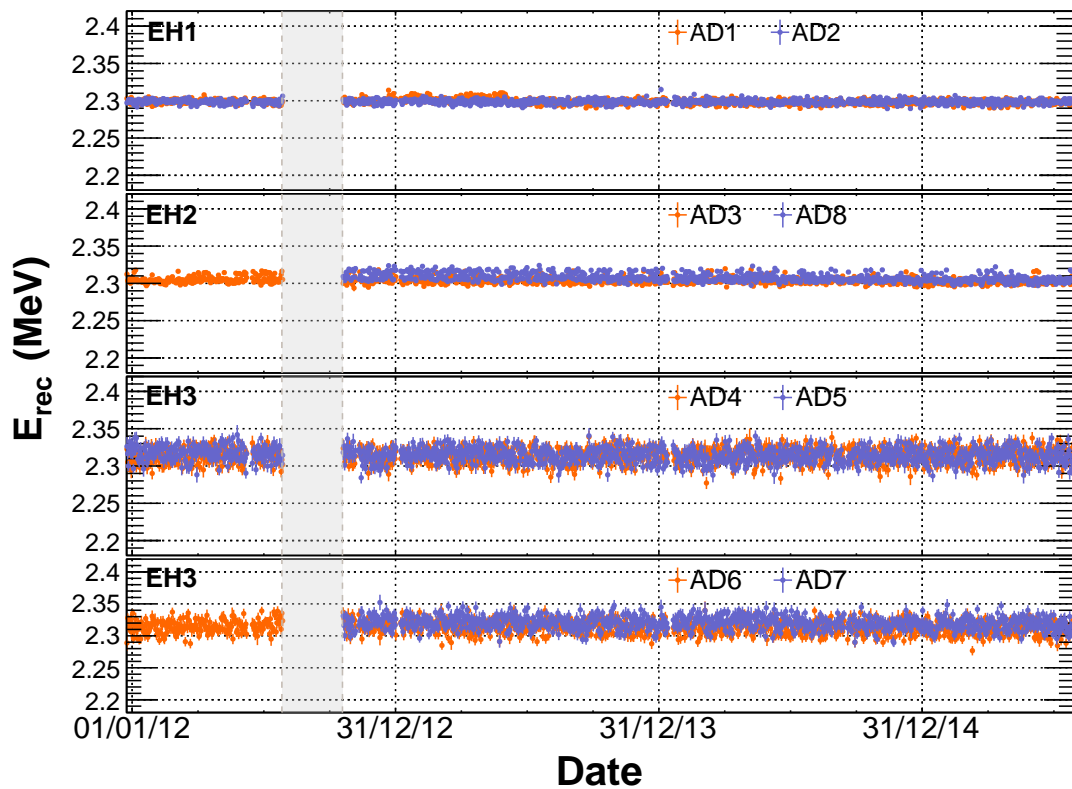
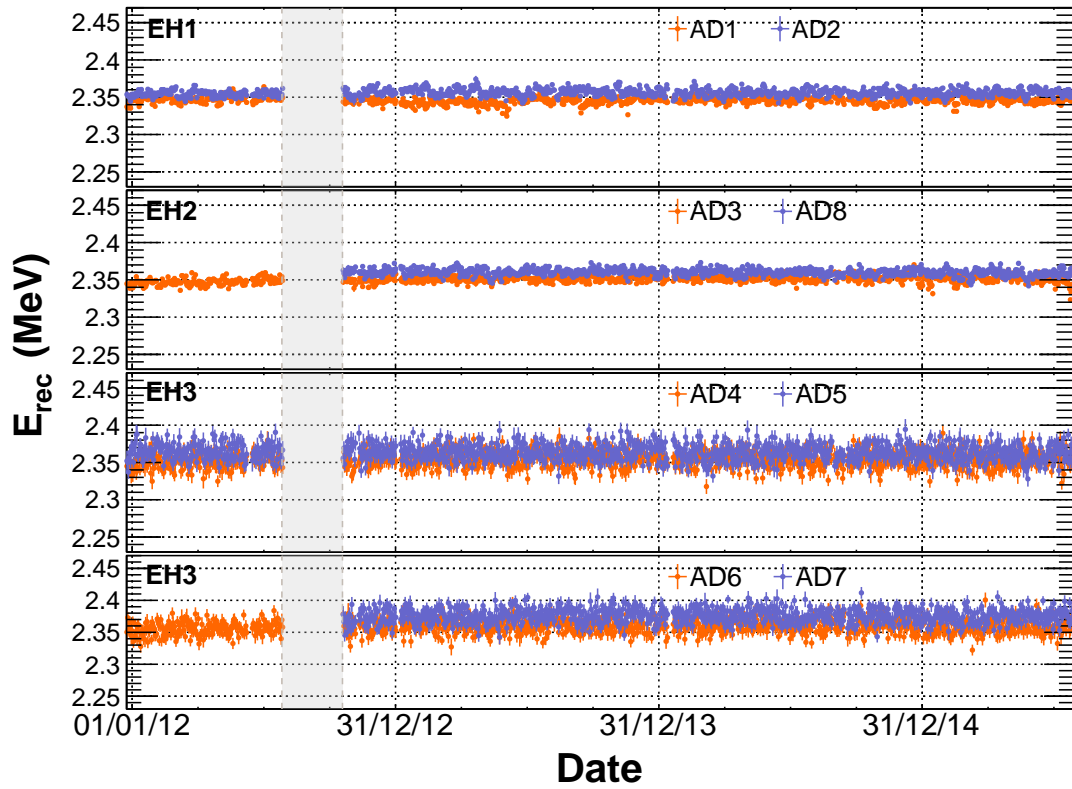


Рисунок 6.10 — Стабильность энергии n-H захвата от времени, измеренная при помощи источников ^{60}Co (метод А, верхний рисунок), и при помощи нейтронов от развала ядер (метод В, нижний рисунок). Каждая точка соответствует одному дню. Затемненная область относится к лету 2012.

лениям, достаточно похожим на распределения положения взаимодействий антинейтрино. Такой более строгий отбор оказывает незначительное влияние на оценку средней энергии для α частиц

из распадов ^{212}Po , ^{215}Po и ^{219}Po и для γ -квантов от захватов нейтронов ядрами гадолиния, которые распределены равномерно по всему объему детектора.

Вариация средней реконструированной энергии для калибровочных источников приведена на рис. 6.11. Эти калибровочные эталоны покрывают область энергий, ожидаемую для прямого и

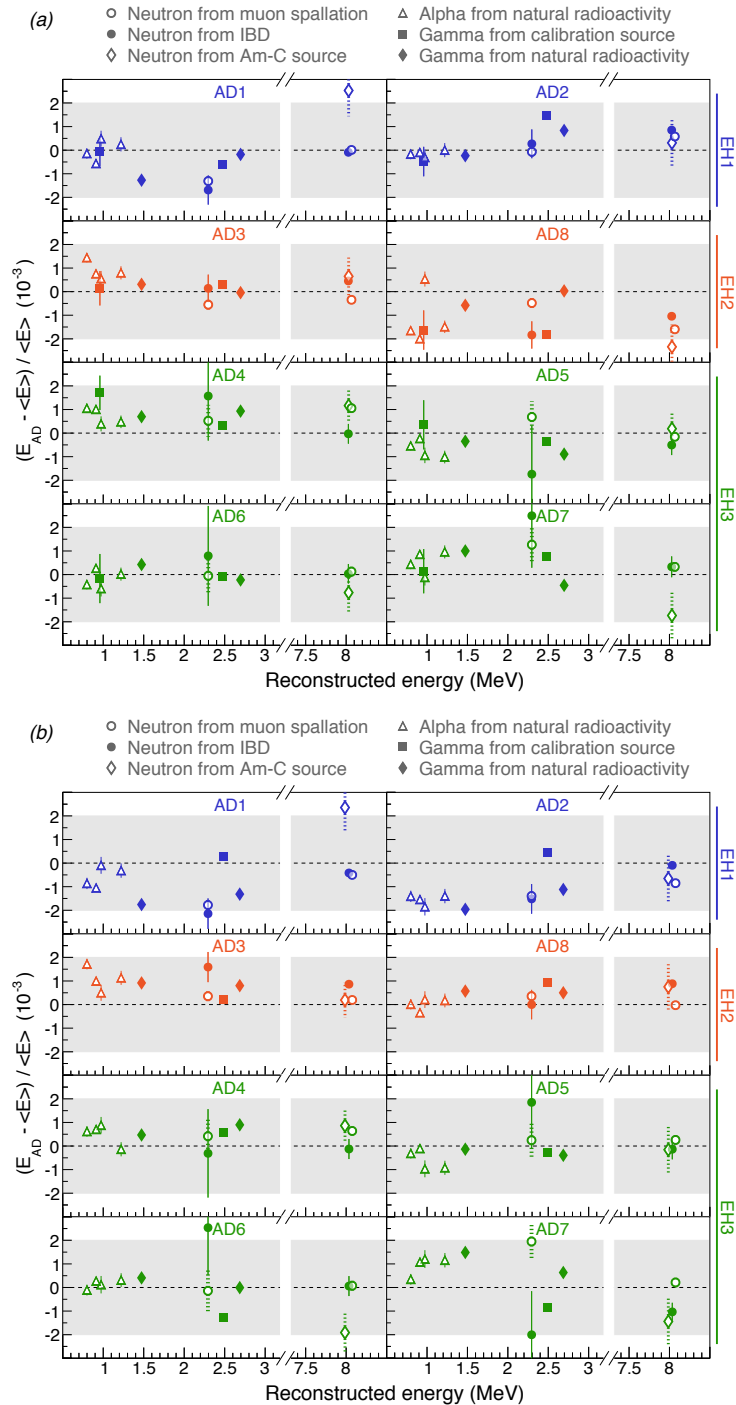


Рисунок 6.11 — Сравнение средней реконструированной энергии в разных антинейтринных детекторах для набора калибровочных эталонов: (а) калибровка с использованием источников ^{60}Co (реконструкция А) и (б) калибровка с использованием нейтронов от развалов ядер (реконструкция В). E_{AD} – реконструированная энергия, определенная для каждого AD. $\langle E \rangle$ – реконструированная энергия, усредненная по восьми детекторам. Приведены только статистические ошибки.

задержанного сигналов от ОБР. Систематические вариации оказались меньше 0.2%, а характер-

ные отклонения были порядка 0.1%, независимо от выбора методов калибровки и реконструкции. Таким образом, в дальнейшем используется консервативная оценка – 0.2% в качестве систематической неопределенности потенциальной вариации относительного энергетического отклика разных детекторов.

С 2012 по 2014 уровни жидкостей в объемах переполнения ММ и ЖС детектора ЕНЗ-AD4 медленно сдвигались относительно друг друга [205]. Эти изменения согласовывались с небольшой утечкой на уровне 50 л ЖС за два года в область ММ, содержащую 42800 л минерального масла. Увеличение поглощения коротковолнового света в минеральном масле, а также увеличение количества света, детектируемого при прохождении мюона через объем с минеральным маслом, подтвердили наличие утечки жидкости из ЖС. Несмотря на внимательное изучение данных от этого детектора, никаких значительных отклонений его характеристик найдено не было. Моделирования, учитывающие потенциальную возможность рождения сцинтилляционного света в объеме ММ, подтвердили этот вывод [213]. Как будет обсуждаться далее, скорость набора $\bar{\nu}_e$ данных, измеренная в ЕНЗ-AD4 находится в согласии с другими тремя детекторами в дальнем холле, что подтверждает, что утечка не повлияла неблагоприятным образом на этот детектор.

6.3.3 Разрешение энергии

Разрешение энергии детекторов моделируется согласно

$$\frac{\sigma_E}{E_{\text{rec}}} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{E_{\text{rec}}} + \frac{c^2}{E_{\text{rec}}^2}}. \quad (6.14)$$

Параметры a , b , и c отвечают вкладам в разрешение от неоднородности детектора, статистики числа ф.э., и шума соответственно. Разрешения энергии, полученные для калибровочных источников, захватов нейтронов после ОБР, и естественной α радиоактивности, показаны на рис. 6.12. Моделирование разрешения энергии с использованием ур. (6.14) дало $a = 0.016$, $b = 0.081 \text{ MeV}^{1/2}$, и $c = 0.026 \text{ MeV}$. Статистика числа ф.э. доминирует среди вкладов в разрешение энергии. Остальные вклады невозможно отличить от нуля на фоне их неопределенностей. Моделирование предсказывает, что внутреннее разрешение энергии должно быть немного лучше для калибровочных источников, чем наблюдаемое из-за эффекта оптической тени контейнеров, в которые помещены источники. Внутреннее разрешение было подтверждено с использованием естественной α радиоактивности в сцинтилляторе. Значительных вариаций разрешения энергии среди восьми детекторов обнаружено не было.

6.3.4 Абсолютная энергия антинейтрино

Кроме относительной калибровки энергетического отклика детекторов необходима их калибровка и в абсолютном смысле. В частности, интерпретация искажения антинейтринного энергетического спектра эффектом осцилляций нейтрино, требует характеристику соотношения между истинной энергией $\bar{\nu}_e$ и соответствующей реконструированной энергией позитрона из ОБР. Хотя неопределенность в абсолютной калибровке энергии оказывает ничтожное влияние на измерение θ_{13} , она важна для оценки Δm_{ee}^2 . Это является прямым следствием отношения Δm_{ee}^2 к E_ν в ур. (6.3).

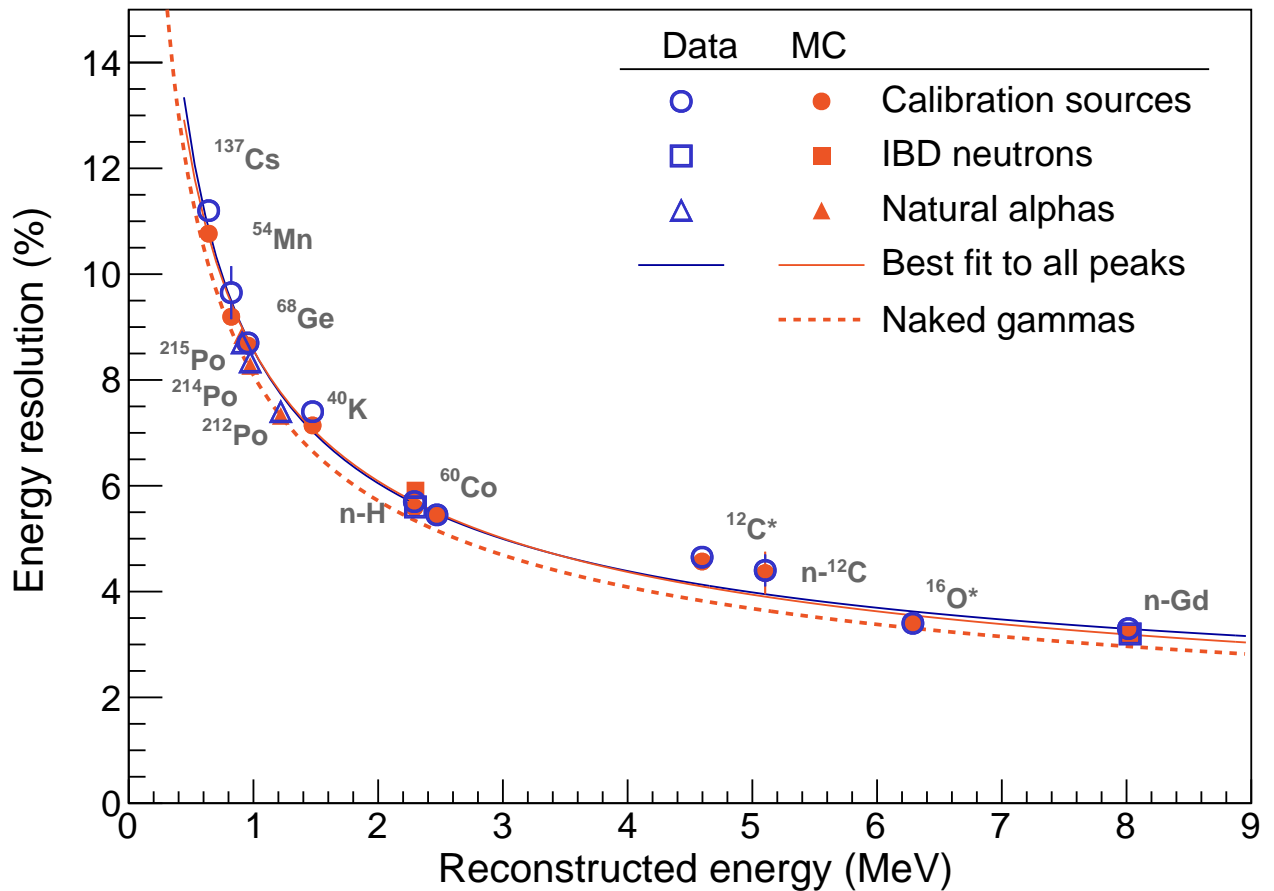


Рисунок 6.12 — Энергетические разрешения, измеренные для калибровочных источников, захватов нейтронов после ОБР и естественной α радиоактивности в сцинтиляторе (открытые голубые маркеры). Разрешение энергии, ограниченное статистическими неопределенностями, моделируется согласно ур. (6.14) (синяя сплошная линия). Разрешения согласуются с результатами моделирования (сплошные оранжевые маркеры). Моделирование предсказывает, что внутреннее разрешение энергии (пунктирная оранжевая линия) должно быть немного лучше для калибровочных источников (сплошная оранжевая линия), чем наблюдаемое из-за эффекта оптической тени контейнеров в которые помещены источники. Внутреннее разрешение было подтверждено с использованием естественной α радиоактивности в сцинтиляторе.

В нулевом порядке, кинематика ОБР подразумевает $E_{\text{prompt}} \simeq E_{\nu} - 0.8 \text{ МэВ}$, где энергия позитрона включает в себя 1.022 МэВ от аннигиляции $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$. Угловое распределение позитрона в конечном состоянии вносит небольшую энергозависимую поправку в соотношение, приведенное выше, и немного увеличивает разрешение энергии. Наиболее важным эффектом в энергетическом разрешении оказалась нелинейность в отклике детектора. Нелинейность в реконструированной энергии позитрона относительно истинной энергии взаимодействия возникает в результате двух причин: нелинейный световой выход сцинтиллятора, зависящий от типа частицы, выделяющей в нем энергию, а также зарядово-зависимая нелинейность, связанная со считыванием электроникой зарядового сигнала с ФЭУ. Взаимодействия позитрона в сцинтилляторе в основном идентичны электронным, за исключением процесса их аннигиляции. Таким образом, видимая энергия позитрона эффективно моделируется выражением $E_{\text{vis},e^+} = E_{\text{vis},e^-} + 2 \times E_{\text{vis},\gamma}(0.511 \text{ MeV})$.

Рождение света в сцинтилляторе подавлено для низкоэнергетических электронов из-за ионизационного гашения. Выразив в виде отношения f_q “погашенной” энергии к истинной энергии электрона, получим полуэмпирический аналитический подход, основанный на формуле Биркса. Дополнительную нелинейность вносит вклад от черенковского излучения, который зависит от энергии и предсказывается расчетами на уровне нескольких процентов относительно сцинтилляционного света. Черенковское излучение электронами как функция их энергии, f_c , было оценено при помощи моделирования пакетом Geant4 и подтверждено независимым аналитическим вычислением. Хотя черенковское излучение является хорошо изученным процессом, эффективность его поглощения и переизлучения в сцинтилляторе, и последующее детектирование ФЭУ, имеет значительную неопределенность. Количество детектируемого света, произведенного электроном в сцинтилляторе, называемое далее *видимой* энергией E_{vis} , связано с истинной кинетической энергией E_{true} соотношением

$$\frac{E_{\text{vis}}}{E_{\text{true}}} = \beta_{\text{vis}} [f_q(E_{\text{true}}, k_B) + k_C f_c(E_{\text{true}})], \quad (6.15)$$

где k_B – константа Биркса для электронов, k_C обозначает вклад черенковских фотонов относительно сцинтилляционного света и β_{vis} произвольная нормировочная константа.

Было проведено моделирование на основе пакета Geant4 для оценки эффективного отклика сцинтиллятора на прохождение γ -квантов как функции k_B , k_C и энергии γ -квантов с использованием модели в ур. (6.15). Моноэнергетические γ -кванты прослеживались в сцинтилляторе до тех пор, пока вся их энергия не конвертировалась в рассеянные e^- и e^+ . Значение E_{vis} для каждого γ -кванта вычислялось из суммы видимых энергий всех рассеянных электронов согласно ур. (6.15).

Зарядовая нелинейность, связанная с электроникой возникала из-за сложного наложения временного профиля сцинтилляционного света и отклика считывающей электроники, которые не могут быть легко откалиброваны на уровне канала ФЭУ. Вместо этого, получающаяся нелинейность эффективно моделируется на уровне детектора. Комбинация измерений и моделирования отклика электроники предлагает, что отношение реконструированной энергии E_{rec} к видимой E_{vis} эффективно может быть представлено в виде

$$\frac{E_{\text{rec}}}{E_{\text{vis}}} = \beta_{\text{rec}} \left[1 + \alpha \exp \left(-\frac{E_{\text{vis}}}{\tau} \right) \right], \quad (6.16)$$

где α определяет амплитуду нелинейности, τ задает энергетическую зависимость, и β_{rec} – произвольная нормировочная константа.

Таким образом, полная энергетическая модель, связывающая реконструированную энергию с истинной кинетической энергией частицы, содержит четыре свободных параметра: константа Биркса k_B , относительный вклад от черенковского излучения k_C и два свободных параметра α и τ модели электроники. Произведение β_{vis} и β_{rec} определено таким образом, чтобы $E_{\text{rec}} = E_{\text{true}}$ при энергии захвата нейтрона ядром гадолиния. Поскольку не было обнаружено заметной разницы в нелинейном отклике разных детекторов, была использована общая модель для всех восьми детекторов. Значения параметров были получены из неограниченного χ^2 фита различных калибровочных данных, состоящих из двенадцати γ -линий от внесенных и естественным образом видимых источников, а также от непрерывного электронного спектра от распадов ^{12}B , рожденных космическими мюонами в сцинтилляторе. Это исследование включало в себя остаточные вариации в световых выходе, зависящие от положения калибровочных источников. Полученная модель энергетического отклика сравнивается с калибровочными данными на рисунках 6.13 и 6.14. Оценка отклика

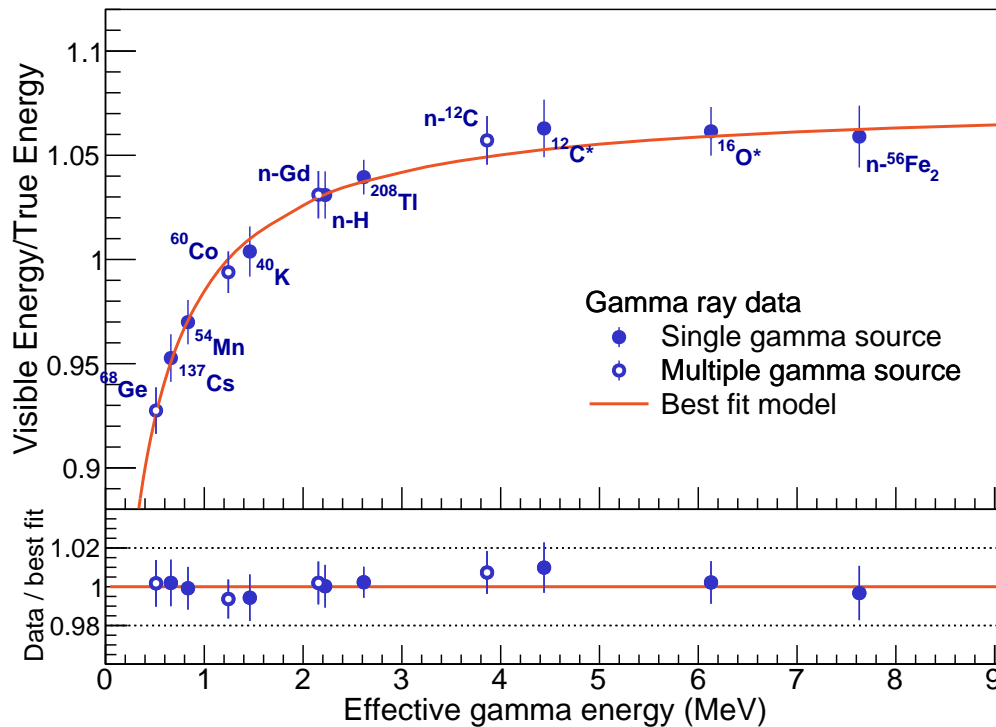


Рисунок 6.13 — Отношение наблюдаемой энергии к истинной для калибровочных источников γ -квантов в сравнении с наилучшей моделью нелинейности сцинтиллятора и с учетом черенковского излучения. В качестве “эффективной” энергии источников γ -квантов использовались соответствующие средние энергии. Для иллюстративных целей оценка вклада электроники в нелинейный отклик детектора была вычтена из данных и модели.

детектора на сигнал от позитрона показана на рис. 6.15. Нарисованная полоса неопределенности соответствует вариациям параметров модели согласующимся с калибровочными данными на уровне 68% У.Д.. Подход с использованием χ^2 был использован для ограничения энергетического отклика детектора, что привело к неопределенности в абсолютном измерении энергии позитрона

менее одного процента при энергиях выше 2 MeV. Полученная модель отклика детектора на сигнал от позитронов была проверена сравнением с калибровочными данными. Последние включают в себя конец электронного спектра от распадов мюона с энергией 53 МэВ, а также непрерывные $\beta+\gamma$ спектры от распадов висмута и таллия. Модель нелинейности электроники была перепроверена сравнением с данными от ФЭУ, полученным независимым цифровым преобразователем сигнала. Все измерения согласуются с моделью с учетом соответствующих неопределенностей параметров. Модель отклика детектора на сигнал от позитрона оказалась стабильной на уровне $1-\sigma$ относительно добавления или удаления любого источника калибровочных данных. В результате такого детального моделирования отклика детектора на сигнал от позитрона окончательная неопределенность на уровне 1% мала по сравнению с полной неопределенностью Δm_{ee}^2 , полученной в настоящем анализе.

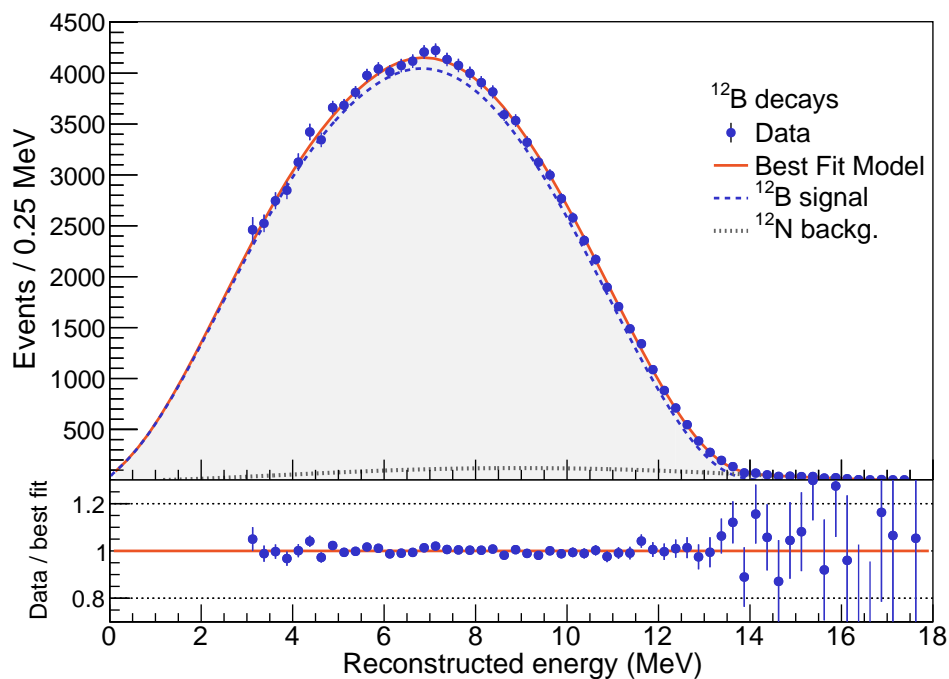


Рисунок 6.14 — Сравнение измеренного спектра электронов от распадов ^{12}B с модельным, учитывающим оценку нелинейности сцинтиллятора и электроники.

6.4 Заключение к главе

Наше рассмотрение начинается с краткого введения, в котором мы напоминаем о ключевых экспериментах, обнаруживших и надежно установивших существование нейтринных осцилляций, а также об определяющей роли эксперимента Daya Bay в этом вопросе. Эксперимент Daya Bay был задуман и реализован для ответа на вопрос о значении угла смешивания θ_{13} , величина которого была неизвестна до 2012 года, когда Daya Bay впервые надежно измерил ненулевое зна-

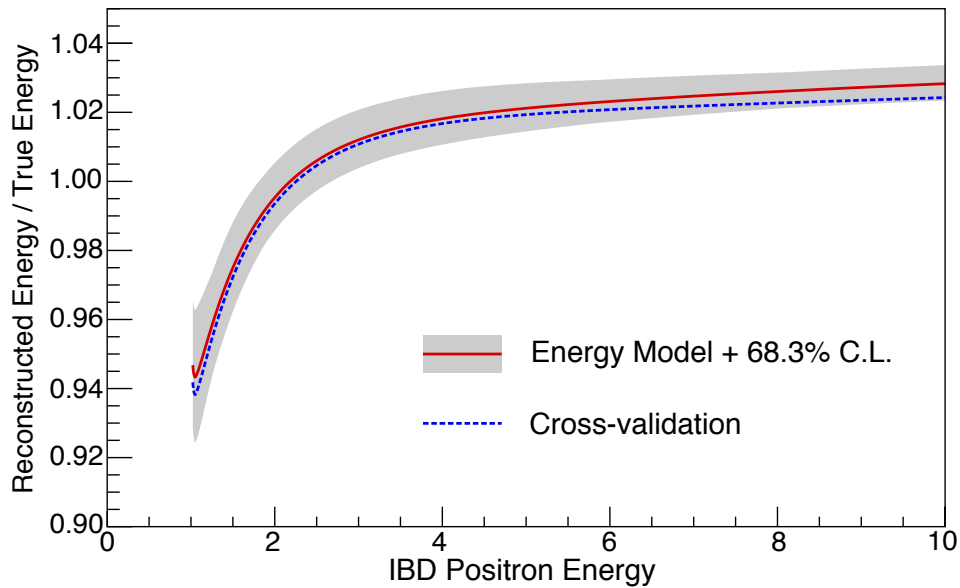


Рисунок 6.15 — Оценка отношения реконструированной энергии к истинной, $E_{\text{rec}}/E_{\text{true}}$, для взаимодействий позитрона в мишени антинейтринного детектора (сплошная красная линия). Энергия 0.511-МэВ от двух аннигиляционных γ -квантов включена в определение энергии. Параметры модели были определены с использованием калибровочных данных от источников γ -квантов и электронов от распадов ^{12}B . Полученная полоса соответствующая 68% У.Д. (серая закрашенная область) ограничивает это отношение лучше 1% в большей части интересующей нас области энергий. Независимая оценка, основанная на анализе $\beta+\gamma$ спектров от распадов висмута и таллия, а также на определении конечной точки электронного спектра от распадов мюона с энергией 53 МэВ, привела к согласующейся модели (голубая пунктирная линия).

чение этого угла. Мы кратко напоминаем использованную методику измерения в эксперименте Daya Bay.

Затем дается подробное описание эксперимента Daya Bay, использующего принцип относительного измерения, т.е. сравнения потоков антинейтрино от реактора на разных расстояниях. Следование этому методу сильно повлияло на весь дизайн эксперимента:

- идентичный дизайн всех восьми детекторов;
- использование ближних (порядка 500 м) и дальних (порядка 1.6 км) детекторов для оптимальной чувствительности к измерению θ_{13} ;
- хорошая защита от космогенного фона;
- мощные реакторы – источники $\bar{\nu}_e$.

Детально описывается устройство каждого из детекторов $\bar{\nu}_e$ эксперимента Daya Bay. Описывается система мюонного вето для идентификации мюонов. Описывается триггерная система.

Существенная часть главы относится к калибровке детектора. Обсуждаются временная калибровка и методы калибровки энергетического отклика установки, которые могут быть представлены в виде следующих факторов, каждый из которых подробно обсуждается:

- калибровка усиления ФЭУ;
- поправка на число активных ФЭУ;
- определение световыхода;
- пространственная неоднородность.

Качество калибровки проверяется сравнением с эталонными источниками определенной энергии. Разница в откликах антинейтринных детекторов оценивалась при помощи 13 различных калибровочных эталонов. Данные от источников, используемых на еженедельной основе, включают γ -кванты от ^{68}Ge и ^{60}Co , а также нейтроны от ^{241}Am - ^{13}C . Сигналы от естественной радиоактивности, включающие α -распады ^{212}Po , ^{214}Po , ^{215}Po и ^{219}Po и γ -кванты от ^{40}K и ^{208}Tl , также сравнивались между детекторами. Нейтроны от обратного бета распада и развалов ядер мюонами, которые захватываются ядрами водорода и гадолиния, обеспечивают дополнительными калибровочными эталонами. Все эти данные охватывают полный период набора данных, используемых для осцилляционного анализа.

Затем обсуждается зависимость разрешения энергии от выделенной энергии, подтверждающаяся измерениями с калибровочными источниками, с захватами нейтронов после реакции обратного бета распада и с естественной α радиоактивностью в сцинтилляторе. Обсуждается абсолютная калибровка энергии антинейтрино для правильной интерпретации наблюдаемых спектров взаимодействия $\bar{\nu}_e$. Для этого в эксперименте Daya Bay была разработана энергетическая модель детектора, связывающая реконструированную энергию с истинной кинетической энергией частицы. Модель зависит от четырех свободных параметров: константы Биркса k_B , относительного вклада от черенковского излучения k_C , и двух свободных параметра α и τ модели электроники. Полученная модель энергетического отклика сравнивается с калибровочными данными. Подход с использованием χ^2 был использован для ограничения энергетического отклика детектора, что привело к неопределенности в абсолютном измерении энергии позитрона менее одного процента при энергиях выше 2 MeV. Полученная модель отклика детектора на сигнал от позитронов была проверена сравнением с калибровочными данными. Последние включают в себя конец электронного спектра от распадов мюона с энергией 53 МэВ, а также непрерывный $\beta+\gamma$ спектры от распадов висмута и таллия. Модель нелинейности электроники была перепроверена сравнением с данными от ФЭУ, полученными независимым цифровым преобразователем сигнала. Все измерения согласуются с моделью с учетом соответствующих неопределенностей параметров. Модель отклика детектора на сигнал от позитрона оказалась стабильной на уровне $1-\sigma$ относительно добавления или удаления любого источника калибровочных данных. В результате такого детального моделирования отклика детектора на сигнал от позитрона окончательная неопределенность на уровне 1% мала по сравнению с полной неопределенностью Δm_{ee}^2 , полученной в настоящем анализе.

Глава 7. Антинейтринный сигнал и оценка фона

Относительное измерение нейтринных осцилляций, основанное на сравнении сигналов в дальних и ближних детекторах согласно ур. (6.4), мотивировало особенный подход к отбору $\bar{\nu}_e$ событий. Критерии отбора не обязательно должны обладать максимальной эффективностью и минимальным содержанием фона. Наоборот, критерии отбора были выбраны так, чтобы минимизировать относительные неопределенности при сравнении сигналов, наблюдаемых восемью детекторами. В настоящем разделе дается детальное описание критериев отбора $\bar{\nu}_e$ событий, рассмотрение относительных эффективностей детекторов и оценки остаточных фонов для осцилляционного анализа. Резюмируя, было отобрано более 2.5×10^6 $\bar{\nu}_e$ кандидатов за рассматриваемый период набора данных. Эффективности детекторов отличались друг от друга не более, чем на 0.13%. Вклад фоновых событий не превышал нескольких процентов, с неопределенностью $\lesssim 0.2\%$.

Два независимых метода и программного обеспечения были разработаны для отбора антинейтринных кандидатов. Мы называем эти два подхода “отбор А” и “отбор В”. Наиболее значительное отличие этих методов заключается в выборе методов калибровки и реконструкции энергии: отбор А использует реконструкцию А, а отбор В – реконструкцию В. Также эти методы немного отличаются в подходе отбрасывания фона. Мы обсудим оба метода с учетом их отличий. В таб. 7 приводится сравнение обоих методов отбора.

Критерий	Отбор А	Отбор В
Калибровка	^{60}Co и ^{241}Am - ^{13}C	Нейтроны от развалов ядер
Реконструкция	r_{cos}	Сравнение с зарядовым шаблоном
Вспышки от 8" ФЭУ	Отбросить, если $f_{\text{ID}} \geq 0$	Отбросить, если $f_{\text{ID}} \geq 0$ или $f_{\text{PSD}} \geq 0$
Вспышки от 2" ФЭУ		Отбросить, если $Q_{\text{max}}(2'' \text{ ФЭУ}) > 100$ ф.э.
Энергия первичного сигнала		(0.7, 12.0) МэВ
Энергия задержанного сигнала		(6, 12.0) МэВ
Первичный-задержанный Δt		(1, 200) μs
Вето на множественность (<i>pre</i>)	Нет сигналов >0.7 МэВ 200 μs до первичного	Только один сигнал (0.7, 12) МэВ 400 μs до задержанного
Вето на множественность (<i>post</i>)	Нет сигналов >0.7 МэВ 200 μs после задержанного	Нет сигналов (6, 12) МэВ 200 μs после задержанного
Мюонное вето с водным бассейном		Вето (-2, 600) μs после NHIT > 12 в OWS или IWS
Мюонное вето AD	Вето (0, 1) мс после >20 МэВ сигнала	Вето (0, 1.4) мс после $>3,000$ ф.э. (~ 18 МэВ) сигнала
Вето против ливня частиц	Вето (0, 1) с после >2.5 (ГэВ) сигнала	Вето (0, 0.4) с после $>3 \times 10^5$ ф.э. (~ 1.8 ГэВ) сигнала

Таблица 7 — Резюме двух независимых методов отбора ОБР реакторных $\bar{\nu}_e$. Подробности смотрите в тексте.

7.1 Отбор антинейтрино

Как обсуждалось в разделе 6.1, ОБР обладает очень характерной временной меткой из двух коррелированных во времени сигналов определенных энергий. Первичный сигнал происходит от e^+ , который теряет свою энергию на ионизацию и затем аннигилирует в сцинтилляторе, производя от 1 до 8 МэВ видимой энергии. Наблюдаемая энергия может быть использована для аккуратной

оценки энергии взаимодействующего $\bar{\nu}_e$. Каждое такое взаимодействие рождает также свободный нейтрон. Унося порядка $O(10 \text{ кэВ})$ кинетической энергии, нейтрон термализуется за $\sim 10 \mu\text{с}$, сталкиваясь с ядрами в сцинтилляторе. В Gd-ЖС эксперимента Daya Bay термализованный нейтрон захватывается ядром с характерным временем $\tau \simeq 28 \mu\text{с}$. Возбужденное ядро затем изучает γ -кванты. Взаимодействие этих γ -квантов в сцинтилляторе производит вторичный, или задержанный, сигнал. В Gd-ЖС эксперимента Daya Bay примерно 84% захватов нейтрона происходит либо на ядре ^{157}Gd ($\sim 81.5\%$, 7.95 МэВ), либо на ядре ^{155}Gd ($\sim 18.5\%$, 8.54 МэВ). Несколько γ -квантов, излученных после захвата нейтрона могут быть отличены от γ -квантов от распадов радиоактивных изотопов, обладающих энергиями, в основном, не превышающими 5 МэВ. ОБР с захватом нейтрона ядром гадолиния – предмет рассмотрения настоящего раздела.

Оставшиеся $\sim 16\%$ нейтронов, захватываются ^1H , излучая один γ -квант с энергией 2.2 МэВ. Для захватов свободным протоном не было возможности явно выделить место взаимодействия антинейтрино: произошло ли оно в ЖС, либо в Gd-ЖС. Поэтому, в анализе данных с захватом n - ^1H приходится иметь дело с большими неопределенностями в объеме мишени и отклике детектора, а также с гораздо большим уровнем фона. Несмотря на эти трудности, независимые измерения осцилляций нейтрино были получены с использованием таких событий [213; 214]. Полученные результаты, находясь в согласии с результатами анализа данных с n -Gd захватами, обладают все же меньшей точностью.

В представленном тут анализе, взаимодействия антинейтрино находились выбором пар триггерных событий с разницей времени детектирования от 1 до 200 $\mu\text{с}$, с реконструированной энергией первичного сигнала, E_p , в интервале от 0.7 до 12 МэВ, и реконструированной энергией задержанного сигнала, E_d , в интервале от 6 до 12 МэВ. Все оставшиеся критерии отбора, обсуждаемые далее в этом разделе, разработаны для подавления фоновых событий.

На рис. 7.1 приведены распределения разницы времен детектирования первичного и задержанного сигналов ОБР кандидатов, включая все критерии отбора, для каждого детектора за весь период набора данных. Задержанные сигналы с $\Delta t > 200 \mu\text{с}$ были отброшены, поскольку не улучшают значительно статистику антинейтринных событий, но добавляют фоновые события. Взаимодействия с $\Delta t < 1 \mu\text{с}$ были отброшены, поскольку они попадают в одно триггерное событие, в котором распознать два разных взаимодействия не всегда возможно. Абсолютная эффективность временного отбора ($98.70 \pm 0.01\%$) оценивается интегрированием распределения разницы времен детектирования первичного и вторичного сигналов, а также подтверждается моделированием. Возможная вариация в эффективности определения Δt интервалов детекторов оценивается в 0.01% с учетом возможных вариаций в концентрации гадолиния и детекторного времени.

Доля ОБР нейтронов, захваченных гадолинием, была оценена равной ($84.2 \pm 0.8\%$). Эта оценка была получена с использованием распределений времен захвата нейтронов от разных источников, включая нейтроны от развалов ядер, ^{241}Am - ^{13}C , ^{241}Am - ^9Be , ^{239}Pu - ^{13}C , и ОБР нейтроны и учетом сравнения с детальным моделированием. Еще более важно оказалось обнаружение схожести этих распределений в разных детекторах, как продемонстрировано на рис. 7.2, что ограничивает возможное различие в детекторах в доле захваченных нейтронов ядрами гадолиния $< 0.10\%$ [213]. Разница в доле захватов могла бы произойти в результате разницы в концентрациях

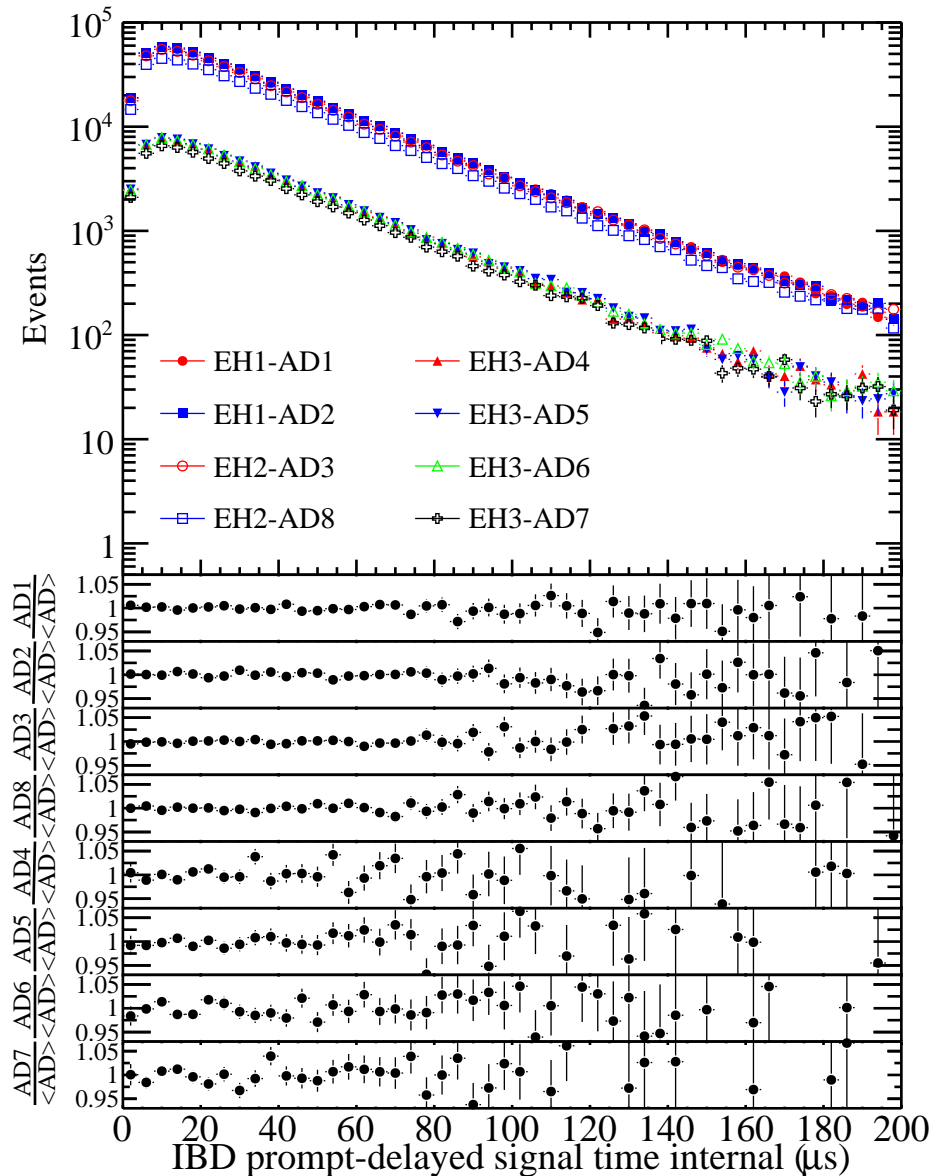


Рисунок 7.1 — (Верхний рисунок) Распределения разницы времен детектирования первичного и задержанного сигналов ОБР кандидатов для каждого детектора за весь период набора данных. (Нижний рисунок) Отношение наблюдаемого распределения в каждом детекторе к усредненному по всем детекторам. Согласованность этих распределений ограничивает возможную систематическую вариацию в доле ОБР нейтронов, захватываемых гадолинием между всеми детекторами.

ядер гадолиния в разных детектора. Этот эффект был исключен общим резервуаром с Gd-ЖС из которого заполнялись все восемь детекторов.

Как обсуждалось в разделе 6.2, в каждом детекторе индивидуально вырабатывался триггерный сигнал, если полное число каналов выше порога (NHIT) было ≥ 45 или аналоговая сумма всех каналов (ESUM) была ≥ 65 ф.э. Это соответствует порогу на реконструированную энергию ~ 0.4 МэВ. Сравнения измеренных скоростей счета и энергетических спектров от аннигиляции позитрона от источника ^{68}Ge как функции порога триггера продемонстрировало ничтожно малую потерю эффективности в детектировании позитрона для этого порога триггера (см. рис. 9 в работе [204]). Совместный анализ данных и моделированных событий показал, что 0.19% первичных сигналов имеет $E_p < 0.7$ МэВ в результате конечного разрешения детектора и потери энергии

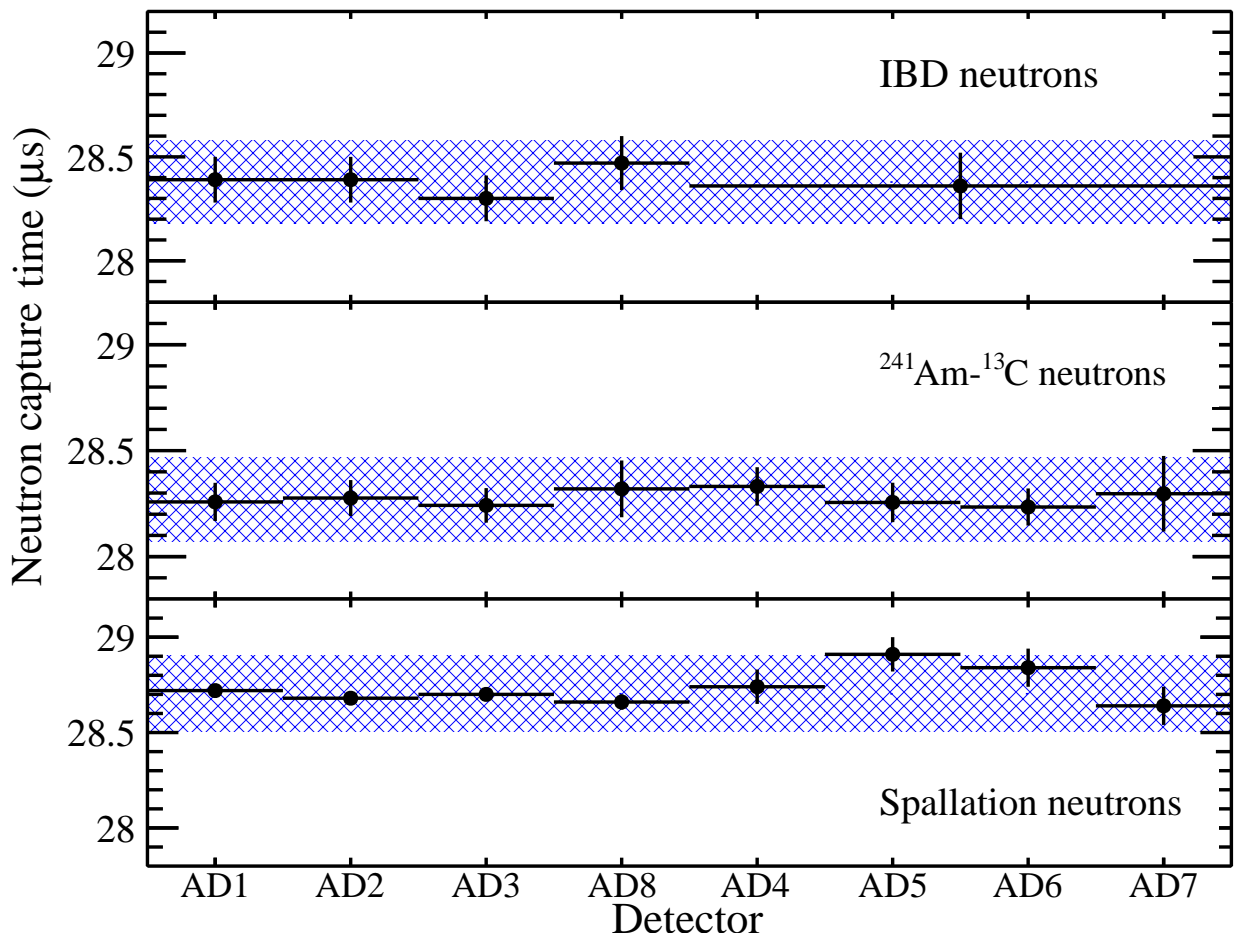


Рисунок 7.2 — Сравнение времен захвата нейтрона, измеренных в каждом детекторе для нейтронов от ОБР, ^{241}Am - ^{13}C , развалов ядер. Данные от ОБР объединены для детекторов дальнего холла. Наблюдаемое время захвата отличается не более чем на $\pm 0.2 \mu\text{s}$. Небольшие отличия в средних временах захвата между разными источниками нейтронов связаны с различием их пространственных распределений.

e^+ в IAV для взаимодействий $\bar{\nu}_e$ у границы мишени. Хотя реактор не излучает достаточно для детектирования числа $\bar{\nu}_e$ с $E_p \gtrsim 11$ МэВ, фоновые события учитывались вплоть до 12 МэВ. Абсолютная эффективность отбора по энергии первичного сигнала оценивается равной $(99.81 \pm 0.01)\%$. Неопределенность этого отбора относительно разных детекторов оценивается равной 0.01%, консервативно предполагая 2% разницу в энергетической нормировке при $E_p = 0.7$ МэВ.

Как показано, отбор с использованием энергии первичного сигнала и разницы времен между первичным и вторичным сигналами, не может привести к значимой разнице в эффективностях детекторов. Это, однако, не так для отбора по энергии задержанного сигнала. В частности, выход γ -квантов от n-Gd захвата за пределы сцинтилляционных объемов детектора вносит низкоэнергетический хвост от 8 МэВ пика в спектре энергии от задержанных сигналов. Главная задача ЖС объема, окружающего мишеньный объем с гадолинием, заключается в значительном подавлении величины этого хвоста спектра. Согласно моделированию при помощи Geant4, форма этого спектра зависит от множественности γ -квантов и энергетического распределения от захвата нейтронов гадолинием, которое известно не очень хорошо. Наблюдаемые энергетические спектры от захватов гадолинием нейтронов, от развалов ядер мюонами, от источников ^{241}Am - ^{13}C и от ОБР были использованы для ограничения возможных вариаций в моделированных распределениях γ -квантов

от n-Gd захватов. Основываясь на этих смоделированных распределениях γ -квантов, была оценена эффективность отбора (92.7 ± 0.9)% по отношению к критерию $E_d > 6$ МэВ. Из моделирования следует, что $\sim 6\%$ неэффективности отбора происходило от сигналов с E_d в интервале от 3.6 МэВ до 6 МэВ, которые были сильно ограничены наблюдениями в данных. Моделирование предсказывает $\sim 1\%$ неэффективности отбора за счет сигналов с $E_d < 3.6$ МэВ. Такие сигналы были плохо ограничены данными из-за фона от захватов n- ^1H в наблюдаемых спектрах. Те же исследования показали, что эффективность отбора с $E_d < 12$ МэВ равна 100%.

Возможная вариация эффективности отбора по энергии задержанного сигнала в разных детекторах оценивается тремя разными согласующимися друг с другом методами в 0.08%.

Распределение энергий первичного сигнала относительно задержанного для отобранных кандидатов в $\bar{\nu}_e$ события приведено на рис. 7.3. Из приведенного рисунка видно, что критерий $E_d > 6$ МэВ отбрасывает заметную часть истинных ОБР событий, которые заметно перекрывают границы выбранной области. Страница 231. Подпись к рисунку. Предложение “Вклад от случайных совпадений (симметричный при перестановке сигналов от первичного и задержанного сигналов), от распадов ^9Li и от быстрых нейтронов (большая энергия первичного сигнала и $\square 8$ МэВ энергии задержанного сигнала) видны в выбранной области.” -> “В выделенной красным пунктиром области видны вклады от случайных совпадений (симметричный при перестановке сигналов от первичного и задержанного сигналов), от распадов ^9Li и от быстрых нейтронов (большая энергия первичного сигнала и $\square 8$ МэВ энергии задержанного сигнала).” Я же правильно поняла что речь про этот пунктир?

7.2 Отбрасывание фоновых событий

Подавляющее большинство сигналов, вызвавших триггер детектора, было вызвано фоном от естественной радиоактивности, на каждые $\sim 10^5$ событий которых приходилось всего лишь одно событие от взаимодействия реакторного антинейтрино. В этом разделе описываются методы, использованные для подавления фона до уровня менее нескольких процентов от набора отобранных кандидатов во взаимодействия реакторных антинейтрино, используемого для измерения нейтринных осцилляций. Кроме естественной радиоактивности, небольшой фон, связанный с ФЭУ был обнаружен во время сборки и последующего функционирования детектора. Отбрасывание такого инструментального фона также обсуждается в этом разделе. Выбор пар первичного и задержанного сигнала с соответствующими энергиями и разницей времен детектирования отбросило почти все фоновые события, связанные с естественной радиоактивностью. Время от времени два некоррелированных сигнала могут *случайно* удовлетворить критериям отбора антинейтринных событий. Детальные исследования всех некоррелированных взаимодействий позволили измерить вклад от этого источника фона на уровне от 1% до 2% в зависимости от детектора. Неопределенность в оценке этого фона была найдена ничтожно малой. Все оставшиеся источники фона происходят от физических процессов, которые порождают пары коррелированных взаимодействий, что может имитировать процессы обратного бета распада. Подавляющее большинство такого корре-

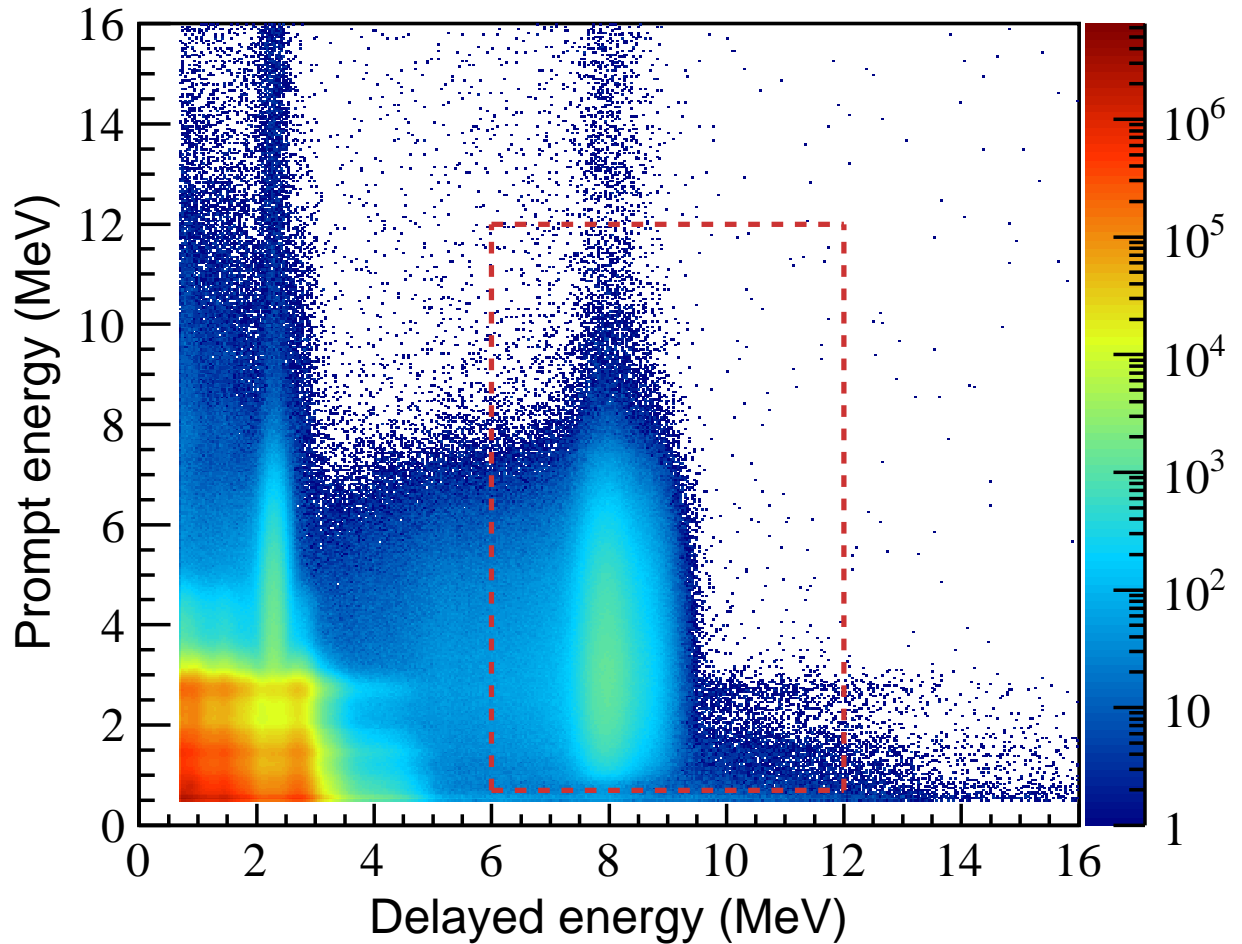


Рисунок 7.3 — Распределение энергий первичного сигнала относительно задержанного для отобранных кандидатов в $\bar{\nu}_e$ события. Взаимодействия с энергиями первичного $0.7 \text{ МэВ} < E_p < 12 \text{ МэВ}$ и задержанного $6 \text{ МэВ} < E_d < 12 \text{ МэВ}$ сигналов используются для анализа нейтринных осцилляций, обсуждаемых в этой работе (красный пунктирный прямоугольник). В выделенной красным пунктиром области видны вклады от случайных совпадений (симметричный при перестановке сигналов от первичного и задержанного сигналов), от распадов ${}^9\text{Li}$ и от быстрых нейтронов (большая энергия первичного сигнала и $\sim 8 \text{ МэВ}$ энергии задержанного сигнала). События обратного бета распада в которых нейтрон был захвачен ${}^1\text{H}$ обеспечивают еще одну область сигнальных событий, в которой $E_d \sim 2.2 \text{ MeV}$, обладающую бóльшим уровнем фоновых событий.

лированного фона происходит от взаимодействий космогенных мюонов в детекторе или его близлежащем окружении. Отбрасывая сигналы, возникающие вскоре после мюонных взаимодействий в детекторе или мюонных системах, можно эффективно подавить вклад от таких фонов до уровня менее, чем 0.5%. Наконец, три или более сигналов могут случайно оказаться близко друг к другу по времени, что приводит к неопределенности в определении нужной пары сигналов на роль кандидата во взаимодействие антинейтрино. Чтобы избежать этой неопределенности, наборы сигналов со множественностью >2 отбрасываются.

7.2.1 Инструментальный фон

Наблюдение за ФЭУ во время сборки детектора помогло обнаружить излучение света от периодических разрядов, возникающих в электрических схемах делителя ФЭУ. Обычно, эти излучения называются *вспышками* (или *flashing* – по английски), хотя механизм излучения может варьироваться для разных ФЭУ. Плата с делителем ФЭУ эксперимента Daya Bay мониторировалась при помощи астрономической ПЗС-камеры, что помогло обнаружить излучение света, возникающее во время электрического разряда в точке соединения входящего высоковольтного кабеля со схемой делителя. Обнаружилось, что бóльшая часть ФЭУ эксперимента излучает свет на некотором уровне, хотя частота и интенсивность излучения зависели от ФЭУ и флуктуировали со временем для данного ФЭУ. Бóльшая часть света от вспышек не попадает в центральную часть AD из-за непрозрачного щита, выполненного из тайвека. Этот щит обтягивает изнутри цилиндрическую поверхность AD, на которую установлены ФЭУ. Однако, небольшая доля света проходила насквозь через ФЭУ, попадая в объем центрального детектора. Излучаемый свет порождал ложные сигналы с реконструированными энергиями вплоть до ~ 100 МэВ, и скоростью счета в области энергией задержанного сигнала (от 6 до 12 МэВ), равной примерно 0.7 Гц на один AD.

Если не удалять такие сигналы, то вклад от них в фон от случайных совпадений был бы сопоставим с наблюдаемой скоростью набора данных от взаимодействий антинейтрино. К счастью, излучение света от ФЭУ имеет очевидные характерные особенности в пространстве и во времени, что позволяет с легкостью их отличить от настоящих взаимодействий частиц в сцинтилляторе. В частности, излучающий ФЭУ имеет большую долю от всего собранного заряда ф.э. в детекторе, при этом проецируя заметную часть света на ФЭУ, расположенные напротив излучающего ФЭУ. На рис. 7.4 приведено характерное распределение заряда, наблюдаемое после разрядки ФЭУ.

Чтобы отличить вспышки ФЭУ от настоящих взаимодействий частиц, была определена дискриминирующая переменная. Для каждого сигнала триггера был найден ФЭУ, наблюдающий максимальное число ф.э.. Такой ФЭУ принимается кандидатом, излучившим вспышку. Калиброванный заряд от этого ФЭУ обозначается Q_{\max} . Пространственное распределение заряда в AD характеризуется двумя переменными, f_{\max} и f_{quad} . f_{\max} – это отношение максимального заряда, зарегистрированного ФЭУ, к полному наблюдаемому заряду в AD, $Q_{\max}/Q_{\text{total}}$. 24 колонки с ФЭУ в одном AD группируются в четыре квадранта так, чтобы ФЭУ – потенциальный излучатель вспышек был в центре первого квадранта. Полный заряд, наблюдаемый в квадранте с номером i , обозначается Q_{qi} . f_{quad} – это отношение заряда, наблюдаемого в противоположном квадранте к двум соседним квадрантам, $f_{\text{quad}} = Q_{q3}/(Q_{q2} + Q_{q4})$. Простой дискриминатор, f_{ID} , учитывал оба аспекта пространственного распределения света от вспышек,

$$f_{\text{ID}} = \log_{10} \left[f_{\text{quad}}^2 + \left(\frac{f_{\max}}{0.45} \right)^2 \right]. \quad (7.1)$$

На рис. 7.5 показано распределение этой переменной для задержанных сигналов от ОБР и сигналов от вспышек ФЭУ. Распределения дискриминирующей переменной находятся в хорошем согласии друг с другом во всех восьми детекторах для настоящих кандидатов в задержанные сиг-

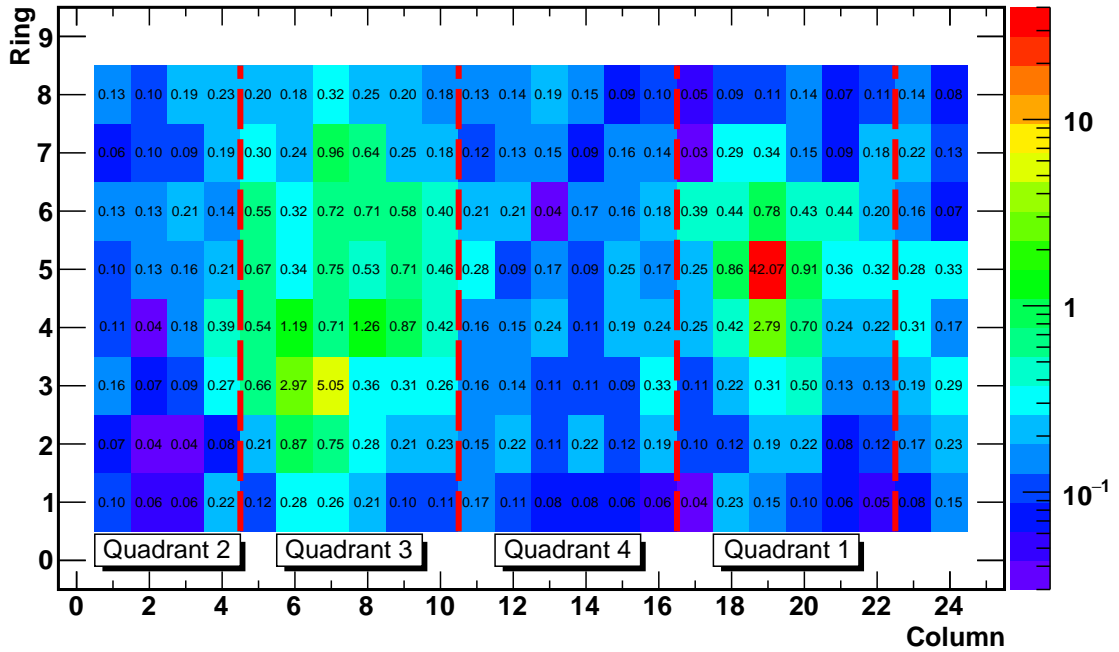


Рисунок 7.4 — Характерное распределение заряда, наблюдаемое после разрядки ФЭУ в AD, где цилиндрический массив ФЭУ из 8 колец и 24 колонок спроектирован на плоскость. В приведенном примере из данных вспышка произошла в ФЭУ, расположенном в колонке 19 и в кольце 5. Цветами, а также числами показаны доли (в процентах) от полного наблюдаемого заряда, зарегистрированные ФЭУ в данных кольце и колонке. Разряжающийся ФЭУ зарегистрировал наибольшую долю ф.э.. Этот ФЭУ также послал свет к своим ближайшим соседям и ФЭУ, расположенным напротив (квадрант 3). Такой характерный шаблон распределения заряда позволяет эффективное отбрасывание этого источника фона.

налы от ОБР ($f_{ID} < 0$), в то время как распределения от вспышек ФЭУ ($f_{ID} \geq 0$) варьировались в соответствии с характеристиками излучающих ФЭУ. Излучение света от ФЭУ, расположенного в нижнем кольце AD5 дает примерно в 10 раз больше сигналов около порога дискриминации, по сравнению с другими ФЭУ, что видно в виде небольшого пика на рис. 7.5.

Вспышкам ФЭУ, в основном, характерны более широкие распределения относительных времен детектирования сигналов фотоумножителями в одном событии, вызвавшем триггерный сигнал. Дополнительный дискриминатор использовал эту характеристику ложных сигналов. Переменная f_{t1} определяется как отношение числа сигналов ФЭУ в первых 200 нс события, вызвавшего триггерный сигнал, к полному числу сигналов ФЭУ в первых 400 нс. Переменная f_{t2} определяется точно также, за исключением того, что в числителе используются первые 150 нс. Обе переменные используются для создания дискриминирующей переменной f_{PSD} с оптимизированными весами,

$$f_{PSD} = \log_{10} [4 \cdot (1 - f_{t1})^2 + 1.8 \cdot (1 - f_{t2})^2]. \quad (7.2)$$

Сигналы с $f_{PSD} \geq 0$ идентифицируются как вспышки ФЭУ и отбрасываются из дальнейшего анализа. Этот дискриминатор имеет дополнительное преимущество, отбрасывая сигналы, в которых оба сигнала произошли во время одного события, вызвавшего триггер.

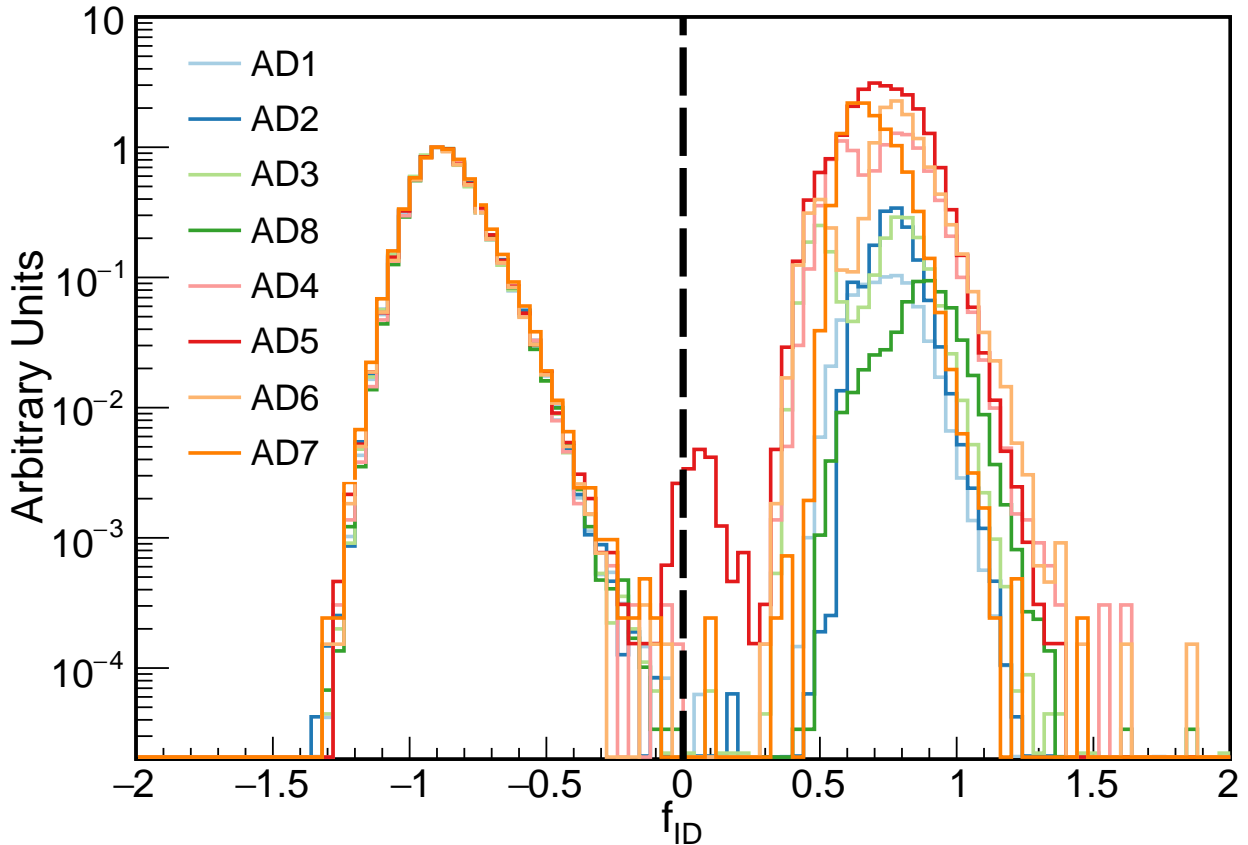


Рисунок 7.5 — Распределение переменной f_{ID} для задержанных сигналов от кандидатов в ОБР во всех восьми детекторах. Дискриминатор использует информацию о пространственном распределении заряда среди ФЭУ, чтобы отличить всплески ФЭУ ($f_{ID} \geq 0$) от настоящих взаимодействий частиц ($f_{ID} < 0$). Распределения нормированы, чтобы продемонстрировать согласующуюся форму распределений для настоящих кандидатов в антинейтринные события, в то время как распределения от всплесков ФЭУ варьировались в соответствии с характеристиками излучающих ФЭУ. Дискриминатор отбрасывает почти все ложные сигналы, вызванные всплесками ФЭУ, с ничтожным вкладом в эффективность детектирования антинейтрино.

В каждом AD есть шесть двухдюймовых ФЭУ, расположенных сверху и внизу детектора рядом с трассой автоматического калибровочного источника. Эти ФЭУ используются для калибровочного мониторинга характеристик сцинтиллятора и не участвуют при создании триггера, а также при реконструкции энергии и положения события. Всплески этих ФЭУ легко отбрасывались при условии, если какой-нибудь из них наблюдал более 100 ф.э.

После применения этих дискриминаторов вклад от ложных сигналов, вызванных всплесками ФЭУ, в набор антинейтринных событий оказался пренебрежимо малым. Любые оставшиеся фоновые сигналы учитываются при рассмотрении некоррелированных фонов, что обсуждается в следующем разделе. Эффективность детектирования антинейтрино уменьшилась совсем немного до уровня 99.98%, что было определено изучением распределений переменных f_{ID} , f_{PSD} , и Q_{\max} (2-дюймовые ФЭУ) в наборах событий с настоящими взаимодействиями частиц в детекторах. Ничтожно малые неопределенности 0.01% коррелированные между детекторами и 0.01% некоррелированные между детекторами были также определены из этих исследований.

7.2.2 Некоррелированные фоновые сигналы

Два некоррелированных сигнала время от времени могут удовлетворить критериям отбора антинейтринных событий, приводя к фону, обычно называемому *случайным*. Скорость счета, спектр энергии, и другие характеристики таких фоновых событий прецизионно моделируются в результате изучения индивидуальных некоррелированных сигналов. В день, лишь несколько из $\sim 10^7$ некоррелированных сигналов могли образовать пару, удовлетворяющую критериям отбора антинейтринных событий. В итоге, остаточный фон от случайных совпадений в наборе кандидатов в антинейтринные взаимодействия был надежно оценен равным $\sim 1\%$ для ближних детекторов и $\sim 2\%$ для дальних, с ничтожно малой неопределенностью. Детальное рассмотрение этого фона обсуждается в этом разделе.

Некоррелированный сигнал был идентифицирован как первичный сигнал, если он удовлетворял условию $0.7 \text{ МэВ} < E_{\text{гес}} < 12 \text{ МэВ}$. Соответственно, он был идентифицирован как задержанный сигнал, если он удовлетворял условию $6 \text{ МэВ} < E_{\text{гес}} < 12 \text{ МэВ}$. Большая часть некоррелированных сигналов, похожих на первичный, происходит от естественной радиоактивности материалов детектора и окружающего его вещества и имеет $E_{\text{гес}} < 3 \text{ МэВ}$. Некоррелированные сигналы, похожие на задержанные, происходят в основном, из двух источников. Первый источник – это бета распады нестабильных изотопов, неизбежный побочный продукт взаимодействия космогенных мюонов в сцинтилляторе. Чаще всего встречается среди таких изотопов – ^{12}B , хотя и другие изотопы, такие как ^8Li , ^8B , и ^9C также рождаются. Второй источник – это высокоэнергичные γ -кванты, рождаемые от захватов нейтронов, испускаемых калибровочными источниками ^{241}Am - ^{13}C , расположенными в автоматических калибровочных модулях на крышке AD. Небольшая часть этих γ -квантов проникает в сцинтиллятор и производит сигналы, похожие на задержанные. Заметим, что некоррелированные сигналы, появляющиеся в период времени, когда действует мюонное вето или отбор на множественность, уже исключены из исследуемых наборов данных. На рис. 7.6 показан спектр реконструированной энергии для всех изолированных сигналов, похожих на первичный для всех восьми детекторов. Сигналы, похожие на задержанные с $E_{\text{гес}} > 6 \text{ МэВ}$ являются подмножеством этого распределения. Спектр первичных сигналов от случайных совпадений оценивается из этих распределений для каждого детектора.

Фон от случайных совпадений моделируется с использованием комбинаций этих некоррелированных сигналов, похожих на первичный и задержанный. Скорость счета фона от случайных совпадений для отбора A есть

$$R_{\text{acc}}^A = R_d (1 - e^{-R_p \Delta t}) e^{-2R_p \Delta t}, \quad (7.3)$$

где R_p – измеренная скорость счета сигналов, похожих на первичный, R_d – измеренная скорость счета сигналов, похожих на задержанный, и $\Delta t \cong 200 \text{ мкс}$ – ширина временного окна для отбора пары сигналов в кандидата на взаимодействие антинейтрино. Множитель в скобках – это вероятность того, что сигнал, похожий на первичный, произойдет во временном окне Δt до некоррелированного с ним сигнала, похожего на задержанный. Последний множитель учитывает эффективность вето на множественность, которое отбрасывает случайный фон в случае, если второй сиг-

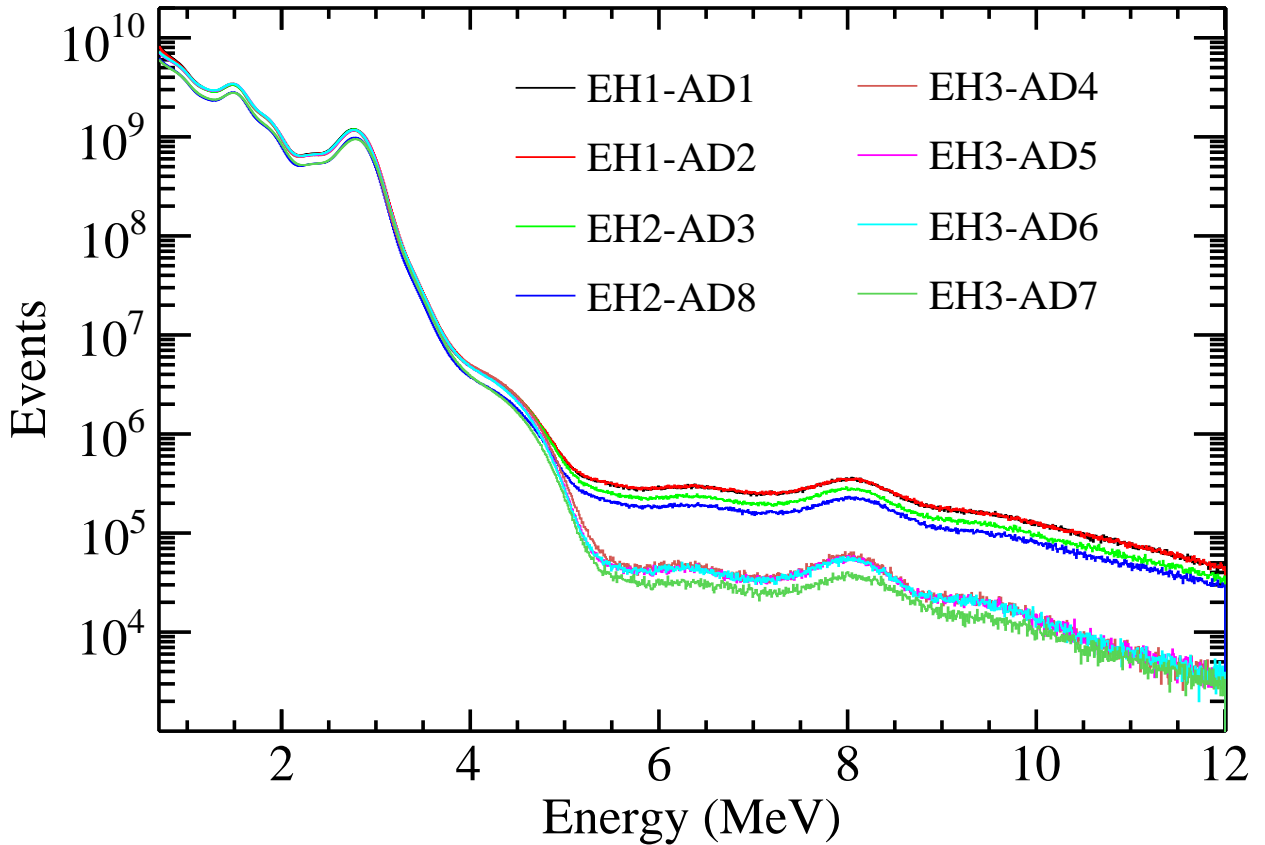


Рисунок 7.6 — Спектр реконструированной энергии для всех изолированных сигналов, похожих на первичный для всех восьми детекторов. Большая часть некоррелированных сигналов, похожих на первичный, происходит от естественной радиоактивности материалов детектора и окружающего его вещества и имеет $E_{\text{гес}} < 3$ МэВ. Основной вклад в спектр сигналов, похожих на задержанный, дают бета распады ^{12}B и γ -кванты от захватов нейтронов от калибровочных источников ^{241}Am - ^{13}C , расположенных на крышке каждого детектора.

нал, похожий на первичный, произошел либо до первичного, либо после задержанного сигнала. С учетом того, что все другие критерии отбора антинейтринного сигнала (например, отбрасывание всплеск ФЭУ, мюонное вето, и т.д.) уже были применены при отборе некоррелированных сигналов для вычисления R_p и R_d , оценка для скорости счета фоновых событий от случайных совпадений R_{acc}^A автоматически учитывает эффективности этих критериев.

Небольшая разница в критерии на множественность в отборе В, подчеркнутая в таб. 7, приводит к несколько другой формуле, оценивающей скорость счета фоновых событий от случайных совпадений:

$$R_{\text{acc}}^B = R_d R_p \Delta t e^{-2R_p \Delta t} e^{-R_d \Delta t}. \quad (7.4)$$

Скорости счета фоновых событий от случайных совпадений варьировались со временем для каждого детектора. За несколько первых месяцев после введения в эксплуатацию каждого детектора, скорость счета сигналов, похожих на первичный, R_p уменьшилась на $\sim 20\%$, что связано с очисткой воды в водном бассейне, удалившей часть вещества с естественной радиоактивностью. Со временем скорости счета стабилизировались в диапазоне (55-60) Гц для всех восьми детекто-

ров. Как видно из рис. 7.6, R_p в основном определяется сигналами с энергиями чуть выше порога отбора 0.7 МэВ. Небольшие изменения в электрическом шуме окружения в каждом экспериментальном холле могут привести к небольшим изменениям в эффективности этого порогового значения. Эти изменения, в свою очередь, видны как небольшая нестабильность в скорости счета фона от случайных совпадений в зависимости от времени. Скорость счета сигналов, похожих на задержанный, R_d заметно отличается между экспериментальными холлами из-за уменьшения скорости счета рождения ^{12}B космогенными мюонами относительно глубины расположения холла. Рождение нейтронов источниками ^{241}Am - ^{13}C уменьшается со временем, что уменьшает скорость счета сигналов, похожих на задержанный от γ -квантов от этого источника. Во время установки последних двух детекторов летом 2012 года, источники ^{241}Am - ^{13}C были удалены от автоматических калибровочных модулей ACU-B и ACU-C всех детекторов в ЕНЗ. Хотя главной целью этих действий было уменьшение фона, связанного с ^{241}Am - ^{13}C , как будет описано в следующем разделе, в итоге скорость счета сигнала, похожего на задержанный, уменьшилась вдвое во всех дальних детекторах. Итого, если в начале набора данных, каждый детектор регистрировал порядка 1000 (ЕН1), 800 (ЕН2), и 250 (ЕН3) сигналов, похожих на задержанный, в день, то со временем соответствующие числа уменьшились на $\sim 20\%$ для ближних детекторов и на $\sim 65\%$ для дальних детекторов. Поскольку скорости счета некоррелированных сигналов варьировались со временем, также вел себя и фон от случайных совпадений. Поэтому, данные были разбиты на короткие периоды времени и фон от случайных совпадений был оценен независимо для каждого периода. Для отбора А, эти периоды соответствовали каждым четырем часам, а для отбора В – каждым 24 часам. Оценка скорости счета фоновых событий от случайных совпадений как функции времени показана на рис. 7.7. Скорости счета фоновых событий от случайных совпадений, определенные выше, были перепроверены другим методом. Отбор антинейтринных событий повторялся с введением искусственной сдвигки по времени t^{off} , примененной к первичному или задержанному сигналам, т.е. $1 \mu\text{s} + t^{\text{off}} < \Delta t < 200 \mu\text{s} + t^{\text{off}}$. Введение временной сдвигки дает набор событий, обогащенный фоном от случайных совпадений. Минимальная сдвигка в 1 мс подавляет вклад от действительно коррелированных сигналов, таких как пары от ОБР, быстрых нейтронов, и от распадов ^9Li . Чтобы увеличить статистическую точность этой оценки, процесс отбора повторялся с использованием неперекрывающихся временных окон, вплоть до t^{off} of 20 мс. На рис. 7.8 приведены наблюдаемые распределения расстояний между первичным и задержанным сигналами для кандидатов во взаимодействия $\bar{\nu}_e$ и для фоновых событий, полученных сдвигкой во времени. Также на этом рисунке приведено распределение для моделированных взаимодействий $\bar{\nu}_e$.

Форма и нормировка распределения, полученного методом сдвигки по времени, согласуется с наблюдаемым распределением кандидатов во взаимодействия $\bar{\nu}_e$ при $\Delta r_{p,d} > 2$ м. Оценка скорости счета также согласуется с двумя предыдущими вычислениями, хотя и с меньшей точностью. Неопределенность в оценке фона от случайных совпадений пренебрежимо мала. Наибольший вклад в неопределенность был от неопределенности в R_d , равный 0.2% для ближних и 0.4% для дальних детекторов. Вариация в методах отбора изолированных сигналов, похожих на первичный, приводит к вариации на уровне 0.3% в R_p в крайних случаях. В итоге, полная неопределенность определялась точностью в 1% проверки скорости счета фоновых событий от случайных совпадений методом, использующим сдвиг временного окна. Это значение используется в анализе

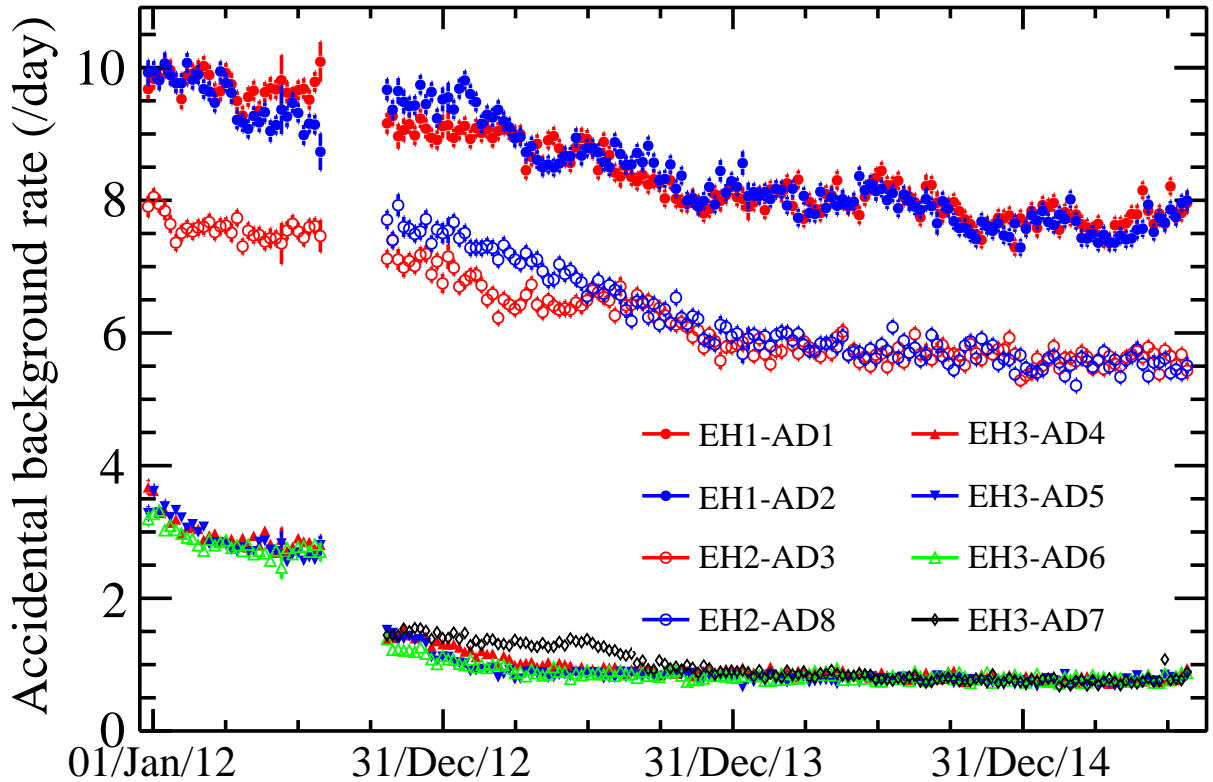


Рисунок 7.7 — Скорость счета фоновых событий от случайных совпадений для отбора А как функции времени для каждого антинейтринного детектора, вычисленная для измеренных скоростей счета некоррелированных сигналов, удовлетворяющих критериям отбора для первичного R_p и задержанного R_d сигналов от взаимодействий $\bar{\nu}_e$. Глубина расположения экспериментального холла была главной причиной, определяющей скорость счета фоновых событий от случайных совпадений, поскольку нестабильные изотопы рождаются во взаимодействиях космогенных мюонов. Уменьшение скорости счета фоновых событий от случайных совпадений со временем стало итогом уменьшения содержания естественной радиоактивности после инсталляции детектора и последующей очистки воды в водном бассейне, а также вследствие уменьшения испускания нейтронов калибровочным источником $^{241}\text{Am}-^{13}\text{C}$. R_p чувствительно к небольшим изменениям в электрическом шуме, что приводит к наблюдаемой нестабильности скорости счета фоновых событий от случайных совпадений. Вертикальный разрыв в распределениях связан с установкой последних двух детекторов летом 2012. Удаление двух из трех источников $^{241}\text{Am}-^{13}\text{C}$ в каждом дальнем детекторе уменьшило фон от случайных совпадений на $\sim 50\%$.

в качестве консервативной оценки возможной систематической неопределенности. С учетом того, что вклад фоновых событий от случайных совпадений в набор кандидатов во взаимодействия антинейтрино оценивается на уровне от 1% до 2%, заключаем, что случайные совпадения вносят неопределенность в наблюдаемое число антинейтринных событий $\lesssim 0.01\%$.

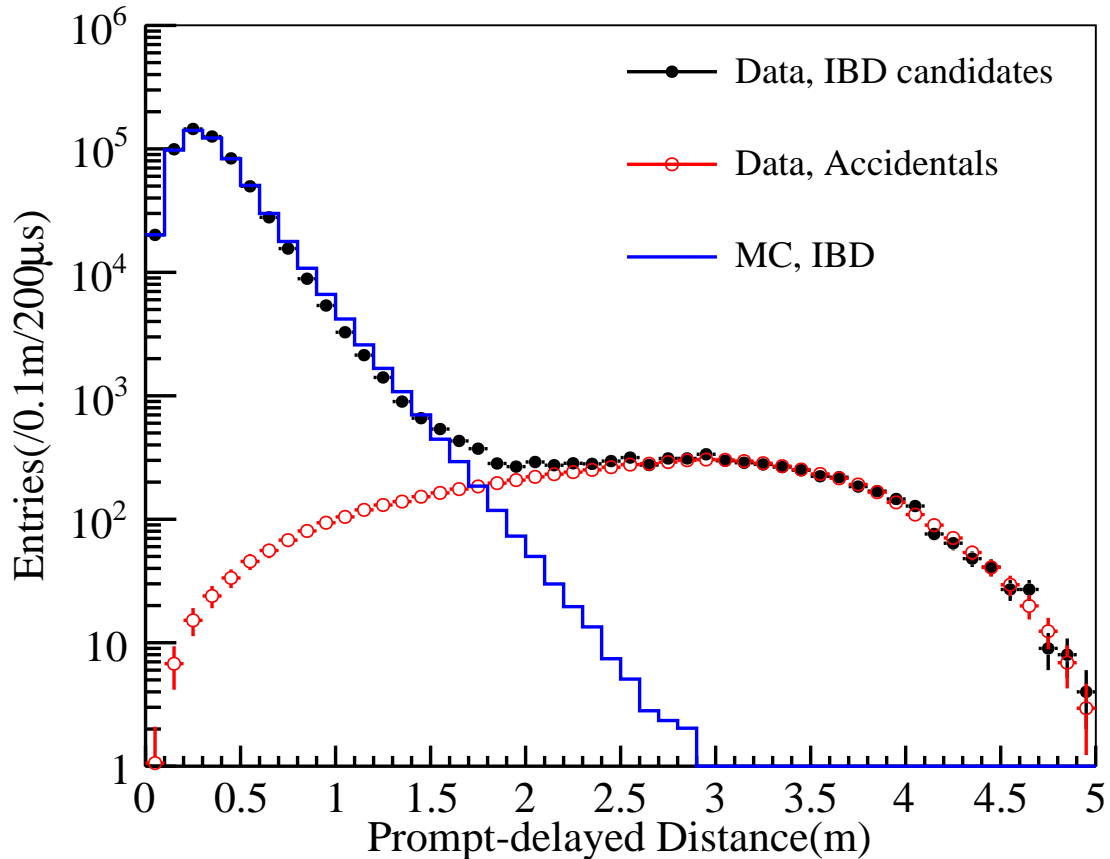


Рисунок 7.8 — Распределение расстояния между реконструированными положениями первичного и задержанного сигналов в наборе событий с кандидатами на взаимодействия $\bar{\nu}_e$, суммарно по всем детекторам (черные точки). Эти положения сильно коррелируют друг с другом, как продемонстрировано моделированием $\bar{\nu}_e$ взаимодействий (синяя линия). Повторение отбора $\bar{\nu}_e$ взаимодействий с искусственным сдвигом по времени от 1 мс до 20 мс между прямым и задержанным сигналами, усиливает вклад от случайных совпадений (красные точки) и подавляет коррелированные сигналы. Согласованность этих распределений подтверждает оценку вклада от случайных совпадений, которая варьируется от 1% до 2% в зависимости от детектора.

7.2.3 Коррелированные фоны

Оставшиеся источники фонов связаны с физическими процессами, порождающими коррелированные пары первичного и задержанного сигналов, способные имитировать взаимодействия $\bar{\nu}_e$. Было найдено шесть возможных источников фона.

- *Космогенные мюоны.* Космогенные мюоны, взаимодействуя, разваливают в детекторе или около него стабильные ядра на фрагменты, порождая свободные нейтроны и нестабильные ядра. Сигналы от начального мюонного взаимодействия, последующего захвата нейтрона или бета распада нестабильных ядер могут сформировать пару сигналов, удовлетворяющую критериям отбора взаимодействия $\bar{\nu}_e$. Мюоны легко обнаружить по их большому световыходу в сцинтилляторе или по черенковскому свету в водном бассейне. Отбрасывание сигналов, одновременных с прохождением мюона или последующих, подавляет та-

кой фон до ничтожно малого уровня за счет потери живого времени набора данных: 2% в дальнем холле и 14%–18% в ближних холлах.

- *Быстрые нейтроны.* Взаимодействия космогенных мюонов с веществом рядом с детектором порождают нейтроны с большими энергиями, называемые *быстрыми нейтронами*. Ядерные взаимодействия таких нейтронов со сцинтиллятором могут имитировать первичный сигнал, а последующий захват термализованного нейтрона идентичен задержанному сигналу от ОБР. Вклад такого фона $\lesssim 0.1\%$.
- *β - n распады.* Взаимодействия космогенных мюонов иногда приводят к рождению редких нестабильных изотопов ${}^9\text{Li}$ и ${}^8\text{He}$, которые могут испустить нейтрон при бета распаде. Мюонное вето уменьшает фон от этих изотопов до уровня 0.3%–0.4% в зависимости от экспериментального холла, с систематической неопределенностью оцененной в $\sim 50\%$.
- *Нейтроны от калибровочных источников ${}^{241}\text{Am}$ - ${}^{13}\text{C}$.* Во время работы детектора было найдено, что нейтроны от калибровочных источников ${}^{241}\text{Am}$ - ${}^{13}\text{C}$ иногда добавляют в детектор несколько γ -квантов, коррелированных во времени. Вклад от этого источника фона $\lesssim 0.1\%$.
- *(α, n) взаимодействия.* α частицы, излучаемые естественной радиоактивностью в детекторе, могут выбивать нейтроны из стабильных ядер. Соответствующим процессом, чаще всего встречающимся в эксперименте Daya Bay, является реакция ${}^{13}\text{C}(\alpha, n){}^{16}\text{O}$. Протоны, рассеянные вылетевшим нейтроном, или γ -кванты, испущенные возбужденным ядром ${}^{16}\text{O}^*$, могут имитировать первичный сигнал, а последующий захват термализованного нейтрона идентичен задержанному сигналу от ОБР. Вклад от этого источника фона оценивается $\lesssim 0.07\%$.
- *Сигналы с большой множественностью.* Наложение коррелированных сигналов от взаимодействия $\bar{\nu}_e$ с некоррелированными сигналами от радиоактивности приводит к трем или более сигналам во временном окне, удовлетворяющем критериям отбора ОБР. Хотя такие события не являются фоновым сами по себе, эти наборы сигналов вносят путаницу в определение первичных и задержанных сигналов от взаимодействия $\bar{\nu}_e$. Полное удаление таких событий с большой множественностью ≥ 3 разрешает эту неопределенность, но вносит потерю эффективности $\sim 2.5\%$ детектирования $\bar{\nu}_e$.

Характеристики каждого из этих фонов, методы их подавления и оставшийся вклад фона в набор событий с кандидатами в $\bar{\nu}_e$ взаимодействия обсуждаются в следующих разделах. Среди источников коррелированных фонов только β - n распады имеют заметный вклад и систематическую неопределенность в осцилляционное измерение, обсуждаемое в этой части.

Фон от космогенных мюонов и мюонное вето. Минимизация фона от космогенных мюонов была главной причиной в выборе местоположения проведения эксперимента Daya Bay для измерения нейтринных осцилляций. Горы, примыкающие к атомной станции, обеспечивают хорошую защиту всех экспериментальных холлов, как показано в таб. 6. Потоки космогенных мюонов с учетом защиты горной породой равны 1.16, 0.86, и 0.054 Гц/м² для холлов ЕН1, ЕН2, и ЕН3 соответственно [208].

Мюоны, пересекающие антинейтринный детектор, оставляют в среднем ~ 0.6 ГэВ своей энергии в сцинтилляторе, что позволяет их с легкостью отличить от сигналов антинейтрино. В отборе А мюоны в AD идентифицировались как любой сигнал с реконструированной энергией >20 МэВ, а в отборе В использовались сигналы $>3,000$ ф.э. ($\gtrsim 18$ МэВ). Любой сигнал, похожий на задержанный, следующий за сигналом мюона в AD в течение временного окна $t_{AD\mu}^{\text{veto}}$ отбрасывался. Такое вето применялось независимо для каждого AD. В отборе А, $t_{AD\mu}^{\text{veto}} = 1$ мс, в то время как в отборе В используется более долгое вето 1.4 мс, чтобы избежать корреляций в эффективностях мюонного вето и подавления событий с большой множественностью. Длительность вето диктуется характерным временем захвата нейтрона в антинейтринных детекторах. Хотя выбранная длительность вето может показаться достаточно большой по сравнению со временем захвата ~ 28 мкс в Gd-ЖС, некоторые нейтроны задерживаются в ЖС объеме и медленно диффундируют в объем Gd-ЖС. С учетом среднего времени захвата в ЖС объеме порядка 200 мкс, выбранная длительность соответствует подавлению нейтронов на уровне $\sim e^{-5}$ (или $\sim e^{-7}$ для отбора В.)

Оба метода отбора идентифицируют мюоны в водной защите как любой сигнал в IWS или OWS, в которых более 12 ФЭУ измерили сигнал выше порогового значения. Нейтроны, рожденные во взаимодействиях мюонов в водном бассейне также имеют шанс добраться до мишенного объема Gd-ЖС, хотя и с гораздо меньшей вероятностью. Более короткое временное окно $t_{WS\mu}^{\text{veto}} = 600$ мкс было достаточно, чтобы отбросить такие нейтроны. Как обсуждается в разделе 6.2, каждый из детекторов IWS, OWS, и AD имел свою независимую триггерную систему. Некоторые различия в задержках электронных сигналов в детекторе приводят к тому, что некоторые сигналы в AD видны раньше одновременных сигналов в водной защите. Поэтому, любой сигнал, похожий на задержанный, наблюдаемый в AD за 2 мкс до мюонного сигнала, идентифицированного водной системой, отбрасывается. Это вето применялось ко всем AD в одном экспериментальном холле в обоих методах отбора А и В.

Меньшая доля мюонов порождала гораздо большую долю нейтронов и нестабильных ядер в AD. Такие взаимодействия, ассоциирующиеся с гораздо бóльшим световыходом в сцинтилляторе по сравнению с ожиданием для минимально-ионизирующих мюонов, предположительно были вызваны ливнями частиц, порождаемых мюонами. Отбор А идентифицирует такие ливни в AD как любой сигнал с реконструированной энергией >2.5 ГэВ, в то время как в отборе В требуется наличие сигнала с $>30,000$ ф.э. ($\gtrsim 1.8$ ГэВ). Временное вето, накладываемое после таких сигналов, $t_{\text{shower}}^{\text{veto}}$, было гораздо более длительным: 1 с в отборе А, и 0.4 с в отборе В. Такое более длительное время было необходимо из-за времени жизни 178.3 мс нестабильного ${}^9\text{Li}$, как обсуждается далее. Это вето накладывается независимо для каждого детектора для обоих отборов А и В.

Комбинация мюонных вето приводит к пренебрежимо малому фону от мюонов, за исключением быстрых нейтронов и β - n распадов, обсуждаемых в следующих разделах.

Используемое вето уменьшает время набора взаимодействий $\bar{\nu}_e$, что можно охарактеризовать эффективностью ϵ_μ , дающей вклад в эффективность отбора антинейтринных взаимодействий. ϵ_μ измеряется напрямую в данных с использованием

$$\epsilon_\mu = \left(\sum_i t_s^i \right) / t_{\text{DAQ}}, \quad (7.5)$$

где t_s^i – это индивидуальный сегмент времени набора данных с номером i , с началом времени сразу после окончания действия мюонного вето в детекторе. t_{DAQ} – это время между первым и последним сигналами в периоде набора данных, учитывающее периоды, когда данные не набирались или они были ненадлежащего качества. Итоговая эффективность была $\sim 82\%$, $\sim 86\%$ и $\sim 98\%$ для детекторов в ЕН1, ЕН2 и ЕН3, соответственно. Доминирующей неопределенностью этого вычисления была неопределенность времени записи каждого сигнала, оказавшейся пренебрежимо малой.

Фон от быстрых нейтронов. Хотя взаимодействия космогенных мюонов в детекторе или водном бассейне можно эффективно идентифицировать, взаимодействия мюонов в горной породе, окружающей экспериментальный холл, не регистрируются приборами. Нейтроны, рожденные в этих взаимодействиях, могут достичь детекторов не оставляя детектируемых следов в водном бассейне. Для того, чтобы поглотить такие нейтроны, толщина водной защиты, окружающей АД была, по крайней мере, 2.5 м для любых направлений. В результате, только наиболее энергичные, или *быстрые*, нейтроны имели возможность пройти весь путь до Gd-ЖС. Быстрый нейтрон может остановиться в сцинтилляторе благодаря энергичным столкновениям с ядрами, в первую очередь, с ^1H . Ионизация сцинтиллятора рассеянным протоном может имитировать первичный сигнал от взаимодействия $\bar{\nu}_e$, а затем замедленный нейтрон может захватиться и инициировать задержанный сигнал.

Широкий и гладкий энергетический спектр рассеянных частиц от столкновений с быстрыми нейтронами приводит к спектру энергий первичного сигнала, который можно аппроксимировать плоским спектром вплоть до энергий ~ 100 МэВ. Быстрые нейтроны были доминирующими среди коррелированных сигналов при таких высоких энергиях. Коррелированные сигналы с энергиями первичного сигнала больше, чем использованный предел для отбора взаимодействий $\bar{\nu}_e$, $E_p > 12$ МэВ, использовались для прямого измерения этого фона. Экстраполяция измеренного фона в область энергий сигнала от $\bar{\nu}_e$, $0.7 \text{ МэВ} < E_p < 12 \text{ МэВ}$, дала начальную оценку вклада фона в набор $\bar{\nu}_e$.

Хотя моделирование поддерживало применимость линейной экстраполяции этого фона в область сигнала от $\bar{\nu}_e$, метод, основанный на данных, был более надежен. Спектр энергии первичных сигналов от быстрых нейтронов был измерен напрямую с использованием событий, похожих на взаимодействия $\bar{\nu}_e$, сопровождающие космогенные мюоны. В частности, потребовав, чтобы мюон был идентифицирован только в OWS или в РПК, но не в IWS, был отобран набор приграничных мюонов. На рис. 7.9 приведено сравнение спектров энергий первичных сигналов в наборах кандидатов во взаимодействиях антинейтрино, отобранных методом А с измененным условием $0.7 \text{ МэВ} < E_p < 100 \text{ МэВ}$ для трех экспериментальных холлов. Также показан спектр кандидатов, для которых задержанный сигнал был в интервале 200 мкс после обнаруженного мюона у границы детектора. Спектры энергий выше 12 МэВ находятся в согласии для двух методов оценки фона от быстрых нейтронов. При этом, метод с тагированным мюоном позволяет измерить спектр в области энергий сигнала $0.7 \text{ МэВ} < E_p < 12 \text{ МэВ}$, что ясно видно на рисунке 7.9. Спектры энергий первичных сигналов от приграничных мюонов, идентифицированных только OWS или РПК также согласуются друг с другом.

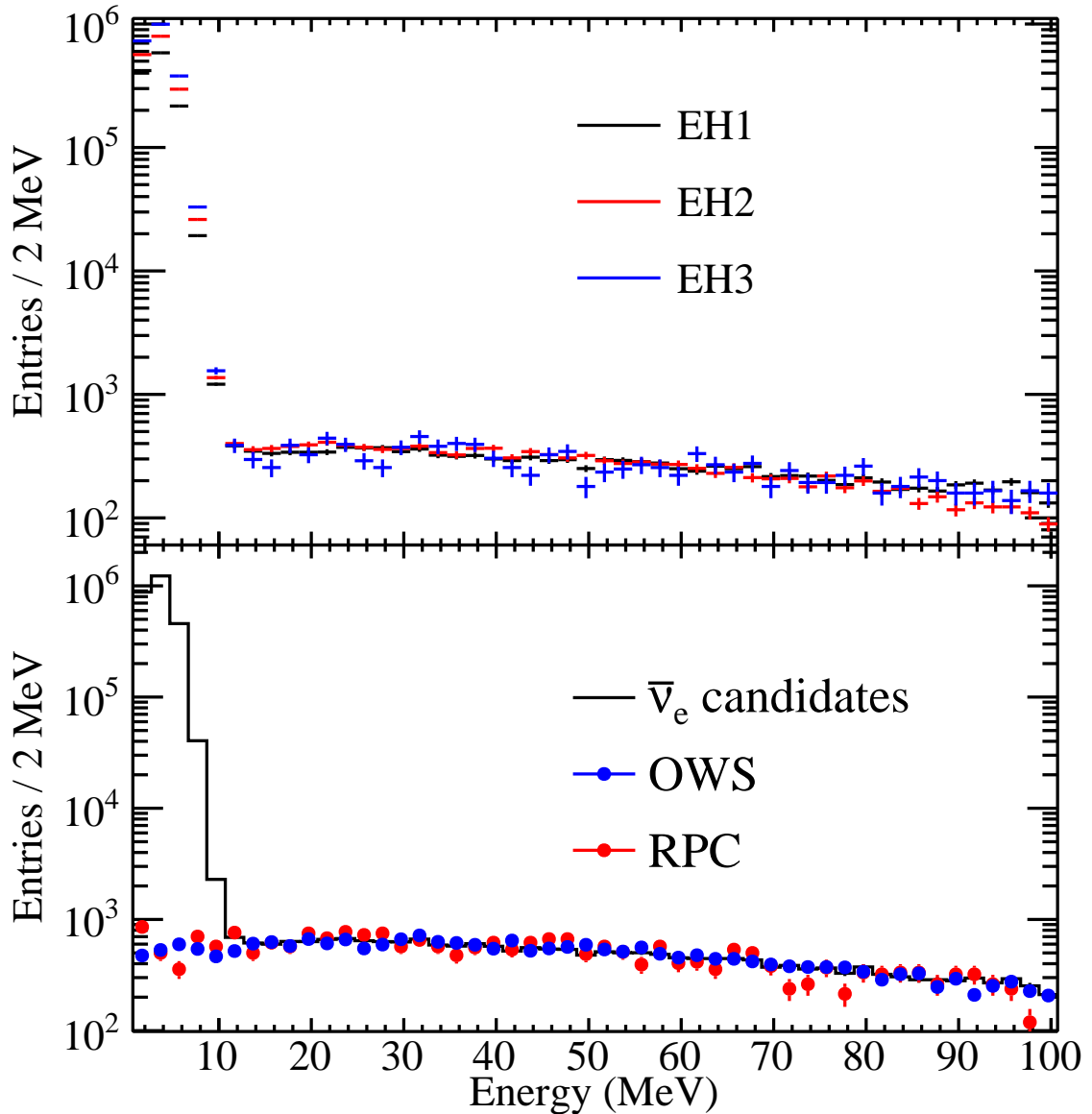


Рисунок 7.9 — (Верхний рисунок) Изменение условия $0.7 \text{ МэВ} < E_p < 100 \text{ МэВ}$ при отборе первичных сигналов в кандидатах во взаимодействия $\bar{\nu}_e$ показало широкий непрерывный спектр фоновых событий, приписываемых к энергичным, или быстрым нейтронам. $\bar{\nu}_e$ взаимодействия видны как доминирующие сигналы при энергиях ниже $\sim 12 \text{ МэВ}$. Спектры энергий от быстрых нейтронов похожи во всех трех экспериментальных холлах. (Нижний рисунок) Сумма спектров от кандидатов во взаимодействия $\bar{\nu}_e$ всех трех экспериментальных холлов (черная линия) в сравнении со спектром от быстрых нейтронов, идентифицированных как кандидаты во взаимодействия $\bar{\nu}_e$, которые произошли в течение 200 мкс после сигнала мюона OWS или в РПК, но не в IWS. Выше 12 МэВ оба спектра согласуются друг с другом. Нормировка спектра от быстрых нейтронов была выбрана таким образом, чтобы интегралы от спектров после 12 МэВ совпадали. Спектры от быстрых нейтронов были использованы для оценки вклада от этого фона в наборе $\bar{\nu}_e$.

Скорость счета оставшегося фона от быстрых нейтронов R_{fn}^i в наборе $\bar{\nu}_e$ для каждого детектора оценивается из наблюдаемой скорости счета, R_{he}^i , фона от быстрых нейтронов с $12 \text{ МэВ} < E_p < 100 \text{ МэВ}$. Быстрые нейтроны, удовлетворяющие критериям отбора задержанного сигнала в $\bar{\nu}_e$ взаимодействиях, зарегистрированные в течение 200 мкс после сигнала мюона OWS или в РПК, но не в IWS, использовались для оценки фона в области энергий антинейтринного сигнала,

$0.7 \text{ МэВ} < E_p < 12 \text{ МэВ}$:

$$R_{\text{fn}}^i = R_{\text{he}}^i \frac{R_{\text{fn}}^\mu}{R_{\text{he}}^\mu}. \quad (7.6)$$

При помощи этого метода было найдено, что фон от быстрых нейтронов дает вклад в набор $\bar{\nu}_e$ $\lesssim 0.1\%$ для всех детекторов. Неопределенность в оценке этого фона ничтожно мала, $\lesssim 0.03\%$.

Фон от β -n распадов. Нестабильное ядро, испускающее нейтрон при бета распаде, производит коррелированную пару сигналов, почти тождественную сигналам от ОБР. Скорость рождения мюонами ядер с β -n распадами в органическом жидком сцинтилляторе была измерена в работе [215]. Ядра ${}^9\text{Li}$, со временем жизни $\tau = 257.2$ мс и максимальной энергией β частицы равной 13.6 МэВ, и ${}^8\text{He}$, со временем жизни $\tau = 171.7$ мс и максимальной энергией β частицы равной 10.7 МэВ, встречаются наиболее часто. Моделирование, основанное на пакете FLUKA, показало, что доминирующим был процесс фрагментации ${}^{12}\text{C}$ пионами π^- , рожденными в адронном ливне частиц, вызванном мюоном. Сечения рождения ${}^9\text{Li}$ и ${}^8\text{He}$ относятся друг к другу при этом как 10:1 [215].

Естественная, зависящая от экспериментального холла, вариация в рождении ядер с β -n распадами оказалась наиболее важной систематической неопределенностью для осцилляционного анализа.

Фон от β -n распадов различался от взаимодействий $\bar{\nu}_e$ ассоциацией с предшествующим мюоном в том же детекторе. Такая ассоциация усложнялась высоким темпом счета мюонов в детекторе по сравнению со временем жизни β -n распадающихся ядер, приводя к невозможности дискриминации на уровне сигнала. Несмотря на это, распределение разницы времен между каждым кандидатом во взаимодействие $\bar{\nu}_e$ и самым последним сигналом мюона в AD может быть использовано для статистической оценки фона от β -n распадов [216]. Распределение скорости счета полного коррелированного сигнала R_{total} относительно времени детектирования самого последнего сигнала мюона может быть выражено в виде:

$$R_{\text{total}} = R_{\text{IBD}} R_\mu e^{-R_\mu t} + \sum_i^{{}^9\text{Li}, {}^8\text{He}, {}^{12}\text{B}} R_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}, \quad (7.7)$$

где $\lambda_i = R_\mu + \frac{n_i}{\tau_i}$ – это эффективная временная константа для ядра i со временем жизни τ_i и скоростью счета R_i , учитывающая вклад от скорости счета мюона R_μ . Фактор n_i равен 1 для ${}^9\text{Li}$ и ${}^8\text{He}$. Слагаемое, учитывающее ${}^{12}\text{B}$ с n_i равным 2, было включено, для того чтобы учесть возможное увеличение фона после взаимодействия мюона, в котором два распада ${}^{12}\text{B}$ имитирует первичный и задержанный сигналы от $\bar{\nu}_e$.

Фит распределения R_{total} для всех $\bar{\nu}_e$ кандидатов, не включая мюонное вето, не дает accurатной оценки фона от β -n распадов. Вклад β -n распадов относительно $\bar{\nu}_e$ кандидатов может быть усилен, если ограничиться событиями, в которых мюон породил ливень частиц. Фон от случайных совпадений можно уменьшить, потребовав $3.5 \text{ МэВ} < E_p < 12 \text{ МэВ}$, и $1 \text{ мкс} < \Delta t < 100 \text{ мкс}$. Моделирование распадов ${}^9\text{Li}$ и ${}^8\text{He}$ позволяет оценить, что такие критерии отбора оставляют до 67% от β распадов. В итоге, становится возможным измерение вклада от ${}^9\text{Li}$ и ${}^8\text{He}$, как показано на рис. 7.10, для отбора А. Вклад фона от β -n распадов был оценен несколькими методами на уровне $(0.37 \pm 0.16)\%$, $(0.29 \pm 0.13)\%$, и $(0.20 \pm 0.08)\%$ для одного детектора в экспериментальных холлах ЕН1, ЕН2 и ЕН3 соответственно.

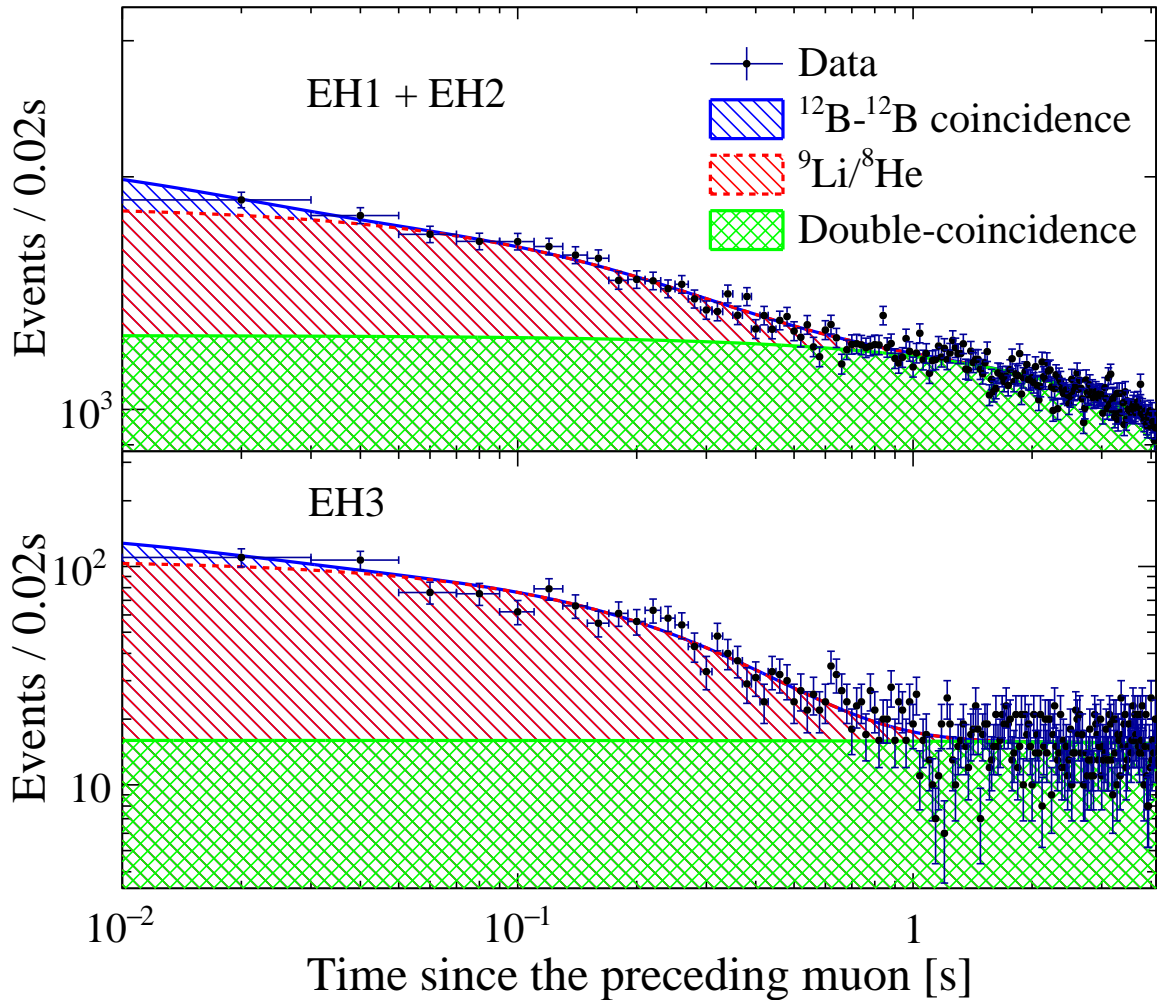


Рисунок 7.10 — Распределение кандидатов во взаимодействия $\bar{\nu}_e$ относительно времени после последнего ливня частиц, индуцированного мюоном ($E_{rec} > 2.5$ ГэВ) в том же детекторе. Фит этого распределения позволяет выделить вклады ОБР, случайных совпадений (зеленая область) и событий коррелированных с мюоном (красная область). Небольшой вклад от β распадов ^{12}B виден в первом бине (синяя область).

В дополнение к измерению темпа счета фона от β -n распадов, требовалась еще характеристика формы спектра энергии для учета в осцилляционном анализе. Форма спектра, приведенная на рис. 7.11, определялась из набора β -n распадов, обнаруженных после ливня частиц, вызванного мюоном. Модельное предсказание соответствует спектру энергий для известных β -n распадов ^9Li .

Фон нейтронов от источников ^{241}Am - ^{13}C . Каждый из трех автоматических калибровочных модулей, находящихся на крышке каждого антинейтринного детектора, содержит источник нейтронов ^{241}Am - ^{13}C низкой интенсивности ~ 0.7 Гц, который используется для изучения отклика детектора на захват нейтрона [217]. Когда не используются для калибровки, эти нейтронные источники находятся каждый в своем модуле. Выбор и дизайн нейтронного источника были мотивированы опасениями по поводу возможного коррелированного фона, который такой источник может производить. Например, ядро ^{252}Cf было исключено из-за испускания нескольких нейтронов и ассоциированных с ними γ -квантов. В итоге, был выбран дизайн, при котором энергия α частиц

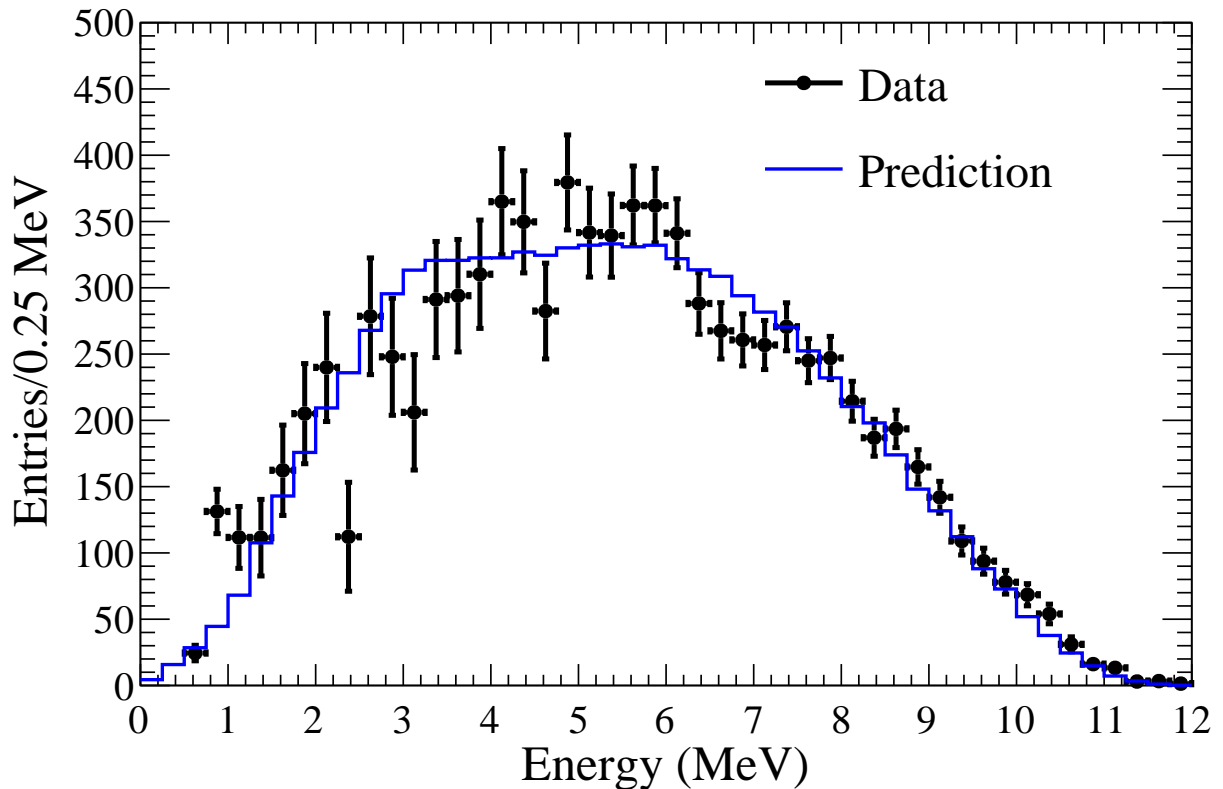


Рисунок 7.11 — Сравнение наблюдаемого (черные точки) и модельного (голубая линия) распределений реконструированной энергии от β -n распадов ${}^9\text{Li}$.

от источника ${}^{241}\text{Am}$ поглощается, чтобы избежать излучения γ -квантов от взаимодействия α частиц с ядром ${}^{13}\text{C}$. Моделирования показывали ничтожно малую вероятность того, что нейтрон, испущенный источником, находящемся в контейнере, может оказаться в Gd-ЖС и вызвать там фоновые сигналы.

Несмотря на эти усилия, коррелированные сигналы все же порождались в результате следующего редкого механизма. Сначала, нейтрон неупруго рассеивался на ядрах Fe, Cr, Mn или Ni, содержащихся в нержавеющей стали детектора, что приводило к излучению первичных γ -квантов. Нейтрон затем захватывался ядром в нержавеющей стали или ядром гадолиния из танка переполнения жидкости Gd-ЖС, производя задержанные γ -кванты. Когда энергичные γ -кванты от каждого из этих первичных и задержанных взаимодействий проникали в объем сцинтиллятора и взаимодействовали там, они могли имитировать сигнал от взаимодействия $\bar{\nu}_e$.

Впервые фон от источников ${}^{241}\text{Am}$ - ${}^{13}\text{C}$ был обнаружен при изучении избытка некоррелированных γ -квантов с $E_{\text{rec}} > 6$ МэВ. Наблюдаемый избыток γ -квантов имел реконструированные положения в основном в верхней половине каждого детектора [218], с темпом счета и спектром энергии в согласии с моделированием. Как обсуждалось в разделе 7.2.2, такие некоррелированные γ -кванты увеличивали темп счета фона от случайных совпадений. Моделирование, обсуждаемое подробно в работе [219], учитывало фон от источников ${}^{241}\text{Am}$ - ${}^{13}\text{C}$.

Моделирование этого коррелированного фона обладало заметной неопределенностью, поскольку оно зависит от аккуратного знания большого количества факторов: начального спектра энергий нейтронов, спектра γ -квантов от неупругих ядерных столкновений, положения и типа

изотопа, на котором захватывается нейтрон, прохождение и потери энергии γ -квантов достигающих сцинтиллятор. Все эти факторы влияют на моделирование этого фона. Поэтому был применен эмпирический подход для изучения этого фона. Летом 2012 на десять дней на крышку детектора EN3-AD5 был установлен новый более интенсивный ~ 59 Гц источник $^{241}\text{Am-}^{13}\text{C}$. После этого было измерено увеличение числа некоррелированных сигналов с $E_{\text{rec}} > 6$ МэВ в верхней части детектора. С учетом увеличенного фона от случайных совпадений в AD5 наблюдались дополнительные 613 ± 64 событий коррелированного фона по сравнению с рядом стоящим детектором AD4. Для интенсивного источника $^{241}\text{Am-}^{13}\text{C}$, отношение темпов счета коррелированных сигналов к некоррелированным,

$$f^{\text{int}} = \frac{R_{\text{corr}}^{\text{int}}}{R_{\text{uncorr}}^{\text{int}}}, \quad (7.8)$$

было измерено $(1.5 \pm 0.3) \times 10^{-3}$. Моделирование этого фона сравнивалось с наблюдаемым темпом счета, энергетическим спектром и распределением реконструированных положений коррелированных и некоррелированных сигналов. На рис. 7.12 показан измеренный спектр энергий некоррелированных сигналов от интенсивного источника $^{241}\text{Am-}^{13}\text{C}$ с условием $E_{\text{rec}} > 5$ МэВ. Моделирование воспроизводит измеренный спектр, пики в котором относятся к γ -квантам от захватов нейтронов в нержавеющей стали. Энергетический спектр первичных сигналов от γ -квантов, рожденных в неупругих столкновениях нейтронов с ядрами в нержавеющей стали, и породивших коррелированную пару сигналов, показан на рис. 7.13. Моделирование предсказывает согласующийся спектр энергий первичного сигнала для интенсивного и еженедельного источников нейтронов $^{241}\text{Am-}^{13}\text{C}$. Форма спектра хорошо описывается моделью $S(E) = e^{-E/E_0}$ с $E_0 = 0.8 \pm 0.1$ МэВ.

Моделирование обычного источника $^{241}\text{Am-}^{13}\text{C}$ предсказывает меньшее число коррелированных сигналов относительно эквивалентного числа некоррелированных сигналов, поскольку источник располагается дальше от сцинтиллятора. Эта разница воспроизводится моделированием двойного отношения коррелированного к некоррелированному сигналам для обоих источников,

$$\eta = \frac{f^{\text{reg}}}{f^{\text{int}}}, \quad (7.9)$$

где моделирование предсказывает η равным 0.8 ± 0.2 . Разница в темпах счета в данных и моделировании используется в качестве систематической неопределенности в знании η .

Темп счета, $R_{\text{corr}}^{\text{reg}}$, коррелированного фона от обычных источников $^{241}\text{Am-}^{13}\text{C}$ оценивается согласно

$$R_{\text{corr}}^{\text{reg}} = \eta f^{\text{int}} R_{\text{uncorr}}^{\text{reg}}, \quad (7.10)$$

где $R_{\text{uncorr}}^{\text{reg}}$ – это превышение темпа счета некоррелированных сигналов с $E_{\text{rec}} > 6$ МэВ, связанное с обычными источниками $^{241}\text{Am-}^{13}\text{C}$. При помощи этого метода был найдено число фоновых событий в день $\sim 0.27 \pm 0.12$ для ближних детекторов и $\sim 0.22 \pm 0.10$ для дальних во время работы первых шести детекторов. Хотя этот фон был пренебрежимо мал по сравнению со скоростью счета $\bar{\nu}_e$ в ближних детекторах, он был сопоставим с фоном от β -n распадов. Чтобы уменьшить этот фон, источники $^{241}\text{Am-}^{13}\text{C}$ расположенные в автоматических калибровочных модулях ACU-B и ACU-C были сняты с каждого детектора из дальнего холла во время кампании 2012 по установке последних двух детекторов. Удаление этих источников уменьшило коррелированный фон примерно в три раза. Оставшиеся источники уменьшили интенсивность испускания нейтронов на $\sim 50\%$

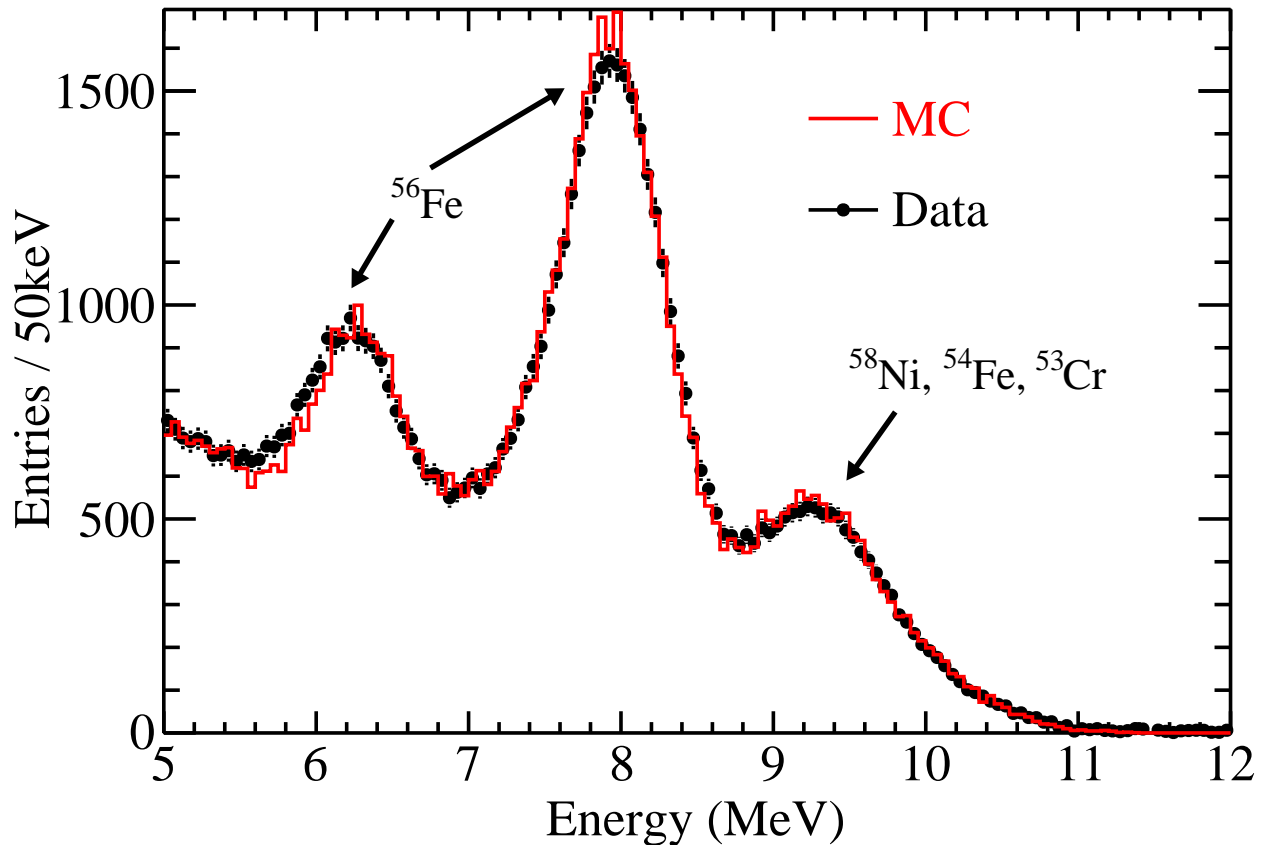


Рисунок 7.12 — Некоррелированные индивидуальные сигналы с $E_{\text{rec}} > 5$ МэВ, рожденные нейтронным источником $^{241}\text{Am}-^{13}\text{C}$ высокой интенсивности ~ 59 Гц, временно установленным на крышке детектора ЕНЗ-AD5 (черные точки). Пики в спектре связаны с захватами нейтронов ядрами Fe, Cr или Ni, содержащимися в нержавеющей стали крышки, через которую γ -кванты проникают в сцинтилляционный объем детектора. Эти измерения сравниваются с результатами моделирования коррелированных и некоррелированных сигналов, производимых этим источником (красная сплошная линия), что позволяет оценить коррелированный фон от используемых еженедельно источников $^{241}\text{Am}-^{13}\text{C}$ с интенсивностью ~ 0.7 Гц, расположенных в автоматических калибровочных модулях также на крышке детектора.

за первые два года набора данных. Это уменьшение связывается с просачиванием сцинтиллятора в источники, что уменьшило эффективность рождения нейтронов в (α, n) реакции. Комбинация обоих эффектов уменьшила этот фон примерно в шесть раз для данных, набираемых в дальних детекторах после лета 2012. Для всего набора данных, обсуждаемого в этой работе, фон от источников $^{241}\text{Am}-^{13}\text{C}$ в набор $\bar{\nu}_e$ оценивается на уровне 0.03% для ближних и 0.09% для дальних детекторов. Неопределенность оценки коррелированного фона, основанная на отклонениях в моделированных и наблюдаемых данных, оценивается в 45%.

Фон от α -n реакции. Последний источник коррелированного фона связан с ядерной реакцией (α, n) . α -частица, рожденная процессами естественной радиоактивности в сцинтилляторе, сливается с каким-нибудь ядром в материалах детектора, испуская нейтрон. Доминирующим процессом был процесс $^{13}\text{C}(\alpha, n)^{16}\text{O}$, что было определено с учетом состава органического сцинтиллятора и

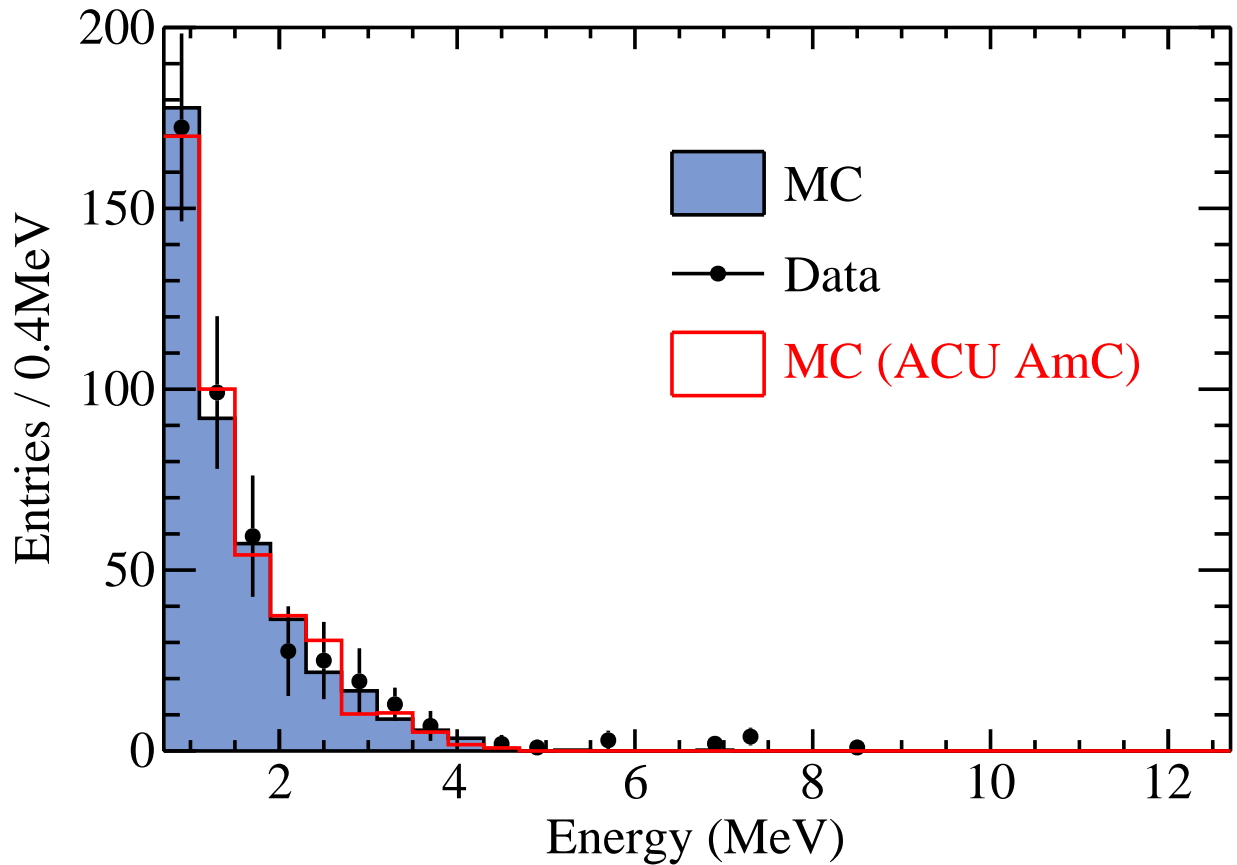


Рисунок 7.13 — Спектр реконструированной энергии первичных сигналов от коррелированной пары сигналов, рожденной нейтронным источником $^{241}\text{Am}-^{13}\text{C}$ высокой интенсивности ~ 59 Гц, временно установленным на крышку детектора ЕНЗ-AD5 (черные точки). Неупругие столкновения нейтронов в материале нержавеющей стали порождают γ -кванты, которые иногда проникают в сцинтилляционный объем детектора, производя там сигналы с быстро падающим спектром. Моделирование, проверенное на разных наборах данных, согласуется с этими измерениями (синяя сплошная линия). Спектр энергий от еженедельного источника нейтронов $^{241}\text{Am}-^{13}\text{C}$ с интенсивностью ~ 0.7 Гц оценивается как идентичный наблюдаемому (красная линия).

известных сечений (α, n) взаимодействий. Подробности моделирования фона от $^{13}\text{C}(\alpha, n)^{16}\text{O}$ приведены в работе [220].

Захват нейтрона, испущенного в процессе $^{13}\text{C}(\alpha, n)^{16}\text{O}$ реакции, идентичен задержанному сигналу во взаимодействиях $\bar{\nu}_e$. Источник первичного сигнала не был столь очевиден. Три разных процесса могли приводить к появлению первичного сигнала. В первом процессе, нейтрон испускался с достаточно большой энергией, чтобы в последующих столкновениях с протонами выделить достаточное количество сцинтилляционного света, чтобы имитировать первичный сигнал с $E_{\text{гес}} > 0.7$ МэВ. Во втором процессе, энергичный нейтрон неупруго рассеивался на ядре ^{12}C , переводя его в первое возбужденное состояние, $^{12}\text{C}^*(4.4 \text{ МэВ})$. Ядро немедленно снимает возбуждение, излучая γ -квант с энергией 4.4-МэВ, производя первичный сигнал. В третьем процессе, α -частицы с энергией больше, чем ~ 5 МэВ, чаще всего переводят ядро ^{16}O в возбужденное состояние. Ядро $^{16}\text{O}^*$ переходит в основное состояние, излучая γ -квант или электрон-позитронную пару.

Темп счета и энергия α -частиц от естественной радиоактивности определялись для каждого детектора. В объеме Gd-ЖС доминирующими источниками α -частиц были ядра ^{238}U , ^{232}Th и цепочки распада актинидов (^{227}Ac). Из-за схожести химических свойств этих ядер со свойствами гадолиния, они были внесены в сцинтиллятор на следовом уровне в процессе добавки гадолиния. Каждая цепочка актинидов содержит каскад распадов полония, который производит коррелированные во времени пары β - α или α - α взаимодействий. Период полураспада задержанного полония, с излучением α частицы в трех цепочках распада актинидов, составляет 164.3 мкс, 0.3 мкс и 1.781 мс, соответственно. Световой выход в сцинтилляторе, произведенный α -частицей, меньше, чем произведенный электроном с идентичным энерговыделением (это называется “гашением”, или quenching в англоязычной литературе), как обсуждалось в разделе 6.3.4. В итоге, α -частица от распада полония производит задержанный сигнал с $E_{\text{rec}} \approx 1$ МэВ. С учетом малого значения энергии задержанного сигнала, он не способен имитировать взаимодействие $\bar{\nu}_e$. Однако, такие сигналы, коррелированные во времени, были найдены в данных и использованы для измерения темпа счета рождения α -частиц для каждой цепочки распадов актинидов. На рис. 7.14 показаны коррелированные распределения энергий первичного и задержанного сигналов для разных временных интервалов, соответствующих каскадам распадов полония. Временной интервал от 1 до 3 мкс позволяет наблюдать распады ^{212}Bi - ^{212}Po от цепочки распадов ^{232}Th . Интервал от 10 до 400 мкс демонстрирует распады ^{214}Bi - ^{214}Po от цепочки распадов ^{238}U . Наконец, в интервале времен от 1 до 4 мс видны распады ^{219}Rn - ^{215}Po от цепочки распадов ^{227}Ac . Предполагая, что каждая цепочка находилась в равновесии с наблюдаемыми каскадами от полония, были определены средние скорости распадов: 0.009, 0.16 и 0.2 беккерель (Бк) в цепочках ^{238}U , ^{232}Th , и ^{227}Ac в объеме Gd-ЖС за первые два года набора данных. Измеренные темпы счета согласуются для всех восьми детекторов. Уменьшение на 40% темпа счета сигналов от ^{212}Bi - ^{212}Po и на 9% сигналов от ^{219}Rn - ^{215}Po , наблюдающиеся за два года, согласуются с периодами полураспадов ^{228}Th (1.9 лет) и ^{227}Ac (21.8 лет).

^{210}Po , дочернее ядро более долгоживущего ядра ^{222}Rn , излучает α -частицу с определенной энергией 5.3 МэВ. Эти α -частицы видны как пик при $E_{\text{rec}} \simeq 0.5$ МэВ в спектре энергий некоррелированных сигналов в каждом детекторе. Амплитуда этих пиков определяет темп распада ^{210}Po с α -частицей в конечном состоянии, измеренный равным 4 Гц для AD3-AD7, и 8-10 Гц для AD1, AD2 и AD8.

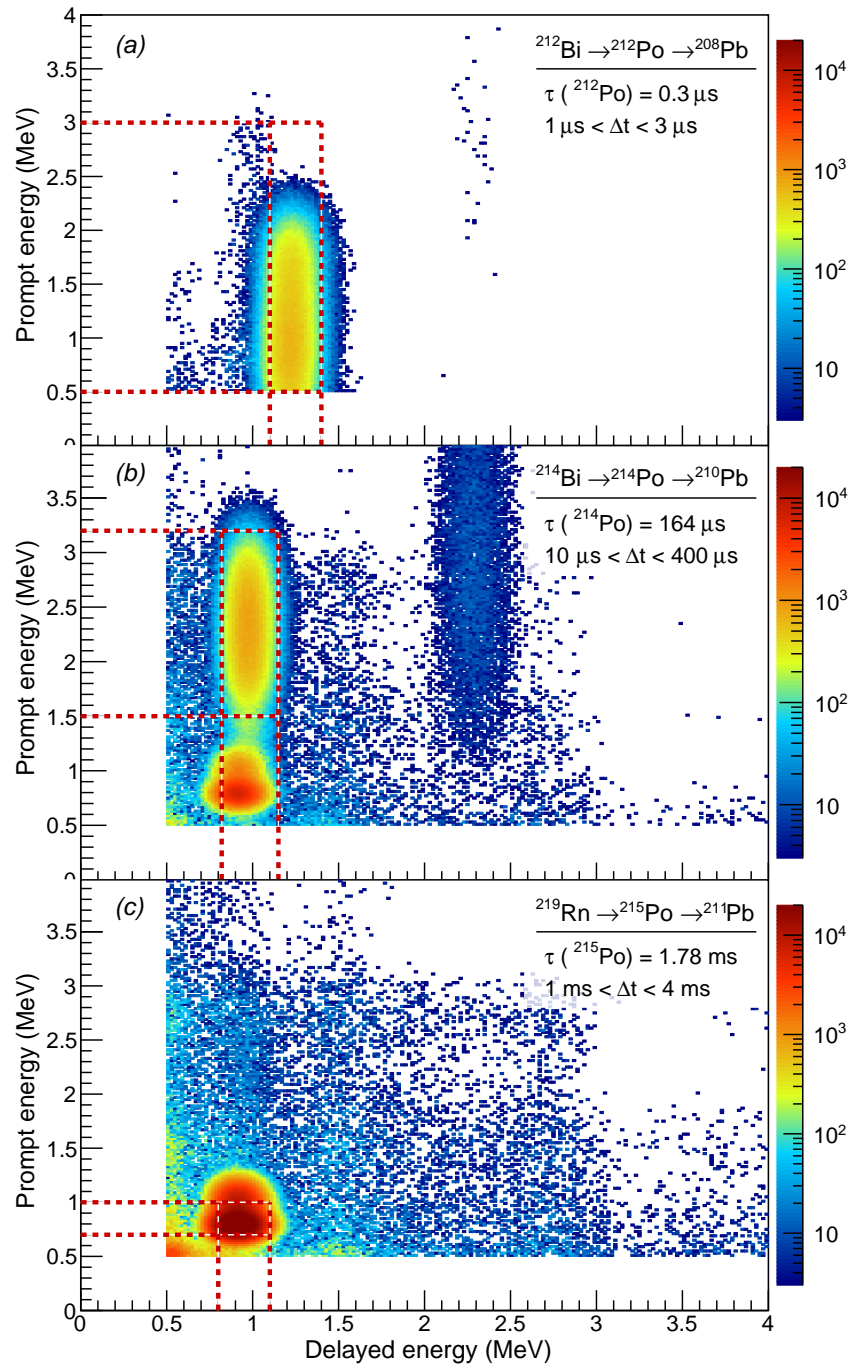


Рисунок 7.14 — Распределения реконструированных энергий первичных относительно задержанных сигналов для трех временных интервалов: (a) от 1 до 3 мкс, (b) от 10 до 400 мкс, (c) 1 до 4 мс, для всех детекторов. Распределения демонстрируют коррелированные во времени пары сигналов от цепочек распадов актинидов. Хотя эти распады не вносят вклад в число фоновых событий при отборе $\bar{\nu}_e$ взаимодействий, полученные оценки α -радиоактивности от актинидов позволяют ограничить вклад от последующих $^{13}\text{C}(\alpha, n)^{16}\text{O}$ взаимодействий.

Распределение реконструированных положений этих сигналов указывает на то, что фон от распадов ^{210}Po концентрируется на стенках внутреннего акрилового контейнера. Это наблюдение согласуется с результатом предыдущих экспериментов, которые наблюдали примесь полония ^{210}Po

на стенках детектора, с переменным количеством примеси в зависимости от истории воздействия на материал ^{222}Rn [221].

Для моделирования $^{13}\text{C}(\alpha,n)^{16}\text{O}$ взаимодействий в детекторе использовался пакет Geant4. Вероятности $^{13}\text{C}(\alpha,n)^{16}\text{O}$ процессов моделировались согласно табличным значениям JENDL [222]. В таб. 8 приведены оценки вероятности $^{13}\text{C}(\alpha,n)^{16}\text{O}$ взаимодействий для начальных α -частиц от различных естественных α источников. В таблице приведены вероятности взаимодействий, когда рождается ядро ^{16}O в основном и возбужденном состояниях. Неопределенности в моделировании вероятности были определены сравнением с альтернативными моделями, основанными на табулированных сечениях EXFOR [223] и моделировании прохождения α -частиц пакетом SRIM [224].

Источник α	$P_{\text{осн}} [10^{-8}]$	$P_{\text{возб}} [10^{-8}]$	$P_{\text{tot}} [10^{-8}]$	$\sigma_{\text{tot}} [\%]$
^{210}Po	5.26	0.49	5.75	7.2%
^{238}U	43.40	29.60	73.00	16.9%
^{232}Th	44.90	49.20	94.10	27.7%
^{227}Ac	47.20	61.80	109.00	25.9%

Таблица 8 — Моделирование вероятности $^{13}\text{C}(\alpha,n)^{16}\text{O}$ взаимодействий в предположении равновесия распадов примесей естественных актинидов в детекторе. Вероятности даны для рождения ядер ^{16}O в основном и возбужденном состояниях. Неопределенность (σ_{tot}) вероятности определялась из сравнения с другими модельными вычислениями.

На рис. 7.15 представлен спектр реконструированной энергии первичных сигналов от $^{13}\text{C}(\alpha,n)^{16}\text{O}$ реакции. Для его оценки также использовалось моделирование. Энергичные нейтроны приводят к широкому пику в распределении рассеянных протонов в области энергий ниже 4 МэВ и небольшому пику около 5 МэВ из-за неупругого рассеяния на ^{12}C . Более энергичные α -частицы увеличивают, с ростом своей энергии, долю возбужденных состояний $^{16}\text{O}^*$, что приводит к широкому пику в области от 5 МэВ до 8 МэВ. Неопределенности в спектре, хотя и значительные, игнорируются из-за пренебрежимо малого вклада в фоновые события во взаимодействиях $\bar{\nu}_e$. Темп счета коррелированного фона от (α,n) реакции оценивается как произведение трех величин: измеренной α активности детектора, вероятности $^{13}\text{C}(\alpha,n)^{16}\text{O}$ реакции, эффективности продуктам (α,n) реакции удовлетворить критериям отбора взаимодействий $\bar{\nu}_e$. Оценки вероятностей последних двух величин были модельными. Вклад этого фона в набор событий с кандидатами во взаимодействия $\bar{\nu}_e$ оказался пренебрежимо малым, на уровне 0.07% для дальних детекторов и 0.01% для ближних. Консервативная оценка $\sim 50\%$ неопределенности скорости счета в этом источнике фона появилась в результате комбинации неопределенностей при отборе каскадов распадов полония, предположений о равновесии в цепочке актинидов и моделировании $^{13}\text{C}(\alpha,n)^{16}\text{O}$ взаимодействий.

Фон от событий с большой множественностью. В поиске пары первичного и задержанного сигналов, удовлетворяющих критериям отбора взаимодействий $\bar{\nu}_e$, время от времени три или более сигналов могут оказаться в соответствующем временном окне. Такие наборы сигналов, имеющие множественность ≥ 3 , в основном возникали от наложения настоящих взаимодействий $\bar{\nu}_e$ на

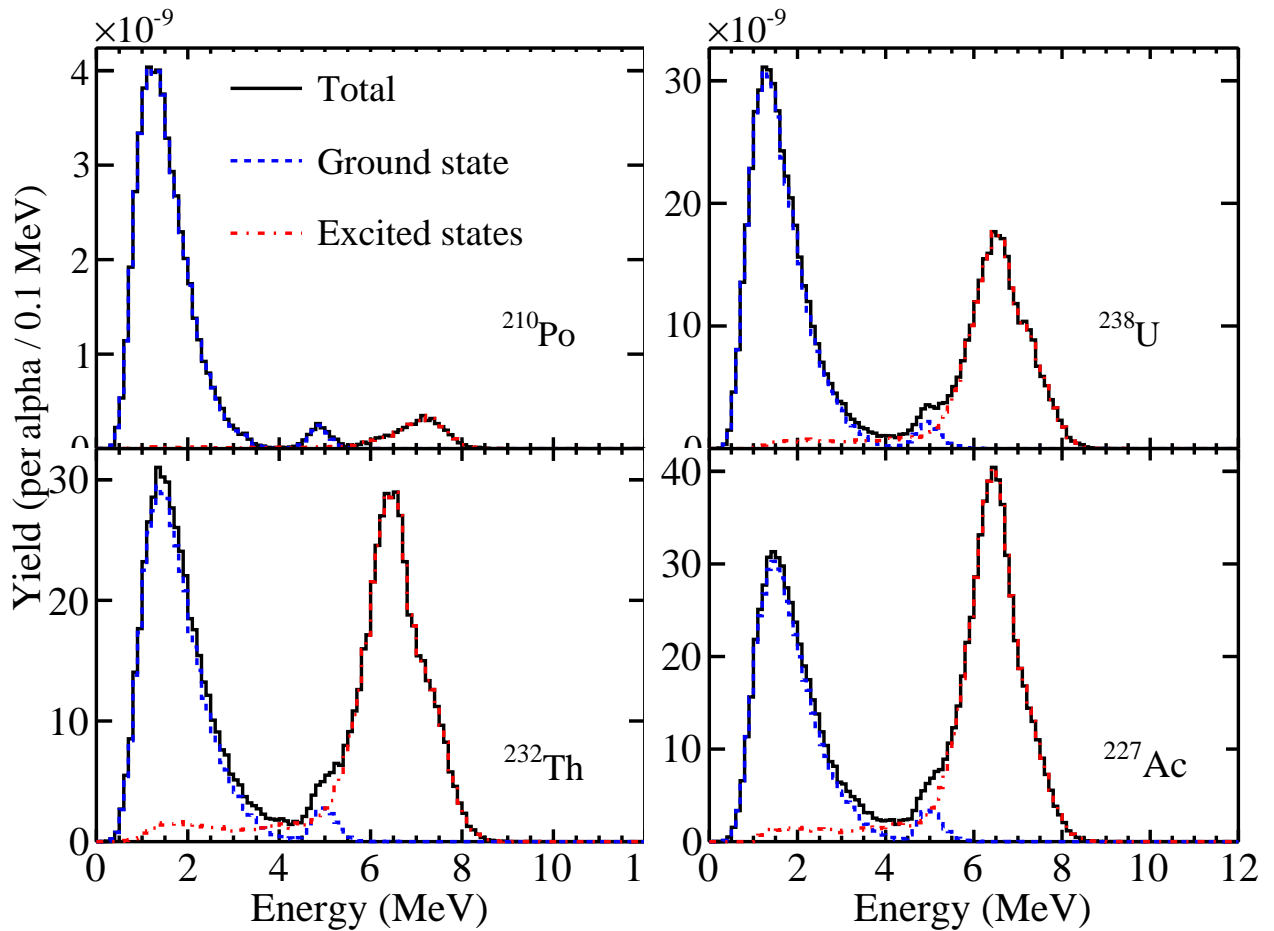


Рисунок 7.15 — Моделирование спектров энергии первичных сигналов от $^{13}\text{C}(\alpha, n)^{16}\text{O}$ реакции для каждого из наиболее важных естественных источников α -частиц в детекторе. Энергичные нейтроны приводят к широкому пику в распределении рассеянных протонов в области энергий ниже 4 МэВ и небольшому пику около 5 МэВ из-за неупругого рассеяния на ^{12}C . Более энергичные α -частицы увеличивают, с ростом своей энергии, долю возбужденных состояний $^{16}\text{O}^*$, что приводит к широкому пику в области от 5 МэВ до 8 МэВ.

другие некоррелированные с ними сигналами от естественной радиоактивности. Классификация каждого сигнала как первичного или вторичного в таких случаях была неоднозначной. Отбрасывание таких наборов сигналов с множественностью ≥ 3 , полностью снимало сомнения по поводу неоднозначности, но вносило незначительную потерю эффективности детектирования антинейтрино. Две разные методики были разработаны для отбрасывания таких неоднозначных сигналов.

В отборе А, кандидат во взаимодействия $\bar{\nu}_e$ отбрасывался, если один или более дополнительных сигналов с реконструированной энергией > 0.7 МэВ возникал в интервале шириной 200 мкс до первичного сигнала, или после задержанного. Условия отбора метода В немного отличались. Каждый задержанный сигнал должен был иметь один и только один сигнал с энергией > 0.7 МэВ в предыдущие 400 мкс. Также требовалось, чтобы не было другого сигнала, который удовлетворял бы критериям на задержанный сигнал $6 \text{ МэВ} < E_{\text{rec}} < 12 \text{ МэВ}$ во временном окне 200 мкс после задержанного сигнала. Этот подход приводит к эффективности, независимой от разницы времен между первичным и задержанным сигналами, а также избегает нежелательной корреляции в оценке эффективностей вето против мюона и на множественность.

Оба метода эффективно разрешают неопределенность сигналов, сохраняя $\sim 97.5\%$ полезных событий. Эффективность оценивается аналогично тому, как мы это делали для случайных совпадений, вычисляя вероятность некоррелированному сигналу случайно произойти близко по времени ко взаимодействию $\bar{\nu}_e$. Для отбора А, эффективность вычисляется согласно

$$\epsilon_m^A = e^{-R_p \Delta t} \epsilon_{\text{mid}} \epsilon_{\text{post}}, \quad (7.11)$$

где R_p – темп счета для первичных событий и $\Delta t = 200$ мкс. Вероятность некоррелированному сигналу случиться во времени между истинными первичным и задержанным сигналами, ϵ_{mid} , зависит от разницы времен между первичным и задержанным сигналами. В среднем,

$$\epsilon_{\text{mid}} = \int_0^{\Delta t} e^{-R_p t} f(t) dt \cong 1 - R_p \bar{t}_c, \quad (7.12)$$

где $f(t)$ – это распределение разницы времен между первичным и задержанным сигналами в интервале 200 мкс, и \bar{t}_c – среднее этого распределения. В первом порядке, вероятность некоррелированному сигналу случиться после задержанного сигнала, ϵ_{post} , есть просто $e^{-R_p \Delta t}$. Существует ненулевая вероятность того, что мюонное вето усечет временное окно после сигнала – кандидата в антинейтринное взаимодействие, уменьшив тем самым вероятность детектирования некоррелированных сигналов после взаимодействия $\bar{\nu}_e$. Поправка на такое временное усечение была учтена в ϵ_{post} . В результате, для временного сегмента t_s^i между периодами действия мюонного вето,

$$\epsilon_{\text{post}}^i = \begin{cases} \left(1 - \frac{\Delta t}{t_s^i}\right) e^{-R_p \Delta t} + \frac{1 - e^{-R_p \Delta t}}{R_p t_s^i}, & \text{для } t_s^i \geq \Delta t, \\ \frac{1 - e^{-R_p \Delta t}}{R_p t_s^i}, & \text{для } t_s^i < \Delta t. \end{cases} \quad (7.13)$$

С учетом корреляции критерия на множественность и мюонного вето, комбинированная эффективность отбора $\bar{\nu}_e$ вычисляется как эффективность критерия на множественность, взвешенная длиной временного интервала t_s^i между мюонными вето,

$$\epsilon_\mu \bar{\epsilon}_m^A = \left(\sum_i \epsilon_m^i t_s^i \right) / t_{\text{DAQ}}, \quad (7.14)$$

где t_{DAQ} – полное время набора данных до применения условия на мюонное вето. Среднее значение эффективности критерия на множественность может быть определено из сравнения $\epsilon_\mu \bar{\epsilon}_m^A$ с ϵ_μ , вычисленной с использованием ур. (7.5). Неопределенность в $f(t)$ приводит к систематической неопределенности равной 0.02% в $\bar{\epsilon}_m^A$, коррелированной между всеми детекторами. Похожесть наблюдаемых в разных детекторах распределений $f(t)$ ограничивает возможные некоррелированные вариации в эффективности на уровне $< 0.01\%$.

Оценка эффективности критерия на множественность для отбора В была тривиальной по построению. Эффективность вычисляется из выражения

$$\epsilon_m^B = e^{-2R_p \Delta t} e^{-R_d \Delta t}. \quad (7.15)$$

Вероятность одновременного действия критерия на множественность и мюонное вето сведена к пренебрежимо малой величине из-за малого темпа счета задержанных сигналов. Неопределенность в ϵ_m^B пренебрежимо мала.

7.3 Отбор антинейтрино. Краткая сводка результатов

7.3.1 Эффективности детектирования

В таб. 9 приведены эффективности детектирования взаимодействий $\bar{\nu}_e$ в Gd-ЖС в каждом детекторе. Полная эффективность детектирования оценивается равной 80.6%. Нейтроны, не захваченные гадолинием, а также те, что были захвачены ядрами гадолиния, но не дали сигнал с $E_{\text{гес}} > 6$ МэВ, вносят наибольший вклад в неэффективность детектирования $\bar{\nu}_e$. Число протонов в мишени и эффективность критерия на множественность немного зависит от детектора, их точно измеренные отличия приведены в таб. 6 и таб. 10.

Критерий отбора	ε	$\delta\varepsilon_{\text{согг}}$	$\delta\varepsilon_{\text{unсогг}}$
Вспышки ФЭУ	99.98%	0.01%	0.01%
Энергия задержанного сигнала	92.7%	0.97%	0.08%
Энергия первичного сигнала	99.8%	0.10%	0.01%
Множественность		0.02%	0.01%
Время захвата нейтрона	98.7%	0.12%	0.01%
Оценка	ε	$\delta\varepsilon_{\text{согг}}$	$\delta\varepsilon_{\text{unсогг}}$
Протоны мишени	-	0.92%	0.03%
Доля захватов на гадолинии	84.2%	0.95%	0.10%
Нейтроны, рожденные вне Gd-ЖС, но захваченные в Gd-ЖС	104.9%	1.00%	0.02%
Живое время набора данных	-	0.002%	0.01%
Итого	80.6%	1.93%	0.13%

Таблица 9 — Краткая сводка оценок эффективностей (ε) и их относительных коррелированных ($\delta\varepsilon_{\text{согг}}$) и некоррелированных ($\delta\varepsilon_{\text{unсогг}}$) неопределенностей между детекторами.

Неопределенности в эффективностях детектирования представлены в виде коррелированных компонент, общих для всех детекторов, и некоррелированных, отражающих возможные независимые вариации эффективностей детекторов. Полная коррелированная относительная неопределенность оценивается равной 1.93%. Оценка эффективности нейтронов, рожденных вне Gd-ЖС, но диффундировавших в область мишени и там захваченных, имеет наибольшую коррелированную неопределенность. Абсолютные неопределенности в доле нейтронов в Gd-ЖС объеме, которые были захвачены гадолинием, а также в доле n-Gd захватов, давших сигнал $E_{\text{гес}} < 6$ МэВ, также были значительны. Подробное рассмотрение коррелированных неопределенностей дано в работе [225].

Абсолютные эффективности и их неопределенности сокращаются при сравнении отношения сигналов в дальних и в ближних детекторах, как видно из ур. (6.4). Таким образом, некоррелированные неопределенности имеют большее влияние на измерение нейтринных осцилляций.

Некоррелированные вариации в эффективности детекторов оцениваются на уровне 0.13%. Наиболее значительная вариация в некоррелированной эффективности возникает за счет возможной разницы в доле нейтронов, захваченных гадолинием, ограниченной сравнением времен захвата нейтронов разными детекторами.

Эксперимент Daya Bay был спроектирован таким образом, чтобы минимизировать возможные вариации в эффективностях детекторов, однако в действительности, детекторы продемонстрировали даже лучшую функциональность. С учетом этого достижения, было важным иметь независимый метод проверки оценки столь малой неопределенности 0.13% в эффективностях детекторах. Сравнение наблюдаемых темпов счета $\bar{\nu}_e$ взаимодействий в разных детекторах, расположенных рядом друг с другом в том же экспериментальном холле, дало прямой метод проверки оценки вариации эффективности. Результаты сравнения обсуждаются в следующем разделе.

7.3.2 Отобранный набор событий со взаимодействиями $\bar{\nu}_e$

В таб. 10 приведены результаты отбора взаимодействий $\bar{\nu}_e$. Критерии отбора собраны в таб. 7. Более 2.5×10^6 $\bar{\nu}_e$ взаимодействий было идентифицировано во всех восьми детекторах. Фоновые события составляют 1.8% в ЕН1, 1.5% в ЕН2 и 2.0% в ЕН3. В основном фоновые события состоят из случайных совпадений. Неопределенности в оценке фоновых событий составляют 0.2%, 0.1% и 0.1% в соответствующих трех экспериментальных холлах, с доминирующим вкладом от β -н распадов ${}^9\text{Li}$ и ${}^8\text{He}$. Для детектора с номером i , темп счета от взаимодействий $\bar{\nu}_e$ можно оценить согласно

$$R_{\bar{\nu}}^i = \frac{N_{\text{cand}}^i}{t_{\text{DAQ}}^i \epsilon_{\mu}^i \epsilon_{\text{m}}^i} - R_{\text{bkg}}^i, \quad (7.16)$$

где N_{cand} – число отобранных кандидатов во взаимодействия $\bar{\nu}_e$, t_{live} – живое время набора данных, ϵ_{μ} – эффективность мюонного вето, ϵ_{m} – эффективность критериев отбора на множественность и R_{bkg} – темп счета фоновых событий. Приведенные скорости счета не были поправлены на абсолютную эффективность отбора, приведенную в таб. 9, а также не учитывали небольшие отличия в числе протонов ΔN_p в области мишени детекторов.

На рис. 7.16 сравниваются темпы счета взаимодействий $\bar{\nu}_e$, отобранных методами А и В. Согласованность обоих методов служат независимой проверкой процесса отбора взаимодействий $\bar{\nu}_e$.

10% событий отличались в двух отборах. В ближних детекторах, разница в мюонном вето была главной причиной отличий в отобранных событиях. В дальних детекторах различия объяснялись разными критериями на множественность.

Скорости счета, наблюдаемые детекторами, расположенными рядом друг с другом в том же экспериментальном холле, использовались также для независимой проверки возможных отклонений в эффективности детектирования $\bar{\nu}_e$ разными детекторами. На рис. 7.17 приведено сравнение наблюдаемых темпов счета детекторами из одного экспериментального холла. Небольшие разницы в расстояниях до реактора и в числе протонов вносят вклад $\lesssim 1\%$ в разницу темпов счета.

	EH1		EH2		EH3			
	AD1	AD2	AD3	AD8	AD4	AD5	AD6	AD7
ΔN_p [%]	0.00 ± 0.03	0.13 ± 0.03	-0.25 ± 0.03	0.02 ± 0.03	-0.12 ± 0.03	0.24 ± 0.03	-0.25 ± 0.03	-0.05 ± 0.03
Отбор А								
$\bar{\nu}_e$ кандидаты	597618	606351	567196	466013	80479	80742	80067	66862
DAQ время набора [день]	1117.178	1117.178	1114.337	924.933	1106.915	1106.915	1106.915	917.417
ϵ_μ	0.8255	0.8221	0.8573	0.8571	0.9824	0.9823	0.9821	0.9826
ϵ_m	0.9744	0.9747	0.9757	0.9757	0.9759	0.9758	0.9756	0.9758
Случайные совпадения [день^{-1}]	8.46 ± 0.09	8.46 ± 0.09	6.29 ± 0.06	6.18 ± 0.06	1.27 ± 0.01	1.19 ± 0.01	1.20 ± 0.01	0.98 ± 0.01
Быстрые нейтроны [$\text{AD}^{-1} \text{ день}^{-1}$]	0.79 ± 0.10		0.57 ± 0.07			0.05 ± 0.01		
${}^9\text{Li}, {}^8\text{He}$ [$\text{AD}^{-1} \text{ день}^{-1}$]	2.46 ± 1.06		1.72 ± 0.77			0.15 ± 0.06		
${}^{241}\text{Am}-{}^{13}\text{C}$, 6-AD [день^{-1}]	0.27 ± 0.12	0.25 ± 0.11	0.28 ± 0.13		0.22 ± 0.10	0.21 ± 0.10	0.21 ± 0.10	
${}^{241}\text{Am}-{}^{13}\text{C}$, 8-AD [день^{-1}]	0.15 ± 0.07	0.16 ± 0.07	0.13 ± 0.06	0.15 ± 0.07	0.04 ± 0.02	0.03 ± 0.02	0.03 ± 0.02	0.05 ± 0.02
${}^{13}\text{C}(\alpha, n){}^{16}\text{O}$ [день^{-1}]	0.08 ± 0.04	0.07 ± 0.04	0.05 ± 0.03	0.07 ± 0.04	0.05 ± 0.03	0.05 ± 0.03	0.05 ± 0.03	0.05 ± 0.03
Темп счета $\bar{\nu}_e$, $R_{\bar{\nu}}$ [день^{-1}]	653.03 ± 1.37	665.42 ± 1.38	599.71 ± 1.12	593.82 ± 1.18	74.25 ± 0.28	74.60 ± 0.28	73.98 ± 0.28	74.73 ± 0.30
Отбор В								
$\bar{\nu}_e$ кандидаты	594737	603092	562681	462129	80508	80769	80112	67018
DAQ время набора [день]	1117.162	1117.162	1114.334	924.930	1106.898	1106.898	1106.898	917.401
ϵ_μ	0.8210	0.8178	0.8502	0.8496	0.9824	0.9821	0.9820	0.9825
ϵ_m	0.9768	0.9773	0.9782	0.9781	0.9783	0.9783	0.9781	0.9784
Случайные совпадения [день^{-1}]	7.99 ± 0.01	7.88 ± 0.01	5.94 ± 0.01	5.81 ± 0.01	1.20 ± 0.00	1.13 ± 0.00	1.14 ± 0.00	0.92 ± 0.00
Быстрые нейтроны [$\text{AD}^{-1} \text{ день}^{-1}$]	0.84 ± 0.08		0.64 ± 0.06			0.05 ± 0.01		
${}^9\text{Li}, {}^8\text{He}$ [$\text{AD}^{-1} \text{ день}^{-1}$]	2.71 ± 0.90		1.91 ± 0.73			0.22 ± 0.07		
${}^{241}\text{Am}-{}^{13}\text{C}$, 6-AD [день^{-1}]	0.26 ± 0.12	0.25 ± 0.11	0.28 ± 0.12		0.22 ± 0.10	0.21 ± 0.09	0.21 ± 0.09	
${}^{241}\text{Am}-{}^{13}\text{C}$, 8-AD [день^{-1}]	0.15 ± 0.07	0.15 ± 0.07	0.13 ± 0.06	0.15 ± 0.07	0.04 ± 0.02	0.03 ± 0.02	0.04 ± 0.02	0.05 ± 0.02
${}^{13}\text{C}(\alpha, n){}^{16}\text{O}$ [день^{-1}]	0.08 ± 0.04	0.07 ± 0.04	0.05 ± 0.03	0.07 ± 0.04	0.05 ± 0.03	0.05 ± 0.03	0.05 ± 0.03	0.05 ± 0.03
Темп счета $\bar{\nu}_e$, $R_{\bar{\nu}}$ [день^{-1}]	651.99 ± 1.25	663.74 ± 1.26	598.47 ± 1.09	592.67 ± 1.15	74.08 ± 0.28	74.43 ± 0.28	73.83 ± 0.28	74.70 ± 0.30

Таблица 10 — Результаты отбора взаимодействий $\bar{\nu}_e$. Результаты, полученные методами А и В приведены для сравнения (Критерии отбора даны в таб. 7). Приводятся числа отобранных кандидатов во взаимодействия $\bar{\nu}_e$, эффективности критериев отбора, оценки темпов счета фоновых событий для каждого антинейтринного детектора. Приводятся также темпы счета $\bar{\nu}_e$ взаимодействий после вычета фоновых событий для каждого детектора. Все темпы счета поправлены на потерю живого времени набора данных из-за вето против мюонов и критериев на множественность, представленные соответствующими эффективностями ϵ_μ и ϵ_m . Наконец, приведена также небольшая разница в числе протонов ΔN_p , оцененная для каждой мишени.

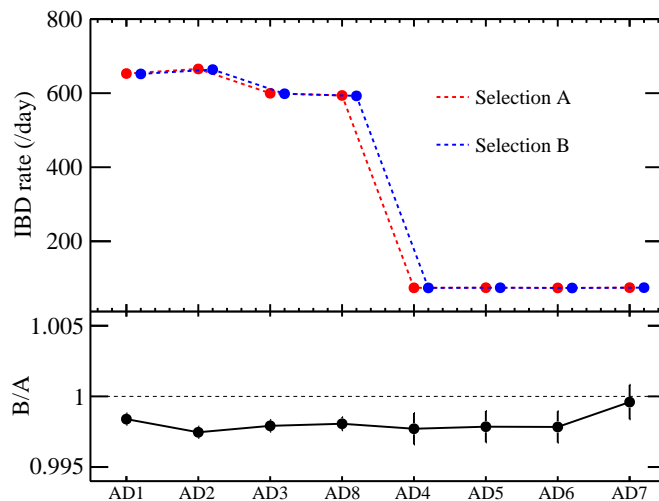


Рисунок 7.16 — (Верхний рисунок) Темпы счета взаимодействий $\bar{\nu}_e$, отобранных методами А и В. (Нижний рисунок) Темпы счета, полученные методом В оказались на $\sim 0.2\%$ меньше результатов метода А, демонстрируя разницу в абсолютной эффективности методов в соответствии с ожиданиями.

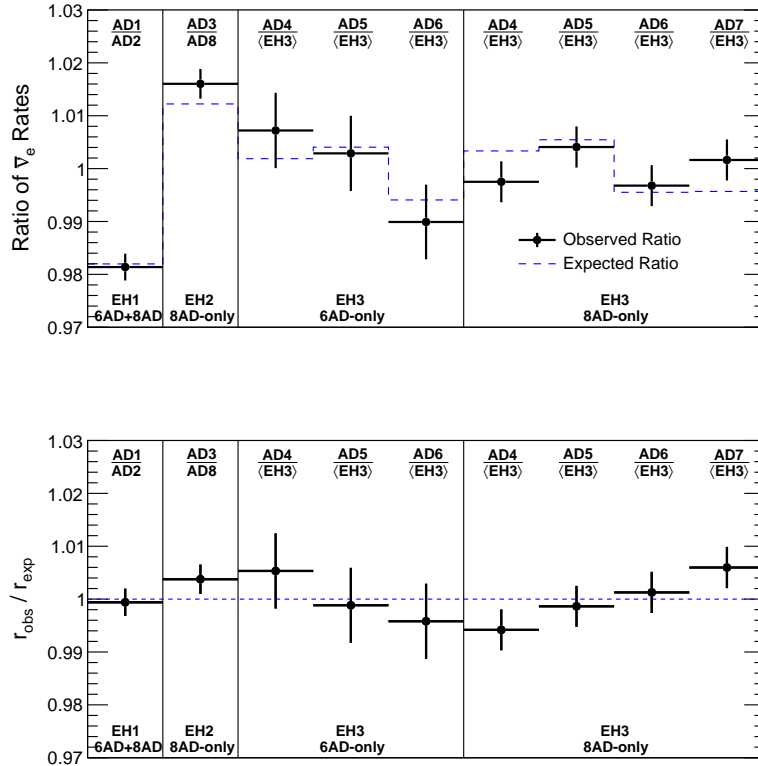


Рисунок 7.17 — (Верхний рисунок) Отношения измеренных темпов счета парой детекторов, расположенных в одном экспериментальном холле, r_{obs} (черные точки). Отношение темпов счета AD1/AD2 показано для всего периода набора данных. После инсталляции AD8 в EH2, приведено отношение AD3/AD8. Для EH3 отношение представлено для двух периодов набора данных: до и после инсталляции AD7. Небольшие отличия в расстояниях до реактора и числе протонов в мишени предсказывают небольшие отличия этих отношений (синяя пунктирная линия). (Нижний рисунок) То же, но выраженное в виде двойного отношения $r_{\text{obs}}/r_{\text{exp}}$.

Сравнение детекторов в EH2 и EH3 показано отдельно для периодов наборов данных с шестью (6-AD) и восемью (8-AD) детекторами. Согласованность наблюдаемых темпов счета с ожиданиями добавляет независимое подтверждение в правильности оценки 0.13% в неопределенности некоррелированной эффективности детектора. Возможные вариации эффективностей детекторов изучались также сравнением времени захвата нейтронов, распределениями энергий первичного и задержанного сигналов для отобранных кандидатов во взаимодействия $\bar{\nu}_e$ в рядом расположенных детекторах. На рис. 7.1, 7.18 и 7.19 приведены распределения этих переменных в каждом детекторе. Для сравнения спектров, на рисунках приведены отношения AD2/AD1 и AD8/AD3 в ближних детекторах. Для дальнего холла, распределения в каждом детекторе поделены на усредненные по сайту. Никаких заметных отклонений в распределениях обнаружено не было.

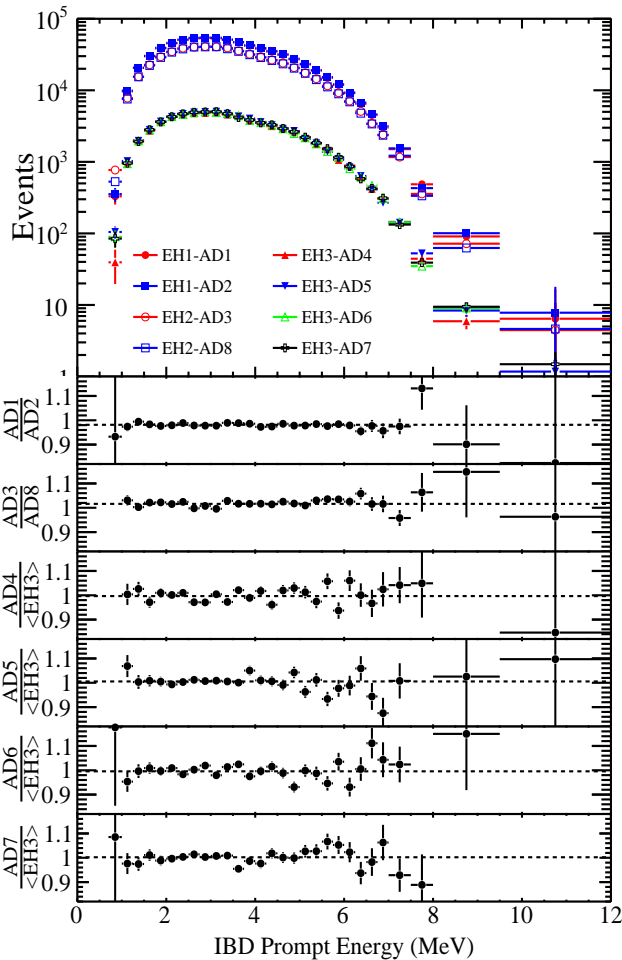


Рисунок 7.18 — (Верхний рисунок) Распределения реконструированной энергии первичного сигнала для отобранных кандидатов во взаимодействия $\bar{\nu}_e$ в каждом из восьми детекторов. (Нижний рисунок) Отношения распределений для детекторов из одного экспериментального холла хорошо согласуются друг с другом.

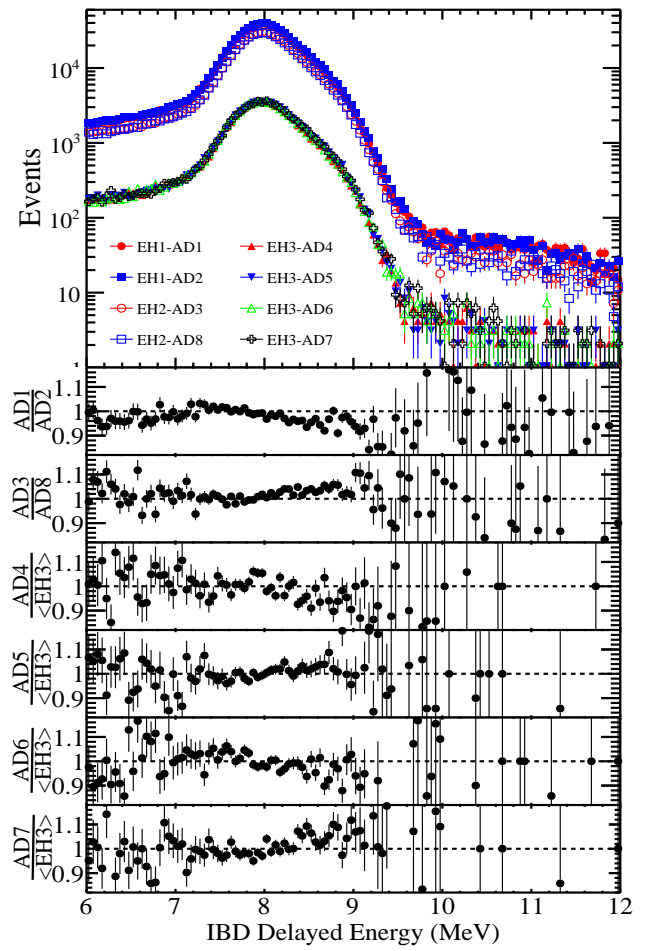


Рисунок 7.19 — (Верхний рисунок) Распределения реконструированной энергии задержанного сигнала для отобранных кандидатов во взаимодействия $\bar{\nu}_e$ в каждом из восьми детекторов. (Нижний рисунок) Отношения распределений для детекторов из одного экспериментального холла хорошо согласуются друг с другом. Небольшие наклоны в распределениях согласуются с отличиями на уровне $\lesssim 0.2\%$ в абсолютной калибровке детекторов.

7.4 Заключение к главе

Обсуждение начинается с описания критериев отбора событий взаимодействия антинейтрино, имеющего уникальную временную структуру, состоящую из первичного сигнала от позитрона и задержанного сигнала от нейтрона. Критерии отбора были выбраны так, чтобы минимизировать относительные неопределенности при сравнении сигналов, наблюдаемых восемью детекторами. Резюмируя, более 2.5×10^6 $\bar{\nu}_e$ кандидатов было отобрано за рассматриваемый период набора данных. Эффективности детекторов отличались друг от друга не более, чем на 0.13%.

Затем мы обсуждаем критерии отбрасывания фоновых событий. Подробно обсуждаются все источники фона, учтенные в настоящем анализе.

- Инструментальные, связанные со спорадическими вспышками ФЭУ.
- Случайные совпадения, имитирующие первичный и вторичный сигналы.
- Фон от быстрых нейтронов, порождаемых взаимодействиями космогенных мюонов с веществом детектора и окружающего его материала.
- Фон от бета распадов ${}^9\text{Li}$, ${}^8\text{He}$, рождающихся во взаимодействиях космогенных мюонов.
- Фон от калибровочного источника ${}^{241}\text{Am}$ - ${}^{13}\text{C}$.
- ${}^{13}\text{C}(\alpha, n){}^{16}\text{O}$ взаимодействия, в которых α -частицы, излучаемые естественной радиоактивностью в детекторе, могут выбивать нейтроны из стабильных ядер.
- Сигналы с большой множественностью. Наложение коррелированных сигналов от взаимодействия антинейтрино с некоррелированными сигналами от радиоактивности приводит к трем или более сигналам во временном окне, удовлетворяющим критериям отбора событий обратного бета распада.

Все эти источники фона детально изучены, критерии их идентификации разработаны. Вклад фоновых событий не превышал нескольких процентов, с неопределенностью $\lesssim 0.2\%$.

Эксперимент Daya Bay был спроектирован таким образом, чтобы минимизировать возможные вариации в эффективностях детекторов, однако в действительности, детекторы продемонстрировали даже лучшую функциональность. С учетом этого достижения, было важным иметь независимый метод проверки оценки столь малой неопределенности 0.13% в эффективностях детекторов. Поэтому, далее, обсуждаются результаты дополнительных независимых проверок оценки эффективности, полученной с рекордно малой неопределенностью, равной 0.13% . В завершении главы приведены результаты отбора числа и темпа счета антинейтринных событий, оценок вклада оставшегося фона.

Глава 8. Осцилляционный анализ

8.1 Электронные антинейтрино от ядерного реактора

8.1.1 Введение

Комплекс атомных станций Daya Bay состоит из трех пар ядерных реакторов: Daya Bay, Ling Ao, Ling Ao II. Каждая станция использует водо-водяной ядерный реактор с термальной мощностью 2.9 ГВт. Расстояния между реакторами порядка 88 м. Расстояния измерялись разными методами, включая GPS, тахеометр, лазерный трекер, приборы для измерения уровня [205]. Неопределенность в определении расстояния была оценена на уровне 18 мм [205].

В реакторах электронные антинейтрино образуются в бета распадах при развалах ядер. Цепочки с четырьмя изотопами рождают 99.7% от всех реакторных антинейтрино [226; 227]. Процессы развала ядер поддерживаются нейтронами, рожденными развалами четырех главных изотопов ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu . В среднем на одно деление в таком реакторе выделяется около 200 МэВ термальной энергии и шесть электронных антинейтрино. Таким образом, ядерный реактор тепловой мощностью 1 ГВт излучает около $2 \cdot 10^{20}$ нейтрино в секунду.

8.1.2 Мощность реактора и эволюция топлива

Число развалов каждого из четырех главных изотопов в единицу времени, $F_i(t)$, как функция времени, а также композиция топлива, могут быть получены в результате моделирования ядерных реакций в реакторе. Удобно использовать вместо $F_i(t)$ соответствующую долю, $f_i(t) = \frac{F_i(t)}{\sum_i F_i(t)}$. Неопределенность вычисления этой величины, с использованием программ моделирования, порядка процента. Точность можно улучшить до долей процента, если использовать измеренную термальную мощность.

Три различные системы используются для измерения мощности реактора в Daya Bay, включая измерения мощности в первичном и вторичном контурах, а также измерение потока нейтронов вне зоны реакторного ядра. Наиболее аккуратным методом является измерение термальной мощности во вторичном контуре. Однако, эта система работает в автономном еженедельном или ежемесячном режиме, что не удовлетворяет требованиям эксперимента Daya Bay. Измерение термальной мощности в первичном контуре производится одновременно с работой реактора. Это измерение еженедельно калибруется на измерение во вторичном контуре. Службы атомной станции Daya Bay обеспечивают разницу этих двух измерений меньше 0.1% от полной мощности. Эти данные передаются сотрудниками атомной станции в коллаборацию Daya Bay в соответствии с

достигнутым соглашением. Термальная мощность мониторируется также при помощи измерения потока нейтронов вне ядра атомного реактора. Это мониторование ведется параллельно с работой реактора для обеспечения безопасности и контроля работы реактора. Это измерение калибруется на измерения в первичном контуре ежедневно. Измерение потоков нейтронов менее аккуратно. Daya Bay гарантирует разницу этих двух измерений меньше 1.5% от полной мощности.

Типичное ядро реактора в Daya Bay состоит из 157 топливных элементов, каждый из которых содержит 264 сборки диоксида урана с обогащением 4 %. Шесть реакторов останавливаются попеременно для дозаправки и технического обслуживания. Обычно, от 1/4 до 1/3 частей топливныхборок заменяются каждые 12-18 месяцев во время дозаправки, занимающей 1-2 месяца.

Для описания временной эволюции топлива, выгорание топливного элемента определяется согласно

$$\text{Burn-up}(t) = \frac{W \cdot D}{M_0}, \quad (8.1)$$

где W – средняя мощность, выделяемая топливным элементом, D – число дней, M_0 – начальная масса урана ^{235}U .

Поскольку обычно топливный элемент находится в ядре реактора в течение 3-4 циклов дозаправки, и топливные элементы имеют разную степень выгорания, то более удобной переменной оказывается выгорание за цикл реактора, служащей для описания временной эволюции ядра реактора в течение цикла дозаправки. Эта переменная может быть вычислена с использованием термальной мощности и массы урана во всех топливных элементах.

АЭС моделирует эволюцию топлива в каждом цикле дозаправки, чтобы определить оптимальное местоположение топливных элементов на разных стадиях выгорания топлива. Доли развалов $f_i(t)$ и состав топлива могут быть извлечены из результатов этого моделирования. На рис. 8.1 приведен пример эволюции $f_i(t)$ как функции выгорания за цикл реактора, вычисленной коммерческим программным продуктом SCIENCE, разработанным CEA, France. Ядром этого продукта является компонента APOLLO2 [228]. Неопределенности моделирования $f_i(t)$ оценивались сравнением моделированного состава топлива с результатами изотоп-анализа отработанного топлива, полученными на разных стадиях выгорания. В итоге, относительная неопределенность оценивается равной $\sim 5\%$. Эти результаты были перепроверены моделированием, основанным на программном продукте со свободным доступом DRAGON [229], что позволило нам также оценить корреляции неопределенностей.

8.1.3 Вычисление спектра реакторных антинейтрино

Электронные антинейтрино рождаются в бета распадах продуктов развалов четырех главных изотопов. Каждый изотоп имеет свой уникальный энергетический спектр. В литературе встречаются два подхода к вычислению спектров реакторных антинейтрино.

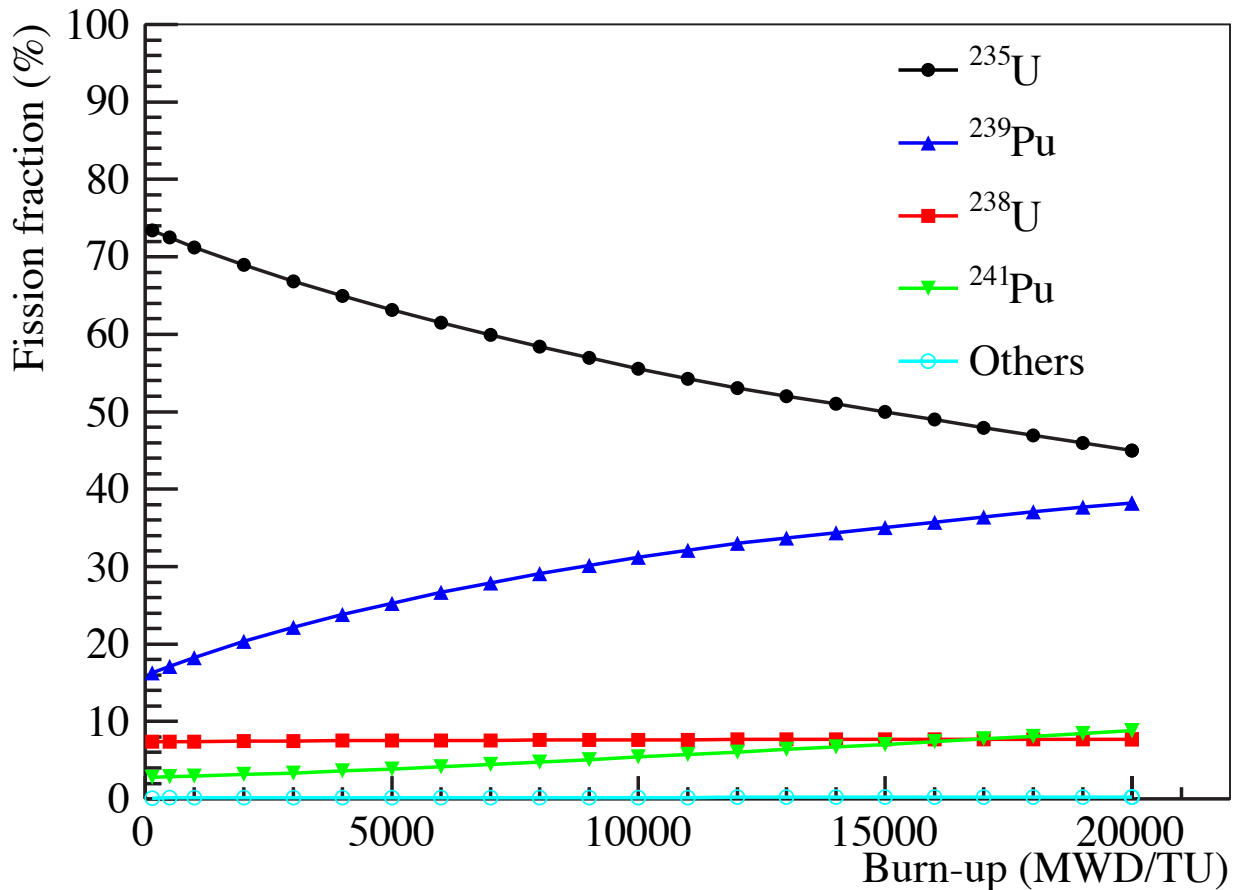


Рисунок 8.1 — Доли развалов ядер $f_i(t)$ четырех изотопов ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu как функции $\text{Burn-up}(t)$ в течении полного цикла работы реактора.

Первый метод основан на вычислениях из первых принципов (ab-initio), которые заключаются в учете всех возможных реакций и соответствующих распадов. Такое вычисление требует учета тысяч каналов распада для каждого изотопа, экспериментальная информация о которых аккумулируется в соответствующих базах данных [230—234]. Примеры таких расчетов можно найти в работах [235—238]. Точность такого вычисления довольно трудно оценить объективно из-за большого числа систематических неопределенностей, связанных с отсутствием некоторых каналов распадов в базах данных, наличием так называемых запрещенных каналов распадов и других эффектов. В работе [239] утверждается о том, что неопределенность в способе учёта запрещённых ядерных переходов вносит, по крайней мере, 5% в неопределенность антинейтринного спектра. Современная точность метода, основанного на вычислениях из первых принципов, по-видимому, не лучше 10-20%.

Второй метод основан на использовании измеренных бета-спектров от цепочек распадов изотопов ^{235}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu в Институте Лауэ-Ланжевена (ILL¹) в Гренобле (Франция) [240—242]. В этих работах образцы с напылением, содержащим ^{235}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu облучались потоками медленных нейтронов в течение 12-и часов, 1.5 и 1.8 суток, соответственно. Получаемый от распадов спектр измерялся при помощи бета-спектрометра BILL вплоть до энергий 8-9 МэВ. Поскольку

¹Institut Laue-Langevin.

изотоп ^{238}U распадается только при облучении быстрыми нейтронами, его бета-спектр в данных экспериментах измерен не был.

Используя измеренные спектры электронов и их соответствующие максимально возможные энергии, можно оценить спектры антинейтрино. Такая процедура, известная как *конверсия*, также требует знания всех возможных каналов распада. Эта трудность обходится подгонкой набора гипотетических каналов распада, как это сделано в работах ILL [240—242].

На сегодняшний день, спектры изотопов ^{235}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu , полученные методом конверсии, основываются на измерениях в ILL. К ним относятся как оригинальные публикации [240—242], так и более новые работы [226], и частично [236]. Также методом конверсии был получен бета-спектр ^{238}U в [243].

Еще один метод, основанный на комбинации первого и второго, был применен в работах [226; 236]. В них, на основе данных о каналах распада, предсказывается бета- и нейтринный спектр. Полученный бета-спектр сравнивается с измерением ILL, а обнаруженный недостаток параметризуется при помощи набора виртуальных каналов распада.

На рис. 8.2 приведены в качестве примера спектры антинейтрино от четырех главных изотопов ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu , вычисленные в работах [226; 236].

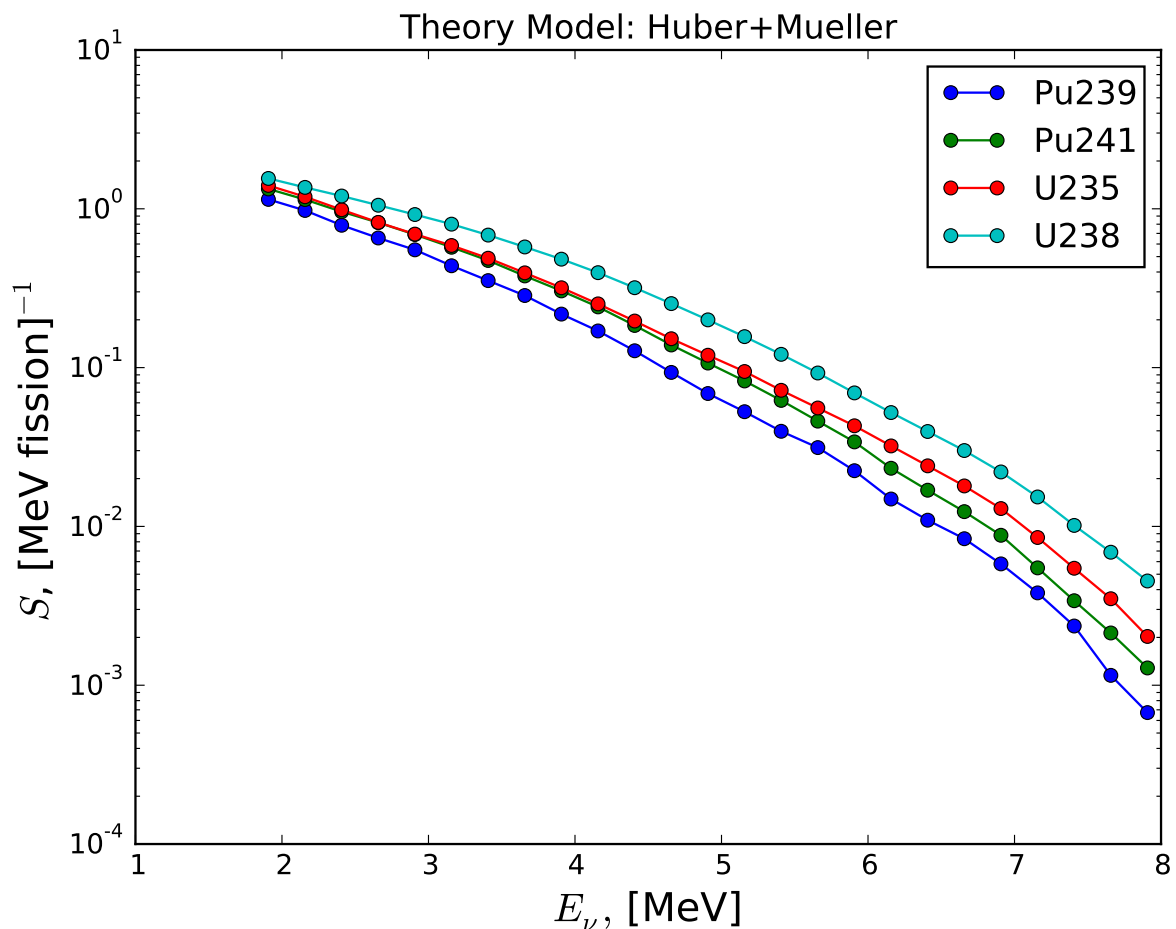


Рисунок 8.2 — Спектры антинейтрино от четырех главных изотопов ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu .

8.1.4 Неравновесная поправка к конверсионным спектрам

Спектры антинейтрино, полученные методом конверсии основаны на данных о бета-спектре распадов изотопов ^{235}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu , измеренных за непродолжительное время: от 12 часов до двух суток [240—242]. Таким образом, полученные бета-спектры не содержат вклада от распадов с много бóльшим периодом полураспада. В условиях реактора топливные стержни могут находиться до нескольких лет. Поэтому, изотопы с бóльшим временем полураспада дают свой, зависящий от истории работы реактора, вклад в спектр антинейтрино. Поправка к спектрам антинейтрино, полученным методом конверсии, была исследована в работах [227; 236]. Поправка к спектрам [236], рассчитанная для реактора, работающего 450 дней, представлена в таблице 11.

Изотоп	E_ν , МэВ				
	3.0	2.5	3.0	3.5	4.0
^{235}U , %	5.7	4.4	1.5	0.7	0.1
^{239}Pu , %	2.1	1.7	0.5	0.1	0.1
^{241}Pu , %	1.9	1.5	0.5	0.1	0.1

Таблица 11 — Неравновесная поправка к спектрам антинейтрино Mueller, полученная методом конверсии на основе [240—242] для ВВЭР, работающего в течение 450 дней [236].

8.1.5 Отработанное ядерное топливо

В конце цикла работы реактора, длительностью как правило 1 год, примерно треть топливных стержней извлекается и перемещается в бассейн, находящийся недалеко от реактора, где хранится длительное время (~ 5 лет) [244]. В цепочках распадов некоторых изотопов, входящих в состав отработавшего ядерного топлива (ОЯТ), также могут рождаться антинейтрино с энергией выше порога обратного бета-распада. В долгосрочной перспективе основной вклад в спектр антинейтрино от ОЯТ вносят распады изотопов ^{106}Rh , ^{144}Pr , ^{90}Y . Несмотря на то, что они обладают временами полураспада от нескольких минут до нескольких дней, рождаются они в распадах долгоживущих изотопов ^{106}Ru , ^{144}Ce , ^{90}Sr . Времена жизни и доступные энергии данных изотопов приведены в таблице 12 [244; 245].

Спектр антинейтрино от ОЯТ предсказывается методом суммирования и как правило представляется в виде отношения к спектру антинейтрино от делящихся изотопов. В эксперименте Daya Bay усреднённый вклад антинейтрино от ОЯТ в поток антинейтрино от активного реактора оценивается в 0.3 % [246] и имеет энергию не более 3.5 МэВ.

Изотоп	$T_{1/2}$	Дочерний изотоп	$T_{1/2}$	Q , МэВ
^{106}Ru	373.6 д	^{106}Rh	29.8 с	3.541
^{144}Ce	284.9 д	^{144}Pr	17.28 м	2.997
^{90}Sr	28.78 г	^{90}Y	64.1 ч	2.282

Таблица 12 — Характеристики цепочек деления изотопов ОЯТ с большим временем полураспада, дающих вклад в поток антинейтрино с энергиями выше порога ОБР [245].

На рисунке 8.3 представлен средний спектр антинейтрино от ОЯТ из [244] для реактора, работающего с тепловой мощностью 2.9 ГВт, интегрально нормированный на 0.3 % [246] от потока антинейтрино от делящихся изотопов. Для вычислений использован средний изотопный состав реактора 0.563 : 0.079 : 0.301 : 0.057 для цепочек деления ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu , соответственно [247]. Для антинейтрино от делящихся изотопов использовались спектры Huber+Mueller.

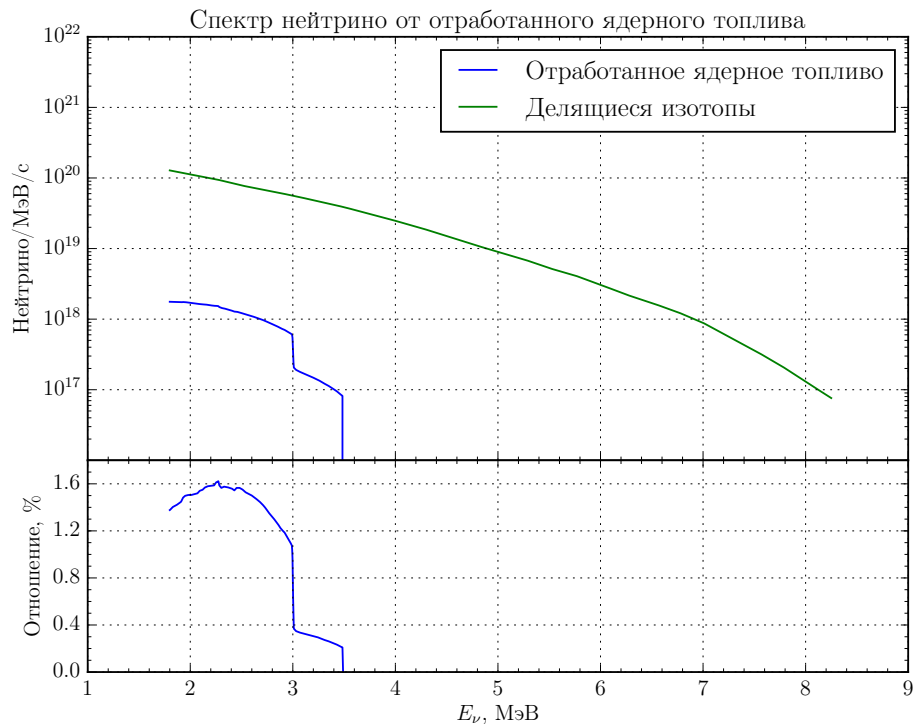


Рисунок 8.3 — Усреднённый спектр электронных антинейтрино от ОЯТ [244] для реактора, работающего с тепловой мощностью 2.9 ГВт и средним изотопным составом [247].

Кроме указанных изотопов ^{106}Rh , ^{144}Pr , ^{90}Y из цепочек распада с большим периодом полураспада в спектр антинейтрино также дают вклад ряд изотопов с периодом полураспада от нескольких часов до нескольких недель [245; 246]. Спектр антинейтрино от данных изотопов сосредоточен в области низких энергий и даёт вклад преимущественно в первые недели после замены топливных стержней реактора.

8.1.6 Реакторные аномалии

В новых вычислениях реакторных спектров [99; 226; 236] предсказывается увеличение теоретических потоков на 3–3.5% по сравнению с предыдущими оценками. Предыдущие оценки предсказывали поток бóльший на 2.4% по сравнению с результатами измерений реакторными экспериментами на короткой базе (меньше 100 м от реактора) [248—258]. Неопределенность новых вычислений декларируется на уровне 2-2.7%. Таким образом, измеренные значения интегральных потоков антинейтрино предыдущими экспериментами на короткой базе, оказались меньше новых теоретических предсказаний примерно на 6%, что получило название “реакторная аномалия” [99]. Новые спектры оказались интегрально больше старых на 3.4%, 3.6%, 9.7%, 4.2% для ^{235}U , ^{239}Pu , ^{238}U и ^{241}Pu соответственно.

После вступления в строй реакторных экспериментов Daya Bay, Double CHOOZ и RENO, кроме интегрального дефицита измеренных спектров по сравнению с ожиданиями [99; 226; 236], была обнаружена еще и особенность в форме спектра. Все эксперименты наблюдают значительное превышение в потоке электронных антинейтрино с энергиями порядка 6 МэВ [259—261] как относительно предсказания Huber+Mueller, так и относительно спектров ILL+Vogel. Так же, как и предыдущие эксперименты, Daya Bay, Double CHOOZ и RENO наблюдают недостаток потока антинейтрино 5%.

Причины подобных отклонений в настоящее время активно исследуются. Например, в работе [238] продемонстрировано, что методом ab-initio можно удовлетворительно описать наблюдаемые антинейтринные спектры, в том числе в области 6 МэВ, предполагая, что все распады являются разрешенными. В работе [238] высказывается гипотеза о том, что возможной причиной отклонения антинейтринного спектра в области 6 МэВ являются систематические погрешности оригинального измерения бета-спектра в ILL.

8.2 Сечение обратного бета-распада

Сечение ОБР с хорошей точностью может быть вычислено в рамках СМ [262]. В нулевом приближении разложения по $1/M_p$, где M_p — масса протона, энергия позитрона не зависит от угла вылета и равна:

$$E_e^{(0)} = E_\nu - \Delta, \quad (8.2)$$

где $\Delta = M_n - M_p = 1.29$ МэВ. Из выражения ур. (8.2) следует, что порог реакции $E_{\min}^\nu = m_e + \Delta = 1.804$ МэВ, где m_e — масса электрона. Сечение ОБР в нулевом порядке записывается следующим образом:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\cos\theta} \right)^{(0)} = \frac{\sigma_0}{2} [(f^2 + 3g^2) + (f^2 - g^2)v_e^{(0)} \cos\theta] E_p^{(0)} p_e^{(0)}, \quad (8.3)$$

где f и g — векторная и аксиальная константы связи; p_e , E_e , v_e — модуль 3-импульса, энергия и скорость позитрона; $\cos \theta$ — угол между импульсами нейтрино и позитрона.

$$\sigma_0 = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C}{\pi} (1 + \Delta_{\text{inner}}^R), \quad (8.4)$$

где G_F — константа Ферми, θ_C — угол смешивания Кабиббо, а Δ_{inner}^R — это независящая от энергии внутренняя радиационная поправка. Помимо этого, сечение включает в себя ряд энергозависимых поправок: внешнюю радиационную поправку, поправку на конечный размер ядра, отдачу ядра, слабый магнетизм. Процесс ОБР описывается такой же диаграммой, что и процесс распада нейтрона. Он включает в себя те же самые поправки, что позволяет выразить сечение ОБР через измераемые параметры распада нейтрона: время жизни τ_n и фазовое пространство $f_{\text{p.s.}}^R = 1.71517$ [263]:

$$\sigma_0 = \frac{2\pi^2}{m_e^5 f_{\text{p.s.}}^R \tau_n (f^2 + 3g^2)}. \quad (8.5)$$

Фактор фазового пространства $f_{\text{p.s.}}^R$ включает в себя поправки на конечный размер ядра, слабый магнетизм, отдачу ядра и внешнюю радиационную поправку. Внутренняя радиационная поправка учитывается через время жизни нейтрона.

В первом порядке разложения по $1/M_p$ энергия нейтрино становится зависимой от угла вылета позитрона:

$$E_e^{(1)} = E_e^{(0)} \left[1 - \frac{1}{M} (1 - v_e^{(0)} \cos \theta) \right] - \frac{\Delta^2 - m_e^2}{2M}, \quad (8.6)$$

где $M = (m_p + m_n)/2$ — средняя масса нуклона. Сечение ОБР при этом записывается следующим образом:

$$\left(\frac{d\sigma}{d \cos \theta} \right)^{(1)} = \frac{\sigma_0}{2} [(f^2 + 3g^2) + (f^2 - g^2)v_e^{(1)} \cos \theta] E_e^{(1)} p_e^{(1)} - \frac{\sigma_0}{2} \left[\frac{\Gamma}{M} \right] E_e^{(0)} p_e^{(0)}, \quad (8.7)$$

точная запись поправки Γ может быть найдена в [262]. Сечение ОБР, проинтегрированное по $\cos \theta$, представлено на рисунке 8.4.

В зависимости от угла вылета позитрона сечение от ОБР меняется в пределах 20 %, причём позитрон в среднем имеет слегка обратное направление вылета. Зависимость сечения ОБР от угла вылета позитрона представлена на рисунке 8.5а. Энергия позитрона тоже слабо зависит от угла рассеяния и находится в пределе ± 1 %.

Как видно из уп. (8.5), сечение зависит от времени жизни нейтрона. После переоценки систематических погрешностей за последнее десятилетие время жизни нейтрона заметно изменилось. В таблице 13 представлены результаты усреднения измерений времени жизни нейтрона, опубликованные в PDG в разное время [158; 264; 265].

В 2005-ом году вышла работа [266] с результатом $\tau_n = (878.5 \pm 0.8)$ с, отличающимся от мирового среднего на 6.5 стандартных отклонений. После этого измерения в нескольких экспериментах [267; 268] были пересмотрены систематические погрешности, а также получены новые результаты [267], подтверждающие результат [266].

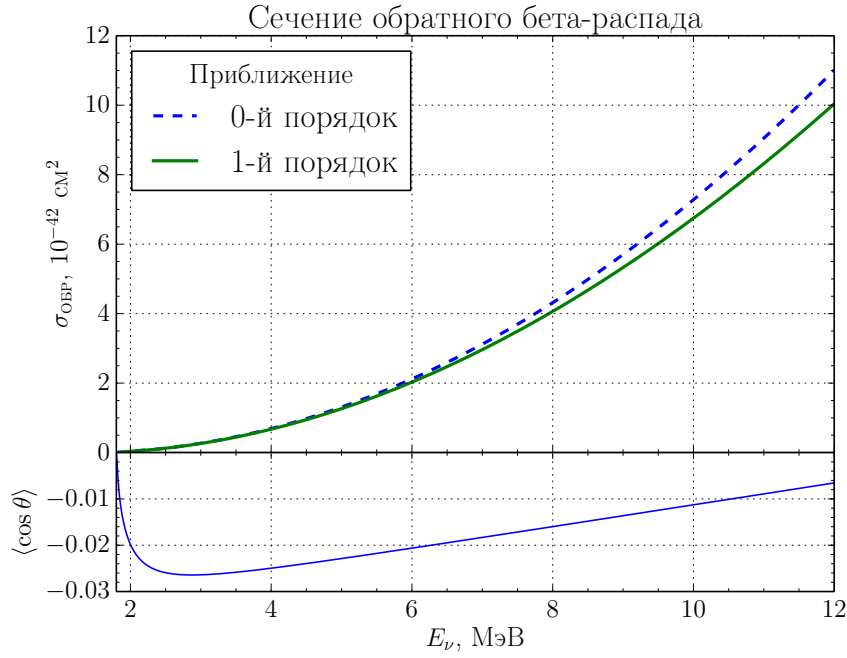
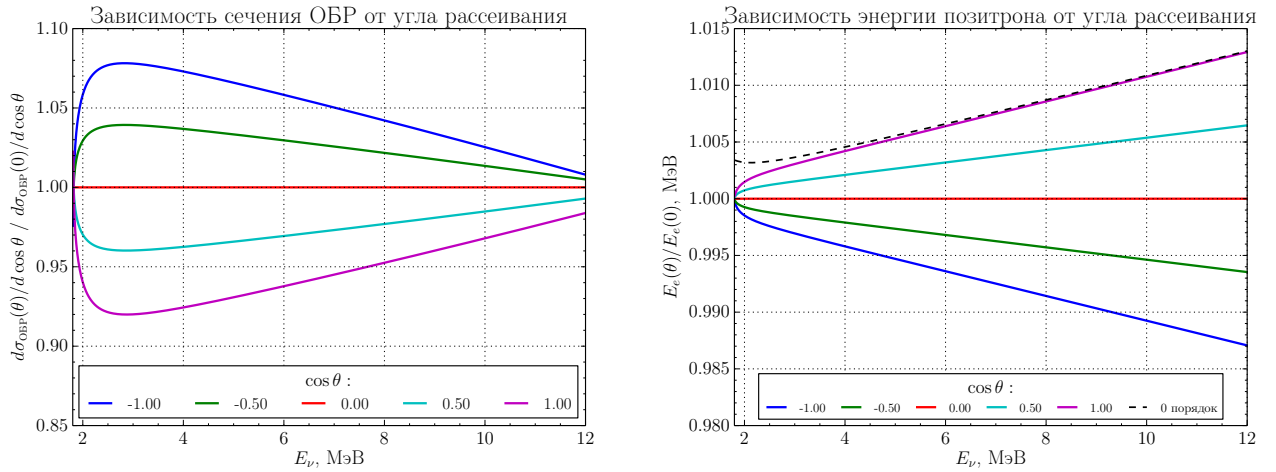


Рисунок 8.4 — Сечение ОБР как функция энергии нейтрино в нулевом и первом порядках разложения по $1/M$. Зависимость среднего косинуса угла вылета позитрона от энергии.



а)

б)

Рисунок 8.5 — Зависимость дифференциального сечения ОБР а и энергии позитрона б от угла его вылета по отношению к случаю $\cos \theta = 0$. Для сравнения приведён график для энергии позитрона в 0-ом приближении.

8.3 Предсказание числа взаимодействий $\bar{\nu}_e$

В этом разделе обсуждается метод вычисления ожидаемого числа событий ОБР и спектра реконструированной энергии позитронов в детекторе Daya Bay. Полное число событий в интервале реконструированной энергии $\{E_{\text{rec}}^k, E_{\text{rec}}^{k+1}\}$ первичного сигнала в детекторе с индексом i дается

$$N_{ik}^{\text{exp}} = N_{ik}^{\text{IBD}} + N_{ik}^{\text{bkg}}, \quad (8.8)$$

Год	$\tau_n, \text{с}$
2010	885.7 ± 0.8
2011	881.5 ± 1.5
2012	880.1 ± 1.1
2013	880.0 ± 0.9
2014	880.3 ± 1.1

Таблица 13 — Мировое среднее измерений жизни нейтрона по версии PDG [158; 264; 265] в разное время.

где N_{ik}^{IBD} – числа позитронов от ОБР, и N_{ik}^{bkg} – вклад фоновых событий. Формы спектров фоновых событий приведены на рис. 8.8, темпы счета фона резюмированы в таб. 10. Число ОБР позитронов дается

$$N_{ik}^{\text{IBD}} = \int_{E_{\text{rec}}^k}^{E_{\text{rec}}^{k+1}} dE_{\text{rec}} \int_{t_{\text{DAQ}}} dt \frac{d^2 N_i}{dE_{\text{rec}} dt} \varepsilon_i(t), \quad (8.9)$$

где $d^2 N_i(E_{\text{rec}}, t)/dE_{\text{rec}} dt$ – ожидаемая плотность числа сигнальных событий как функция времени и реконструированной энергии. Интеграл содержит эффективность $\varepsilon_i(t)$ детектора с индексом i , учитывающую небольшие изменения в живом времени набора данных, и вето детектора как функцию времени. Ур. (8.9) используется как в спектральном, так и интегральном (используя один энергетический интервал) осцилляционных анализах.

Настоящая энергия, выделяемая позитроном в сцинтилляторе с учетом аннигиляции

$$E_{\text{true}} = E_e + m_e. \quad (8.10)$$

Ожидаемая плотность числа реконструированных событий может быть получена сверткой плотности числа событий с откликом детектора,

$$\frac{d^2 N_i}{dE_{\text{rec}} dt} = \int_{2m_e}^{\infty} dE_{\text{true}} \frac{d^2 N_i}{dE_{\text{true}} dt} P(E_{\text{rec}}; E_{\text{true}}). \quad (8.11)$$

Отклик детектора $P(E_{\text{rec}}; E_{\text{true}})$ описывает вероятность получения реконструированной энергии E_{rec} при условии, что энергия E_{true} .

Ожидаемая плотность числа событий в интервале энергии,

$$\frac{d^2 N_i}{dE_{\text{true}} dt} = N_i^p \int_{-1}^1 d \cos \theta_e \frac{d\sigma}{d \cos \theta_e} \frac{d^2 N_i'}{dE_\nu dt} \frac{dE_\nu}{dE_{\text{true}}}, \quad (8.12)$$

равна произведению плотности числа антинейтрино $d^2 N_i'/dE_\nu dt$, числа протонов в детекторе N_i^p , и сечения $d\sigma/d \cos \theta_e$ ОБР. Угол рассеяния позитрона θ_e не измеряется, поэтому по нему производится интегрирование.

Сечение $d\sigma/d \cos \theta_e$ ОБР как функция угла рассеяния позитрона и энергии $\bar{\nu}_e$, вычисленное в работе [262], приведено в разделе 8.2. Энергию антинейтрино можно выразить без приближений через энергию E_e и угол рассеяния θ_e позитрона:

$$E_\nu = E_\nu(E_e, \cos \theta_e) = \frac{E_e + \tilde{\Delta}}{1 - \frac{E_e}{m_p}(1 - v_e \cos \theta_e)}, \quad (8.13)$$

где $\tilde{\Delta} = (m_n^2 - m_p^2 - m_e^2)/2m_p \approx m_n - m_p$ и v_e – скорость позитрона. Якобиан

$$\frac{dE_\nu}{dE_{\text{true}}} = \frac{1 + \frac{E_\nu}{m_p}(1 - v_e^{-1} \cos \theta_e)}{1 - \frac{E_e}{m_p}(1 - v_e \cos \theta_e)}, \quad (8.14)$$

показан на рис. 8.6 как функция энергии позитрона E_e .

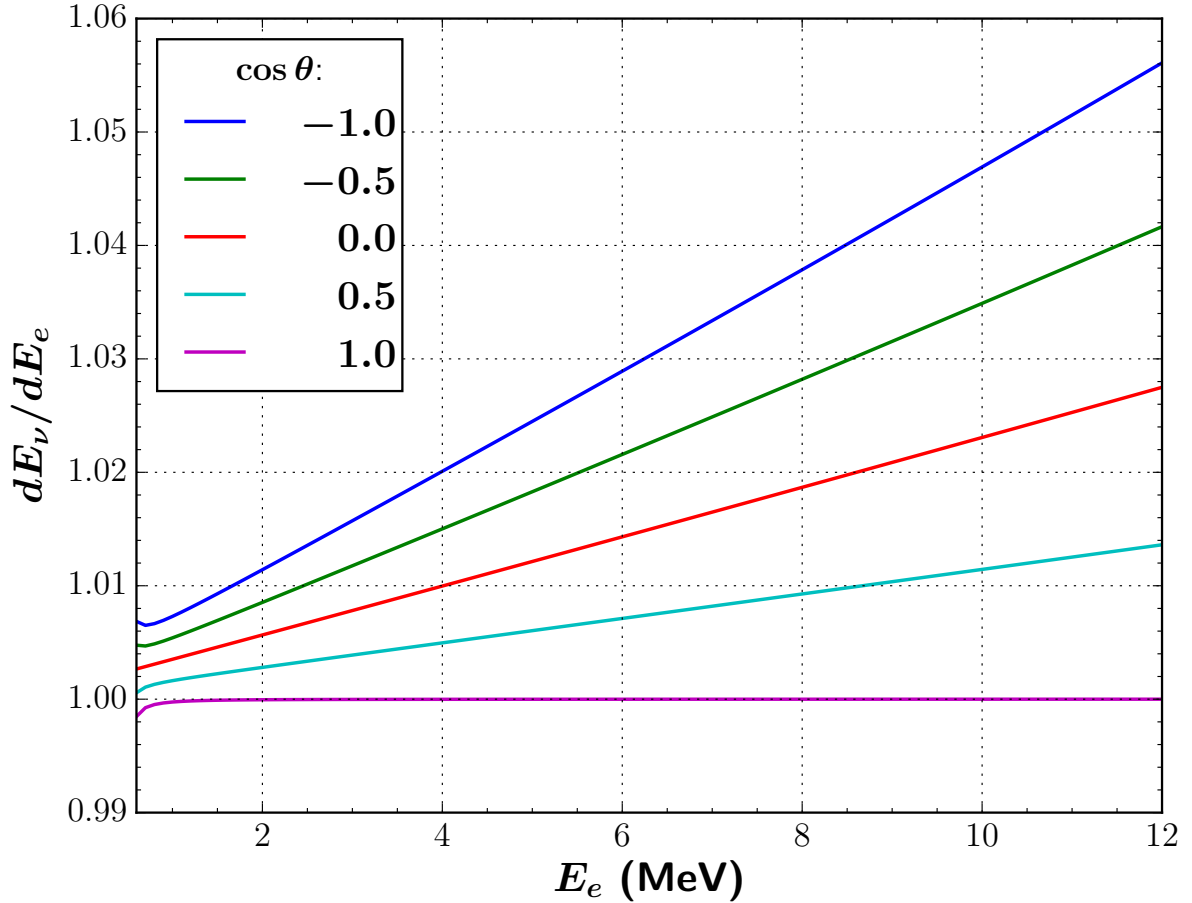


Рисунок 8.6 — Якобиан dE_ν/dE_{true} как функция энергии позитрона E_e для некоторых значений $\cos \theta_e$.

Плотность числа реакторных $\bar{\nu}_e$, проходящих через детектор, можно оценить как

$$\frac{d^2 N_i^\nu(E_\nu, t)}{dE_\nu dt} = \sum_j \frac{d^2 R_\nu^j(E_\nu, t)}{dE_\nu dt} \frac{P_{\text{sur}}(E_\nu, L_{ij})}{4\pi L_{ij}^2}, \quad (8.15)$$

где $d^2 R_\nu^j(E_\nu, t)/dE_\nu dt$ – плотность числа антинейтрино в единицу времени и единицу энергии антинейтрино, излучаемых реактором с индексом j , L_{ij} – расстояние центрами реактора с индексом j и детектора с индексом i , и $P_{\text{sur}}(E_\nu, L)$ – вероятность выживания $\bar{\nu}_e$, даваемая формулой 6.2.

Плотность числа реакторных $\bar{\nu}_e$ описывается формулой

$$\frac{d^2 R_\nu(E_\nu, t)}{dE_\nu dt} = \frac{W_{\text{th}}(t)}{\langle e(t) \rangle} \sum_i^{\text{isotope}} f_i(t) S_i(E_\nu) c_{\text{ne},i}(E_\nu, t) + S_{\text{SNF}}(E_\nu, t), \quad (8.16)$$

где каждый член формулы имеет следующий смысл.

- $W_{\text{th}}(t)$ – термальная мощность реактора как функция времени. Эти данные поставлялись коллаборации Daya Bay реакторной компанией с интервалом в один час. Систематическая неопределенность на уровне 0.5% приписывается этой переменной и предполагается некоррелированной между реакторами.
- $f_i(t)$ – доля распадов, связанных с родительским изотопом с индексом i в реакторе, как функция времени. Учитываются четыре главных изотопа ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu . Эти данные также поставляются реакторной компанией и перепроверяются независимым моделированием реактора. Предполагается неопределенность 5%, некоррелированная между реакторами, но с определенными корреляциями между разными изотопами, взятыми из работы [269].
- $\langle e(t) \rangle = \sum_j f_j(t) e_j$ – средняя выделенная термальная энергия как функция времени. Выделенная энергия e_j на один развал родительского изотопа с индексом j взята из работы [270]. Неопределенность этой величины $<0.2\%$, коррелирована между реакторами.
- $S_i(E_\nu)$ – спектр энергии $\bar{\nu}_e$ как функция энергии на один развал родительского изотопа с индексом i . Использовались два набора спектров четырех главных изотопов ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu : Huber [226] и Mueller [236]. Неопределенности, данные в этих работах, были учтены в настоящем анализе как коррелированные между реакторами.
- $c_{\text{ne},i}$ – неравновесная поправка к потоку $\bar{\nu}_e$, не превышающая одного процента, описана в разделе 8.1.4. Поправка вычислена в работе [271]. Поправка имеет неопределенность на уровне 0.15%.
- $S_{\text{SNF}}(E_\nu, t)$ – вклад в поток $\bar{\nu}_e$ от отработанного топлива, содержащегося в охлаждающем бассейне рядом с каждым реактором. Некоррелированная между реакторами неопределенность равная 50% используется для этого множителя. Эта поправка вносит неопределенность в ожидающееся число взаимодействий $\bar{\nu}_e$ на уровне 0.19%.

Выделенная энергия на развал (e_i) определена как часть энергии развала, дающая вклад в термальную мощность. Она была вычислена в работе [272] и уточнена в работе [270]. Уточнения заключались в учете обновленной ядерной базы данных и более аккуратном расчете средней энергии, уносимой антинейтрино. Значения e_i и соответствующие неопределенности приведены в таб. 14 и используются в этом анализе.

Изотоп	Энергия на развал (МэВ)
^{235}U	202.36 ± 0.26
^{238}U	205.99 ± 0.52
^{239}Pu	211.12 ± 0.34
^{241}Pu	214.26 ± 0.33

Таблица 14 — Энергия, выделенная на распад для четырех главных изотопов, а также неопределенности оценки энергии из работы [270].

Отклик детектора $P(E_{\text{rec}}; E_{\text{true}})$ учитывает детекторные эффекты и процедуру реконструкции, подробно описанные в разделе 6.3. В данной работе применяется метод учета отклика детектора, учитывающий три главных эффекта.

- $P(E_{\text{dep}}; E_{\text{true}})$ – плотность вероятности позитрону выделить энергию E_{dep} в сцинтилляторе при энергии позитрона равной E_{true} . Эти энергии обычно тождественны друг другу, за исключением $\sim 1\%$ позитронов, теряющих долю своей энергии в IAV. Этот эффект моделируется программой Geant4 и используется в виде таблицы.
- $P(\bar{E}_{\text{rec}}; E_{\text{dep}})$ – плотность вероятности получить реконструированную среднюю энергию \bar{E}_{rec} для данной выделенной энергии E_{dep} . Этот эффект, учитывающий нелинейность световых выходов в сцинтилляторе и нелинейность отклика электроники при измерении заряда собранного с ФЭУ, показан на рис. 6.15.
- $P(E_{\text{rec}}; \bar{E}_{\text{rec}})$ – плотность вероятности получить реконструированную энергию E_{rec} для данной средней энергии \bar{E}_{rec} . Этот эффект учитывает разрешение детектора, которое моделируется гауссовым распределением со средней энергией \bar{E}_{rec} и стандартным отклонением, даваемым ур. (6.14).

Окончательный отклик детектора вычисляется как последовательная свертка этих трех распределений.

8.4 Статистический анализ

В данной работе используется стандартный частотный или фреквентистский² подход к статистическому анализу данных, обеспечивающий (i) наилучшие оценки θ_{13} и Δm_{32}^2 , (ii) доверительные интервалы для этих параметров и (iii) меру согласия наблюдений с 3ν -моделью нейтринных осцилляций. В этом разделе обсуждаются концептуальные детали статистического анализа и методы учета систематических неопределенностей.

8.4.1 Функция правдоподобия и учет результатов предыдущих измерений

Напомним некоторые понятия и методы статистического анализа, чтобы задать основу для следующего раздела с результатами анализа. Экспериментальные данные можно удобно представить в виде N -мерного вектор-столбца \mathbf{N}^{obs} . Элементом вектора является число экспериментальных событий N_i^{obs} в интервале с индексом i . Соответствующее модельное ожидание $\mathbf{N}^{\text{exp}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta})$ зависит от K -мерного вектора неограниченных параметров $\boldsymbol{\theta}$ и M -мерного вектора ограниченных параметров $\boldsymbol{\eta}$ с текущей оценкой $\boldsymbol{\eta}_0$ и ковариационной матрицей $V_{\boldsymbol{\eta}}$. Неопределенности на параметры $\boldsymbol{\eta}$, закодированные в ковариационной матрице $V_{\boldsymbol{\eta}}$, часто называются *систематическими*. В англоязычной литературе соответствующие параметры называются *nuisance parameters*.

²от английского слова “frequentist”.

В частотном подходе ключевой является функция правдоподобия $L(\mathbf{N}^{\text{obs}}, \boldsymbol{\eta}_0 | \mathbf{N}^{\text{exp}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}))$, являющаяся вероятностью наблюдать совместно \mathbf{N}^{obs} и $\boldsymbol{\eta}_0$:

$$L(\mathbf{N}^{\text{obs}}, \boldsymbol{\eta}_0 | \mathbf{N}^{\text{exp}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta})) = L(\mathbf{N}^{\text{obs}} | \mathbf{N}^{\text{exp}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta})) \cdot L(\boldsymbol{\eta}_0 | \boldsymbol{\eta}), \quad (8.17)$$

равная произведению вероятности $L(\mathbf{N}^{\text{obs}} | \mathbf{N}^{\text{exp}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}))$ наблюдать \mathbf{N}^{obs} при модельном ожидании $\mathbf{N}^{\text{exp}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta})$ и вероятности $L(\boldsymbol{\eta}_0 | \boldsymbol{\eta})$ наблюдать $\boldsymbol{\eta}_0$ при (неизвестном) истинном значении параметра $\boldsymbol{\eta}$.

В пределе бесконечно большого числа событий и предположив, что функции правдоподобия — гауссовы, ур. (8.17) можно представить в виде

$$L(\mathbf{N}^{\text{obs}}, \boldsymbol{\eta}_0 | \mathbf{N}^{\text{exp}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta})) = P(\mathbf{N}^{\text{obs}}, \mathbf{N}^{\text{exp}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}), V_{\text{stat}}) \cdot P(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}_0, V_{\eta}), \quad (8.18)$$

где

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{y}, V) = [(2\pi)^N |V|]^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{y})^T V^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \quad (8.19)$$

– гауссова плотность вероятности с ковариационной матрицей V размерности $N \times N$ и детерминантом $|V|$. V_{stat} – диагональная ковариационная матрица, включающая в себя статистические вариации. Обозначим $\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}$ как значения параметров, соответствующие максимуму функции правдоподобия в ур. (8.17), что эквивалентно минимуму функции

$$-2 \ln L(\mathbf{N}^{\text{obs}}, \boldsymbol{\eta}_0 | \mathbf{N}^{\text{exp}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta})) = \chi_{\text{pull}}^2 + \ln |V_{\text{stat}}| + \ln |V_{\eta}| + (N + M) \ln 2\pi, \quad (8.20)$$

где

$$\chi_{\text{pull}}^2(\mathbf{N}^{\text{obs}}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}) = (\mathbf{N}^{\text{obs}} - \mathbf{N}^{\text{exp}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}))^T V_{\text{stat}}^{-1} (\mathbf{N}^{\text{obs}} - \mathbf{N}^{\text{exp}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta})) + (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0)^T V_{\eta}^{-1} (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) \quad (8.21)$$

обычный χ^2 со штрафным членом. Минимизация $-2 \ln L(\mathbf{N}^{\text{obs}}, \boldsymbol{\eta}_0 | \mathbf{N}^{\text{exp}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}))$ из ур. (8.20) эквивалента минимизации $\chi_{\text{pull}}^2(\mathbf{N}^{\text{obs}}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta})$ из ур. (8.21) при условии, что $|V_{\text{stat}}|$, $|V_{\eta}|$ не зависят от $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta})$ или, если эта зависимость ничтожно мала. Такие вклады пропорциональны размерности матриц V_{stat} , V_{η} . В общем, $\chi_{\text{pull}}^2(\mathbf{N}^{\text{obs}}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta})$ не идентично $-2 \ln L(\mathbf{N}^{\text{obs}}, \boldsymbol{\eta}_0 | \mathbf{N}^{\text{exp}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}))$.

8.4.2 Приближение ковариационной матрицы

Если неопределенности на $\boldsymbol{\eta}_0$ достаточно малы, наилучшую оценку параметра $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ можно найти, сделав линейное разложение модельного вектора

$$\mathbf{N}^{\text{exp}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}) \simeq \mathbf{N}^{\text{exp}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}_0) + D(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}_0)(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}_0), \quad (8.22)$$

где $D(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}_0)$ матрица производных с матричными элементами

$$D_{ij}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}_0) = \left. \frac{dN_i^{\text{exp}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta})}{d\eta_j} \right|_{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}_0}. \quad (8.23)$$

С учетом приближения в ур. (8.22), минимум функции χ_{pull}^2 , определенной в ур. (8.21), существует при

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = (V_{\eta}^{-1} + D^T V_{\text{stat}}^{-1} D)^{-1} D^T V_{\text{stat}}^{-1} (\mathbf{N}^{\text{obs}} - \mathbf{N}^{\text{exp}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta})) + \boldsymbol{\eta}_0. \quad (8.24)$$

Подставляя $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ из ур. (8.24) в χ_{pull}^2 из ур. (8.21), получаем

$$\chi_{\text{pull}}^2(\mathbf{N}^{\text{obs}}; \boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) = \chi_{\text{cov}}^2(\mathbf{N}^{\text{obs}}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}_0), \quad (8.25)$$

где

$$\chi_{\text{cov}}^2(\mathbf{N}^{\text{obs}}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}_0) = (\mathbf{N}^{\text{obs}} - \mathbf{N}^{\text{exp}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}_0))^T V^{-1}(\boldsymbol{\theta}) (\mathbf{N}^{\text{obs}} - \mathbf{N}^{\text{exp}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}_0)) \quad (8.26)$$

и $V(\boldsymbol{\theta})$ определено согласно

$$V(\boldsymbol{\theta}) = V_{\text{stat}} + V_{\text{sys}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}_0), \text{ с } V_{\text{sys}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}_0) = D V_{\eta} D^T. \quad (8.27)$$

Таким образом, минимизация по параметрам $\boldsymbol{\theta}$ функции χ_{pull}^2 со штрафными членами из ур. (8.21) и функции χ_{cov}^2 с ковариационной матрицей из ур. (8.26), приведет к идентичным результатам, если линейное приближение в ур. (8.22) достаточно аккуратное. Заметим в этой связи, что метод минимизации χ_{pull}^2 со штрафными членами более общий, по сравнению с методом минимизации χ_{cov}^2 с ковариационной матрицей. Например, в случае достаточно больших неопределенностей на $\boldsymbol{\eta}_0$, минимизация χ_{cov}^2 с ковариационной матрицей из ур. (8.26) может дать неправильные результаты.

Если подмножество $\boldsymbol{\eta}'$ вектора $\boldsymbol{\eta}$ известно с относительно малой неопределенностью, позволяющей линейное приближение в ур. (8.22), то можно использовать гибридную функцию $\chi_{\text{pull+cov}}^2$ с $\boldsymbol{\eta}'$ параметрами, поглощенными в ковариационной матрице, а все остальные параметры $\boldsymbol{\eta} \setminus \boldsymbol{\eta}'$ остаются в штрафных членах:

$$\chi_{\text{pull+cov}}^2(\mathbf{N}^{\text{obs}}; \boldsymbol{\eta}'_0; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}'') = (\mathbf{N}^{\text{obs}} - \mathbf{N}^{\text{exp}})^T V^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}') (\mathbf{N}^{\text{obs}} - \mathbf{N}^{\text{exp}}) + (\boldsymbol{\eta}'' - \boldsymbol{\eta}''_0)^T V_{\eta''}^{-1} (\boldsymbol{\eta}'' - \boldsymbol{\eta}''_0), \quad (8.28)$$

где $\mathbf{N}^{\text{exp}} = \mathbf{N}^{\text{exp}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}'_0, \boldsymbol{\eta}'')$, $V(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}'_0)$ определяется аналогично ур. (8.27) и $V_{\eta''}$ – блок матрицы V_{η} , в которой вычеркнуты строки и столбцы, соответствующие $\boldsymbol{\eta}'$.

Результатом подгонки являются параметры $\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}$ и их доверительные интервалы, что в общем случае есть многообразие размерности $K + M$. Для визуализации доверительных интервалов интересующих нас параметров приходится ограничиваться одно- или двумерными (иногда, трехмерными) проекциями.

8.4.3 Маргинализация доверительного интервала по параметрам

В классической частотной конструкции для этого необходимо определить статистику t , статистический интервал приемки³, доверительный уровень α и наблюдаемое значение статистики

³в англоязычной литературе – “acceptance interval”

t_{obs} для того, чтобы найти доверительный интервал. Статистика t – это случайная величина, зависящая от экспериментальных данных. Статистический интервал приемки должен быть определен таким образом, чтобы распределение переменной t , рандомизированной в соответствии с теоретической моделью с фиксированными параметрами (θ, η) , покрывал этот интервал в доле α экспериментов. Другими словами, вероятность обнаружить t в заданном интервале равна α . Не существует единственно возможного варианта определения такого интервала приемки. Разные соглашения для построения интервала приемки приводят к разнообразию статистических методов. Некоторые соглашения, такие как, например, метод Фельдмана и Казинса [273], требуют большого объема компьютерных вычислений.

Удобно определить статистику, основанную на отношении функций правдоподобия:

$$t(\widetilde{N}^{\text{obs}}|\theta, \eta) = -2 \ln \frac{L(\widetilde{N}^{\text{obs}}|\theta, \eta)}{L(\widetilde{N}^{\text{obs}}|\hat{\theta}, \hat{\eta})}, \quad (8.29)$$

где $\widetilde{N}^{\text{obs}}$ – случайное число событий, распределенное согласно теоретической модели с параметрами (θ, η) . Используя ур. (8.29) и соглашение для определения интервала приемки, можно определить доверительный интервал наблюдения N^{obs} для данных параметров (θ, η) , входящих в статистику $t(N^{\text{obs}}|\theta, \eta)$.

В пределе бесконечной статистики, и предполагая, что распределение лучших оценок $(\hat{\theta}, \hat{\eta})$ гауссово, распределение случайной величины $t(\widetilde{N}^{\text{obs}}|\theta, \eta)$ из ур. (8.29) приближается к распределению функции $\chi^2(K+M)$ [274]. В таком случае доверительные интервалы могут быть построены без использования больших вычислительных мощностей следующим образом. Точка (θ, η) принимается в доверительный интервал, если

$$t(N^{\text{obs}}|\theta, \eta) < \chi_{\alpha}^2(K+M), \quad (8.30)$$

где $\chi_{\alpha}^2(k)$ обозначает α -квантиль распределения $\chi^2(k)$ с k степенями свободы.

Описанная процедура строит доверительный интервал в пространстве размерности $K+M$, которое в практических применениях, обычно, велико. Как правило, требуется проекция этого многомерного пространства на область с одним или двумя измерениями. Для упрощения вычислений используется метод профилирования функции правдоподобия, основанный на следующем свойстве. Переменная

$$t(\widetilde{N}^{\text{obs}}|\theta) = -2 \ln \frac{L(\widetilde{N}^{\text{obs}}|\theta, \hat{\eta}(\theta))}{L(\widetilde{N}^{\text{obs}}|\hat{\theta}, \hat{\eta})} \quad (8.31)$$

асимптотически распределена как $\chi^2(K)$, если $\widetilde{N}^{\text{obs}}$ распределена согласно теоретической модели с θ наилучшей оценкой η для данного значения параметра θ . Далее, строятся интервал приемки и доверительный интервал в пространстве параметров θ в полной аналогии с построением в пространстве (θ, η) , кратко обсуждаемом выше.

Применим теперь описанную выше процедуру к задаче определения осцилляционных параметров и соответствующих доверительных интервалов в эксперименте Daya Bay. Наблюдение N^{obs} состоит из реконструированной энергии позитронов – первичных сигналов в наборе кандидатов на взаимодействия $\bar{\nu}_e$ в каждом детекторе. Пусть, N_{ik}^{obs} – наблюдаемое число кандидатов в интервале первичной энергии с индексом k в детекторе с индексом i . Аналогично, определим N_{ik}^{exp}

как соответствующее модельное предсказание. Наблюдаемые и модельные числа событий представим в виде векторов N^{obs} и N^{exp} . Модельный вектор N^{exp} зависит от вектора неограниченных параметров $\theta = (\sin^2 2\theta_{13}, \Delta m_{32}^2, \mathbf{n})$, где $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_{15})$ – неограниченные параметры для подгонки спектра реакторных антинейтрино, а также от набора ограниченных η параметров, которые мы уточним далее.

8.4.4 Моделирование систематических неопределенностей

Систематические неопределенности, учтенные в настоящем анализе, резюмированы в таб. 15. Кроме того, были учтены неопределенности других осцилляционных параметров: $\sin^2 2\theta_{12} = 0.846 \pm 0.021$ и $\Delta m_{21}^2 = (7.53 \pm 0.18) \times 10^{-5}$ эВ² в соответствии с [158]. Чтобы учесть неопределенности в нормировке и форме спектра реакторных антинейтрино была использована кусочно-гладкая параметризация спектра

$$S_{ij}(E_\nu) = n_j k_{ij} e^{-b_{ij}(E_\nu - E_\nu^j)}, \quad E_\nu \in (E_\nu^j, E_\nu^{j+1}), \quad (8.32)$$

где коэффициенты k_{ij} и b_{ij} подбирались таким образом, чтобы воспроизводить заданный начальный спектр, предполагая сначала $n_j = 1$. В качестве спектра по умолчанию использовалась модель Huber+Mueller [226; 236]. Кусочно-гладкая функция в ур. (8.32) представлена в виде 14 частей с 15 границами. При этом, 13 частей покрывают область от 1.8 МэВ до 8.3 МэВ с шагом 0.5 МэВ. Последняя часть покрывает область от 8.3 МэВ до 12.3 МэВ. Параметры n_j – неограниченные параметры, которые подгоняются вместе с осцилляционными параметрами при минимизации χ^2 . Одно- и двумерные контуры в пространстве осцилляционных параметров получаются в результате профилирования χ^2 по параметрам n_j в соответствии с принятой статистической процедурой, описанной в разделе 8.4.

В настоящем анализе в рамках развитого дубненской группой пакета `dybOscar` были использованы три формы χ^2 .

- χ_{pull}^2 из ур. (8.21). В таком методе все ограниченные параметры учитываются в штрафных членах. Этот метод наиболее точный для нахождения оценок параметров. Большое число параметров фита (237) делает нахождение минимума χ_{pull}^2 наиболее затратным относительно компьютерного времени.
- χ_{cov}^2 с ковариационной матрицей, определенной ур. (8.26). В этом методе все ограниченные параметры учитываются в ковариационной матрице. Штрафных членов в χ_{cov}^2 нет. Это наиболее быстрый метод относительно компьютерного времени. Этот метод был использован для интегрального фита, т.е. для подгонки параметров без учета формы спектра первичного сигнала.
- В пакете программ `dybOscar` также реализован гибридный метод с минимизацией $\chi_{\text{pull+cov}}^2$ из ур. (8.28). Метод обладает хорошей точностью в нахождении минимума функционала и доверительных интервалов, сочетая это с быстродействием.

Все три метода дали согласованные результаты при анализе данных. Далее сообщаются результаты, полученные наиболее точным методом с использованием χ^2_{pull} из ур. (8.21).

Источник	Неопределенность	Корреляция
Поток реакторных антинейтрино		
Доли распадов актинидов	5%	Корреляция между изотопами из работы [269], Коррелированная между всеми реакторами
Средняя энергия на развал ядра $\bar{\nu}_e$ поток на развал ядра	Неопределенности из работы [270] Некоррелированные неопределенности из модели Huber+Mueller [226; 236]	Коррелированная между всеми реакторами Коррелированная между всеми реакторами
Неравновесное испускание $\bar{\nu}_e$	30% от предсказанного вклада	Некоррелированная между всеми реакторами
Отработанное ядерное топливо	50% от предсказанного вклада	Некоррелированная между всеми реакторами
Мощность реактора	0.5%	Некоррелированная между всеми реакторами
Модель отклика детектора		
Абсолютная калибровка энергии (нелинейность)	< 1%, ограниченная калибровочными данными	Коррелированная между всеми детекторами
Относительная калибровка энергии	0.2%	Некоррелированная между всеми детекторами
Эффективность детектирования	0.13%. см таб. 10 для отдельных вкладов.	Некоррелированная между всеми детекторами, частичная корреляция с относительной калибровкой энергии
Коэффициент корреляции эффективности детектирования и относительной калибровки энергии	0.54	–
Толщина IAV	4% (0.1%) от сигнала для энергий меньше (больше) 1.25 МэВ	Некоррелированная между всеми детекторами
Разрешение энергии	Пренебрежимо мала	Коррелированная между всеми детекторами
Предсказание фоновых событий		
Темп случайных совпадений	0.4% от предсказанного вклада	Некоррелированная между всеми детекторами
Форма спектра фоновых событий от случайных совпадений	Пренебрежимо мала	–
Темп счета ${}^9\text{Li}$, ${}^8\text{He}$	33%, 38%, и 31% от предсказанного вклада	Коррелированная между детекторами из одного холла
Доля распадов ${}^9\text{Li}$	Пренебрежимо мала	Коррелированная между всеми детекторами
Форма спектра от распадов ${}^9\text{Li}$, ${}^8\text{He}$	Пренебрежимо мала	–
Темп счета от быстрых нейтронов	10%, 10%, и 17% от предсказанного вклада	Коррелированная между детекторами из одного холла
Форма спектра событий от быстрых нейтронов	Пренебрежимо мала	–
Темп счета от ${}^{241}\text{Am}$ - ${}^{13}\text{C}$	45% от предсказанного вклада	Коррелированная между всеми детекторами
Форма спектра событий от ${}^{241}\text{Am}$ - ${}^{13}\text{C}$	Пренебрежимо мала	–
Темп счет от (α, n)	50% от предсказанного вклада	Некоррелированная между всеми детекторами
Форма спектра событий от (α, n)	Пренебрежимо мала	–

Таблица 15 — Резюме систематических неопределенностей, рассмотренных в настоящем анализе осцилляций $\bar{\nu}_e$.

8.5 Результаты анализа

8.5.1 Измерение амплитуды осцилляций $\sin^2 2\theta_{13}$ на основе полного числа событий

Рассмотрев только один интервал по реконструированной энергии первичного сигнала (0.7 – 8) МэВ, можно дать наилучшую оценку $\sin^2 2\theta_{13}$, предполагая $|\Delta m_{32}^2| = (2.43 \pm 0.07) \times 10^{-3} \text{эВ}^2$ [158]. Получен следующий результат:

$$\sin^2 2\theta_{13} = 0.0850 \pm 0.0030 \text{ (стат.)} \pm 0.0028 \text{ (сист.)},$$

$$\frac{\chi^2}{\text{NDF}} = \frac{5.08}{8 - 2} = 0.85. \quad (8.33)$$

Рис. 8.7 иллюстрирует отношение наблюдаемого числа ОБР событий к ожиданию без нейтринных осцилляций как функции эффективного расстояния для всех восьми детекторов. Эффективное

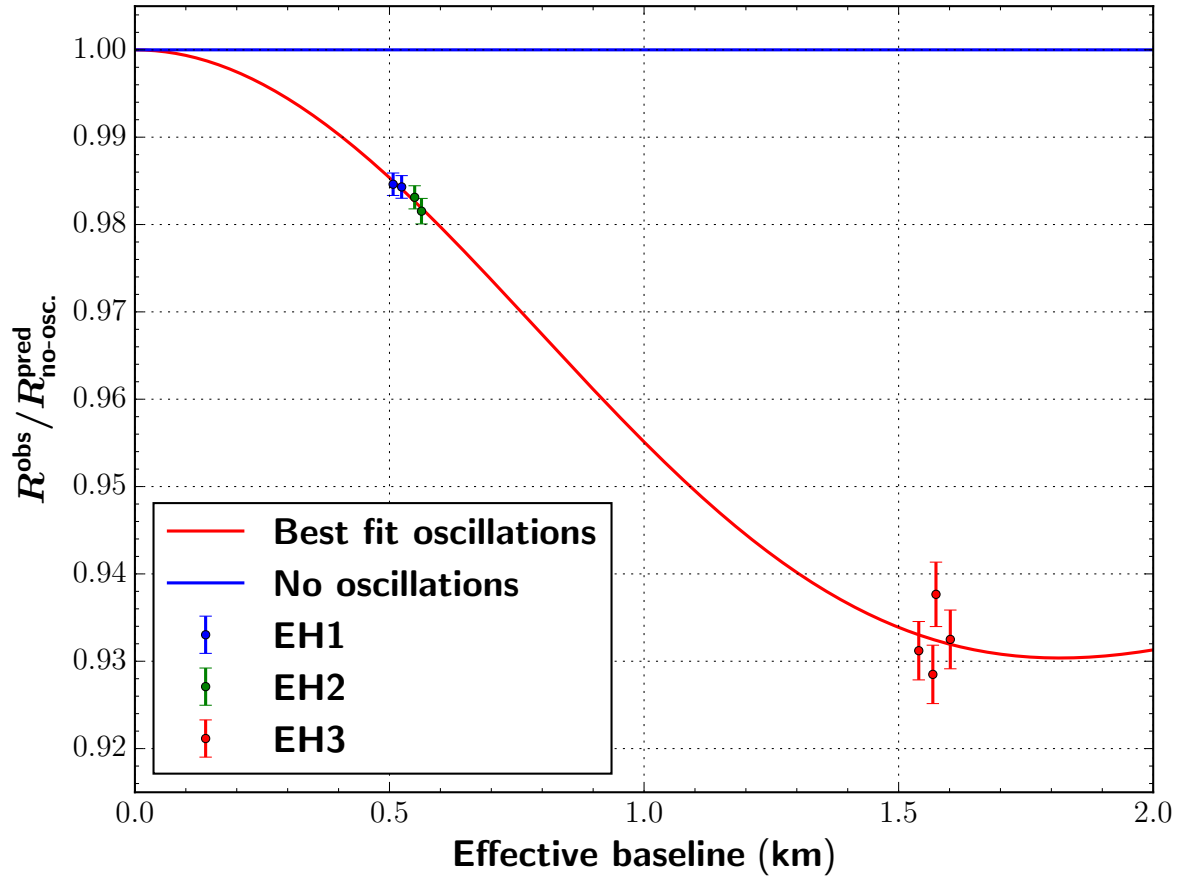


Рисунок 8.7 — Отношение наблюдаемого числа ОБР событий к ожиданию без нейтринных осцилляций как функция эффективного расстояния для всех восьми детекторов. Дефицит в дальних детекторах относительно ближних иллюстрирует исчезновение $\bar{\nu}_e$ из-за нейтринных осцилляций. Экстраполяция модели на нулевое расстояние определило абсолютную нормировку потока реакторных $\bar{\nu}_e$. Ближние (дальние) детекторы сдвинуты на ± 6 м (± 30 м) для удобства восприятия.

расстояние L_{eff} для этого рисунка дается наименьшим положительным решением уравнения

$$\int \sin^2(\Delta m_{ee}^2 L_{\text{eff}} / E_\nu) \frac{dN_0}{dE_\nu} dE_\nu = \sum_j^{\text{reactors}} \int \sin^2(\Delta m_{ee}^2 L_j / E_\nu) \frac{dN_0^j}{dE_\nu} dE_\nu, \quad (8.34)$$

где dN_0^j/dE_ν — это ожидаемый сигнал в данном детекторе от реактора j в предположении отсутствия осцилляций, $dN_0/dE_\nu = \sum_j dN_0^j/dE_\nu$, и L_j — расстояние между детектором и реактором. Дефицит в дальних детекторах относительно ближних иллюстрирует исчезновение $\bar{\nu}_e$ из-за нейтринных осцилляций. Экстраполяция модели на нулевое расстояние определило абсолютную нормировку потока реакторных $\bar{\nu}_e$.

8.5.2 Измерение значений $\sin^2 2\theta_{13}$ и Δm_{32}^2 на основе измеренных чисел событий взаимодействия антинейтрино и их энергетических спектров

На рис. 8.8 показаны спектры реконструированной энергии позитронов, измеренные в каждом экспериментальном холле. Каждый спектр сравнивается с предсказанием в предположении отсутствия осцилляций, а также в рамках 3ν -модели осцилляций нейтрино, которая находится в наилучшем согласии с наблюдениями. Искажение энергетического спектра в дальнем холле относительно ближних холлов согласуется с гипотезой нейтринных осцилляций, что позволяет измерить $|\Delta m_{ee}^2|$. Найдены следующие параметры 3ν -модели осцилляций нейтрино, наилучшим образом описывающей наблюдаемые числа событий взаимодействия антинейтрино и их спектров:

$$\begin{aligned}
 \sin^2 2\theta_{13} &= 0.0841 \pm 0.0027 \text{ (стат.)} \pm 0.0019 \text{ (сист.)}, \\
 |\Delta m_{ee}^2| &= (2.50 \pm 0.06 \text{ (стат.)} \pm 0.06 \text{ (сист.)}) \times 10^{-3} \text{ эВ}^2, \\
 \Delta m_{32}^2(\text{NH}) &= (2.45 \pm 0.06 \text{ (стат.)} \pm 0.06 \text{ (сист.)}) \times 10^{-3} \text{ эВ}^2, \\
 \Delta m_{32}^2(\text{IH}) &= (-2.56 \pm 0.06 \text{ (стат.)} \pm 0.06 \text{ (сист.)}) \times 10^{-3} \text{ эВ}^2, \\
 \frac{\chi^2}{\text{NDF}} &= \frac{232.6}{280 - 17} = 0.88.
 \end{aligned} \tag{8.35}$$

Значения Δm_{32}^2 получены с использованием полной трехнейтринной формулы, приведенной в ур. (6.2), в предположении нормальной или обратной иерархии масс нейтрино. $|\Delta m_{ee}^2|$ получено из сравнения наблюдения с эффективной осцилляционной моделью, данной в ур. (6.3).

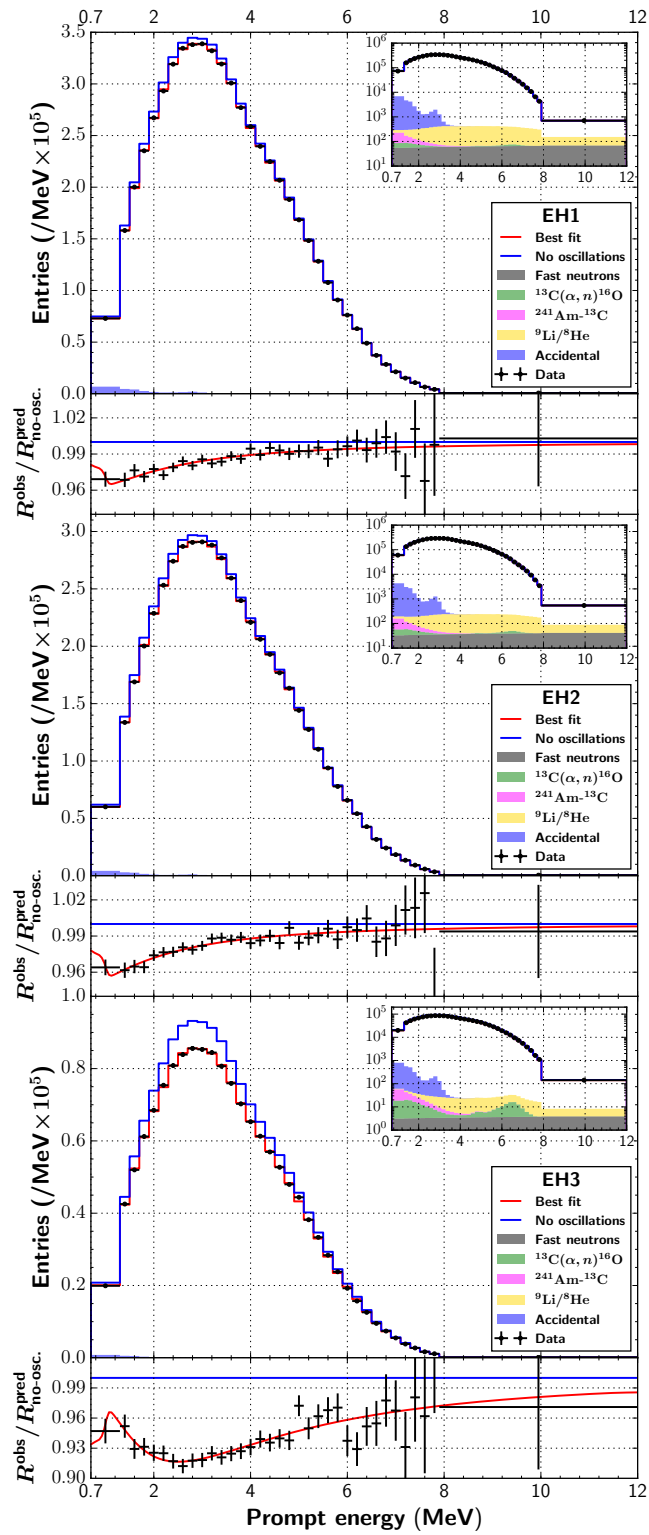


Рисунок 8.8 — Спектры реконструированной энергии позитронов, измеренные в каждом экспериментальном холле (черные точки). Спектры детекторов из одного холла сложены вместе: EH1 (верхний рисунок), EH2 (средний рисунок) и EH3 (нижний рисунок). Измерения сравниваются с предсказаниями в предположении отсутствия нейтринных осцилляций (синяя линия) и с наилучшей 3ν -модели осцилляций нейтрино (красная линия). Фоновые события видны не очень ясно (залитые гистограммы) из-за их малого количества, поэтому добавлены внутренние рисунки с логарифмическим масштабом. Чтобы проиллюстрировать искажение спектров эффектом нейтринных осцилляций, под каждый рисунок добавлена панель с отношением спектра за вычетом фоновых событий к ожиданию в предположении отсутствия осцилляций. Также приведены отношения предсказания с наилучшей 3ν -модели осцилляций нейтрино к модели без осцилляций (красная линия).

Искажение спектров, продемонстрированное на рис. 8.8, может быть проиллюстрировано вероятностью выживания $\bar{\nu}_e$ как функцией L/E_ν . С хорошей точностью, вероятность исчезновения $\bar{\nu}_e$ в каждом интервале реконструированной энергии позитрона дается отношением наблюдаемого числа событий (за вычетом фоновых событий) к предсказанию в предположении отсутствия осцилляций. Модель включает поправку на нормировку реакторных $\bar{\nu}_e$, полученную из сравнения с данными. Средняя энергия $\bar{\nu}_e$ ($\langle E_\nu \rangle$) оценивается в каждом интервале реконструированной энергии позитрона с использованием модели отклика детектора. Поскольку невозможно определить реактор, породивший каждое взаимодействие $\bar{\nu}_e$ в детекторе, используется эффективное расстояние L_{eff} , вычисленное в ур. (8.34). На рис. 8.9 приведена вероятность выживания $\bar{\nu}_e$ как функция эффективного расстояния L_{eff} , деленного на среднюю энергию антинейтрино $\langle E_\nu \rangle$. В доступном измерению интервале L_{eff}/E_ν наблюдается почти полный цикл исчезновения и появления вновь $\bar{\nu}_e$. Данные со всех трех экспериментальных холлов согласуются с гипотезой 3ν -осцилляций.

Двумерный доверительный интервал для Δm_{ee}^2 и $\sin^2 2\theta_{13}$ приведен на рис. 8.10. Доверительный интервал получен с использованием $\Delta\chi^2 = \chi^2 - \chi_{\text{min}}^2$, как функция $\sin^2 2\theta_{13}$ и $|\Delta m_{ee}^2|$. По всем остальным параметрам модели находились значения, минимизирующие χ^2 при данных фиксированных значениях $\sin^2 2\theta_{13}$ и $|\Delta m_{ee}^2|$ (метод профилирования, обсуждаемый в разделе 8.4). Двумерные интервалы показаны для областей параметров, соответствующих $\Delta\chi^2$ меньше 2.30 (68.27% У.Д.), 6.18 (95.45% У.Д.), и 11.83 (99.73% У.Д.). Также приведены одномерные распределения $\Delta\chi^2$ для каждого параметра, полученные профилированием по второму параметру.

На рисунках 8.11 и 8.12 приведены сравнения полученных в настоящей работе оценок параметров $\sin^2 2\theta_{13}$ и Δm_{32}^2 с результатами других экспериментов. Измерения полагаются на разнообразных наблюдениях нейтрино:

- исчезновение реакторных $\bar{\nu}_e$ с энергиями порядка МэВ на расстояниях нескольких км,
- исчезновение ν_μ , рожденных ускорителями частиц со средней энергией нейтрино ~ 600 МэВ [275], ~ 3 ГэВ [276] и ~ 2 ГэВ [277], распространяющихся на расстояния ~ 295 км, ~ 735 км и ~ 810 км соответственно,
- появление ν_e в тех же самых нейтринных пучках, и
- исчезновение ν_μ , рожденных взаимодействиями частиц в верхней атмосфере [278; 279], с энергиями > 1 ГэВ и распространяющихся на расстояния вплоть до диаметра Земли.

Общее свойство всех экспериментов заключается в похожих значениях L/E_ν . Согласованность в величине Δm_{32}^2 , измеренной разными методиками, позволяет твердо установить 3ν -модель нейтринных масс и смешивания.

Результат, представленный в этой работе, дает наиболее точное значение $\sin^2 2\theta_{13}$, а измерение Δm_{32}^2 получено с точностью аналогичной измерениям с исчезновением ускорительных нейтрино. Сила методики, использующей сравнение исчезновения реакторных $\bar{\nu}_e$ в ближних и дальних детекторах, заключается в том, что она не имеет многих неопределенностей, свойственных другим методам. Реактор рождает $\bar{\nu}_e$ без примеси других ароматов. Этот же аромат детектируется. $\bar{\nu}_e$ регистрируется в результате только одного хорошо изученного процесса взаимодействия – ОБР, и небольшая неопределенность в сечении этого процесса сокращается при сравнении наблюдаемых чисел событий в дальних и ближних детекторах. Связь наблюдаемого взаимодействия и энергии антинейтрино не требует детального моделирования и может быть оценена аналитиче-

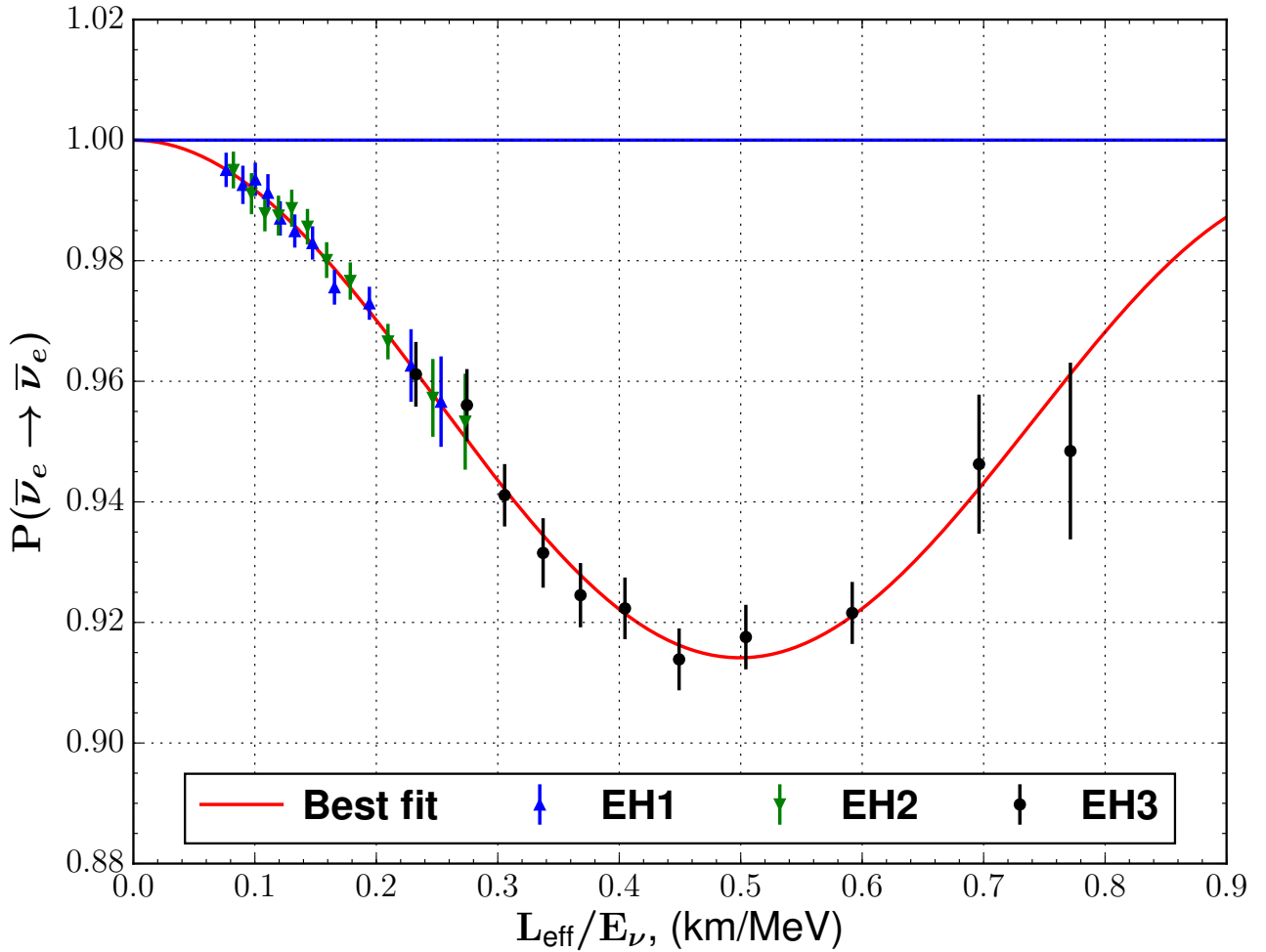


Рисунок 8.9 — Измеренное искажение спектра энергии реакторных $\bar{\nu}_e$, проиллюстрированное как вероятность выживания $\bar{\nu}_e$ как функция L_{eff}/E_ν . Эффективное расстояние L_{eff} оценивается для каждого экспериментального холла с учетом распределения реакторов, дающих вклад в наблюдаемое число событий согласно ур. (8.34). Средняя энергия $\bar{\nu}_e$, $\langle E_\nu \rangle$, оценивается в каждом интервале реконструированной энергии позитрона с использованием модели отклика детектора. Вероятность исчезновения $\bar{\nu}_e$ в каждом интервале реконструированной энергии позитрона дается отношением наблюдаемого числа событий (за вычетом фоновых событий) к предсказанию в предположении отсутствия осцилляций. В доступном измерению интервале L_{eff}/E_ν наблюдается почти полный цикл исчезновения и появления вновь $\bar{\nu}_e$.

ски. Таким образом, измерения с реакторными $\bar{\nu}_e$ надежны даже при потенциальной возможности неучтенных систематических неопределенностей, часто встречающихся в истории нейтринной физики.

Эксперименты Double-CHOOZ и RENO также использовали исчезновение реакторных $\bar{\nu}_e$ в их измерениях. Измерение, представленное тут, имеет преимущество, заключающееся в большем потоке реакторных $\bar{\nu}_e$, большей массе мишени, дальних детекторах, расположенных ближе к осцилляционному минимуму, меньшей неопределенности фоновых событий и в нескольких рядом расположенных детекторах, что позволило подтвердить правильность оценки относительной эффективности детекторов. Краткая сводка ключевых аспектов трех реакторных экспериментов, измеривших θ_{13} с использованием исчезновения реакторных $\bar{\nu}_e$, приведена в таб. 16.

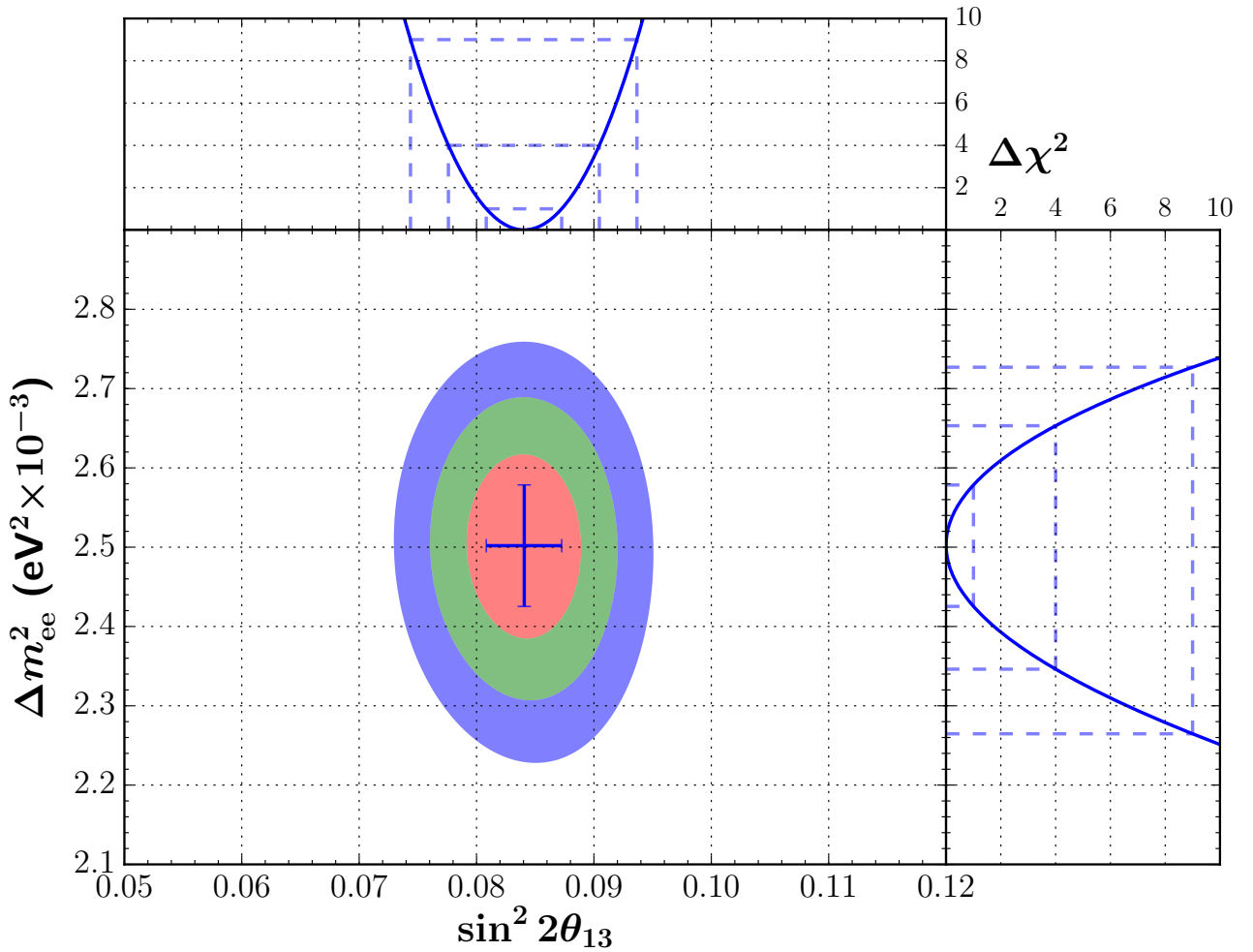


Рисунок 8.10 — Двумерный доверительный интервал для Δm_{ee}^2 и $\sin^2 2\theta_{13}$ получен из сравнения числа $\bar{\nu}_e$ взаимодействий и формы спектра позитронов в дальних детекторах относительно ближних. Контуры, соответствующие стандартным отклонениям в 1σ , 2σ и 3σ , получены при использовании значений $\Delta\chi^2$ равных 2.30 (красная линия), 6.18 (зеленая) и 11.83 (синяя) относительно наилучшей оценки параметров. Верхний рисунок соответствует одномерному распределению $\Delta\chi^2$ относительно $\sin^2 2\theta_{13}$, полученному профилированием по параметру $|\Delta m_{ee}^2|$ (синяя сплошная линия), пунктирная линия отмечает уровни, соответствующие стандартным отклонениям в 1σ , 2σ и 3σ . Правый рисунок определен аналогично, но для параметра $|\Delta m_{ee}^2|$, профилированием по параметру $\sin^2 2\theta_{13}$. Точка с ошибками показывает наилучшую оценку параметров. Ошибки соответствуют одномерному уровню достоверности в 1σ .

8.5.3 Измерение спектра реакторных антинейтрино

На рис. 8.13 приведены результаты измерения 15 коэффициентов n_i , учитывающих возможные отклонения измеренного спектра реакторных антинейтрино от модели Huber+Mueller [226; 236]. Результат фита находится в хорошем согласии с независимым измерением спектра в эксперименте Daya Bay [225].

На рис. 8.14 приведена оценка корреляционной матрицы параметров подгонки $\sin^2 2\theta_{13}$, Δm_{32}^2 , n_i . Тот же, но с исключенными значениями корреляции $C < 0.2$ приведено на рис. 8.15.

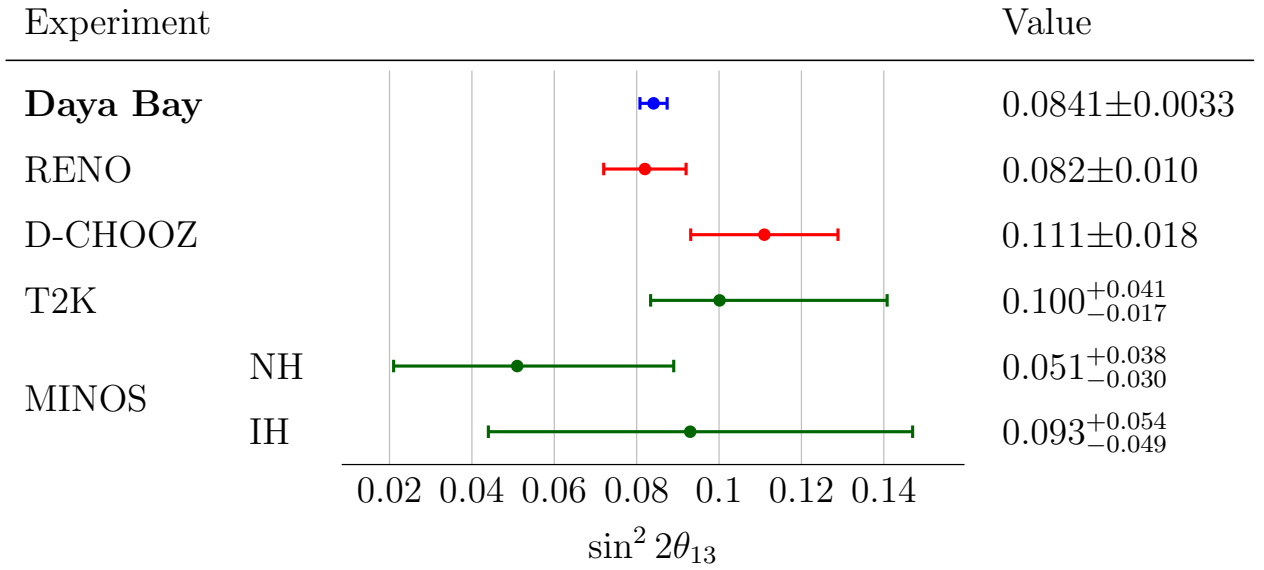


Рисунок 8.11 — Сравнение результатов настоящего измерения $\sin^2 2\theta_{13}$ (синяя точка) с другими измерениями. Эксперименты RENO [280] и Double-CHOOZ [281] также оценили $\sin^2 2\theta_{13}$ из наблюдения исчезновения реакторных $\bar{\nu}_e$ (красные точки). Эксперименты T2K [202] и MINOS [282] наблюдали появление ν_e в пучках ускорительных $\mu\mu$. Этот канал чувствителен к комбинации $2 \sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13}$ (зеленые точки). Измерения MINOS [282] представлены для двух случаев: нормальной и обратной иерархии масс нейтрино в предположении $\sin^2 \theta_{23} = 0.5$, $\delta_{CP} = 0$. Измерение T2K [202] использовало профилирование по этим неизвестным параметрам.

	$N_{\text{реак}}$	Реакторы		Расстояние [км]		Глубина [м.в.э.]		$\bar{\nu}_e$ Мишень [тонн]		Сигнал [день ⁻¹]		Фон [%]	
		Мощность [GW_{th}]	Ближний	Дальний	Ближний	Дальний	Ближний	Дальний	Ближний	Дальний	Ближний	Дальний	
Double CHOOZ [281]	2	8.5	0.400	1.05	120	300	8.3	8.3	289.3	38.1	3.0 ± 0.5	$4.3^{+1.1}_{-0.4}$	
RENO [280]	6	16.8	0.408	1.444	120	450	16	16	616.7	61.2	2.8 ± 0.1	5.1 ± 0.4	
Daya Bay	6	17.4	0.512	1.579	250	860	40	80	1058.5	285.2	1.8 ± 0.2	1.9 ± 0.1	
			0.561		265		40		998.2		1.5 ± 0.1		

Таблица 16 — Краткая сводка ключевых аспектов трех реакторных экспериментов, измеривших $\sin^2 2\theta_{13}$ с использованием исчезновения реакторных $\bar{\nu}_e$.

8.5.4 Бюджет ошибок

Хотя не существует строгого метода разделения доверительного интервала на статистические и систематические неопределенности, желание получить оценку таких вкладов часто присутствует. Например, при принятии решения о целесообразности продолжения набора статистики. В этой работе используются два метода такого разделения, и в качестве результата приводится их арифметическое среднее. Вместо данных в программу подгонки подставляется модельное ожидание без флуктуаций. Далее, вклад источника систематики оценивается двумя способами.

Статистика+систематика. В этом методе сначала вычисляется вклад от статистической неопределенности $\sigma_{\text{стат}}$ без учета систематических неопределенностей. Затем каждый источник с индексом i добавляется независимо по одному и вычисляется итоговая ошибка

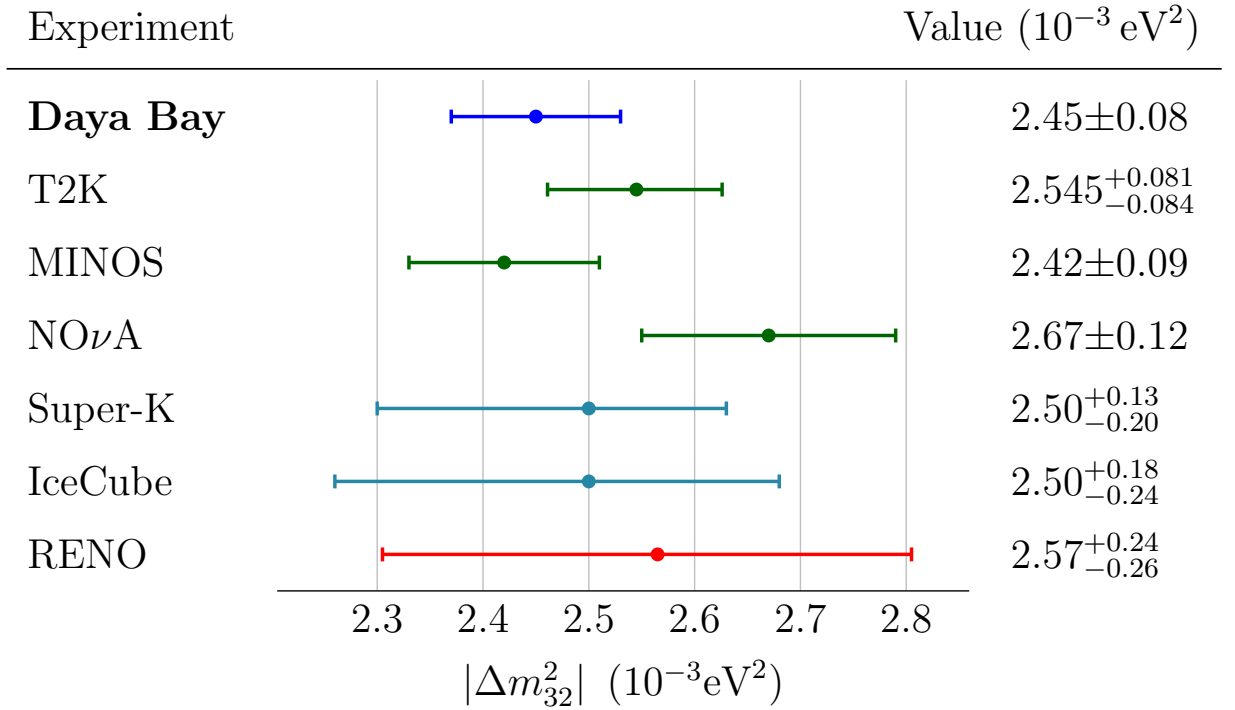


Рисунок 8.12 — Сравнение результатов настоящего измерения Δm_{32}^2 (синяя точка) с другими измерениями. Все значения даны для случая нормальной иерархии масс; сравнение для обратной иерархии аналогичны. Эксперименты T2K [283], MINOS [284] и NO ν A [285] определили Δm_{32}^2 из исчезновения ускорительных ν_μ (зеленые точки). Эксперименты Super-Kamiokande [286] и IceCube [287] измерили Δm_{32}^2 из исчезновения атмосферных ν_μ (точки сине-зеленого цвета). Измерения эксперимента RENO [280] получено из исчезновения реакторных $\bar{\nu}_e$ (красная точка).

$\sigma_{\text{стат},i}$. Вклад от источника систематической неопределенности с индексом i вычисляется согласно $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{\text{стат}}^2 - \sigma_{\text{стат},i}^2}$.

Полная ошибка-систематика. В этом методе вычисляется полная ошибка $\sigma_{\text{полн}}$ с учетом статистических и систематических неопределенностей. Затем вычитается один источник систематической неопределенности с индексом i и вычисляется новая ошибка $\sigma_{\text{полн},i}$. Вклад от источника систематической неопределенности с индексом i вычисляется согласно $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{\text{полн}}^2 - \sigma_{\text{полн},i}^2}$.

На рис.8.16 приведена оценка бюджета ошибок. Точность представленного измерения $\sin^2 2\theta_{13}$ ограничена статистикой, хотя систематические неопределенности в относительной эффективности детектирования и предсказанного потока от реактора также вносят заметный вклад. В точность оценки $|\Delta m_{ee}^2|$ статистические и систематические неопределенности вносят примерно одинаковый вклад. Наибольшая систематическая неопределенность в определении $|\Delta m_{ee}^2|$ происходит от возможной вариации калибровки энергии в дальних детекторах относительно ближних, что надежно контролируется избыточными измерениями с радиоактивными источниками низких энергий. Систематические неопределенности от взаимодействий $\bar{\nu}_e$ в IAV также вносят свой вклад.

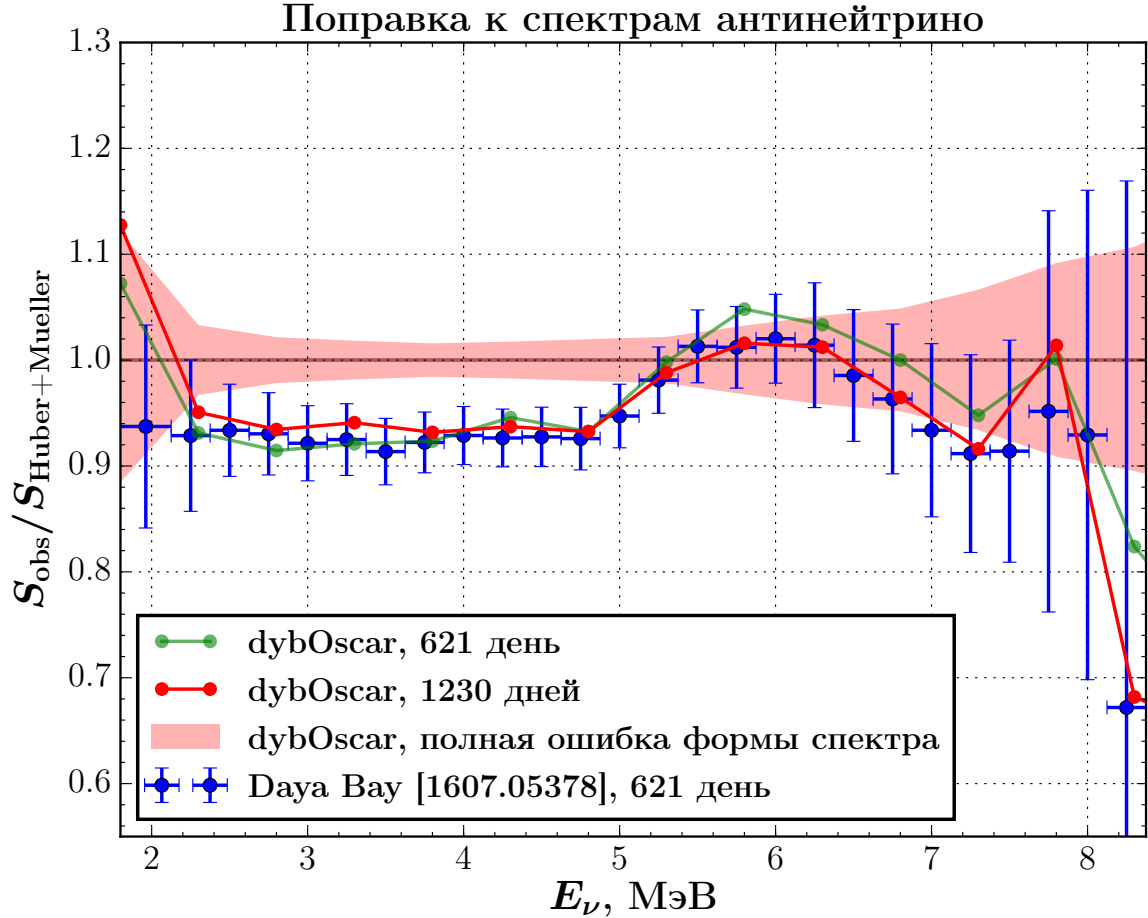


Рисунок 8.13 — Результаты измерения 15 коэффициентов n_i , учитывающих возможные отклонения измеренного спектра реакторных антинейтрино от модели Huber+Mueller [226; 236]. Результат фита находится в хорошем согласии с независимым измерением спектра в эксперименте Daya Bay [225].

8.5.5 Ограничение на дисперсию импульса волнового пакета нейтрино

Как обсуждалось части II настоящей работы, формула для вероятности осцилляций нейтрино, приведенная в ур. (6.2) для выживания электронного нейтрино, получена в плосковолновом приближении. Хотя это приближение хорошо описывает существующие экспериментальные данные, оно не самосогласованно и требуется более общий подход к вопросу осцилляций нейтрино. Примером такого подхода является модель с волновым пакетом, в подробностях рассмотренная во второй части этой диссертации. Волновой пакет нейтрино характеризуется дисперсией импульса σ_p , учитывающей процессы рождения и детектирования нейтрино.

Дисперсия импульса σ_p определяется квантовыми процессами рождения и детектирования нейтрино и не сводится к разрешению детектора по энергии, которое мы обозначим в этом разделе как δ_E . Хотя для относительно больших значений $\sigma_p \simeq \delta_E$, эффекты от этих двух параметров на искажение энергетического спектра могут выглядеть очень похожими, они отличаются друг от друга. Во-первых, у этих параметров разное физическое происхождение: в то время как σ_p определяется наиболее локализованной частицей в процессах рождения и детектирования, δ_E дает

Correlation matrix

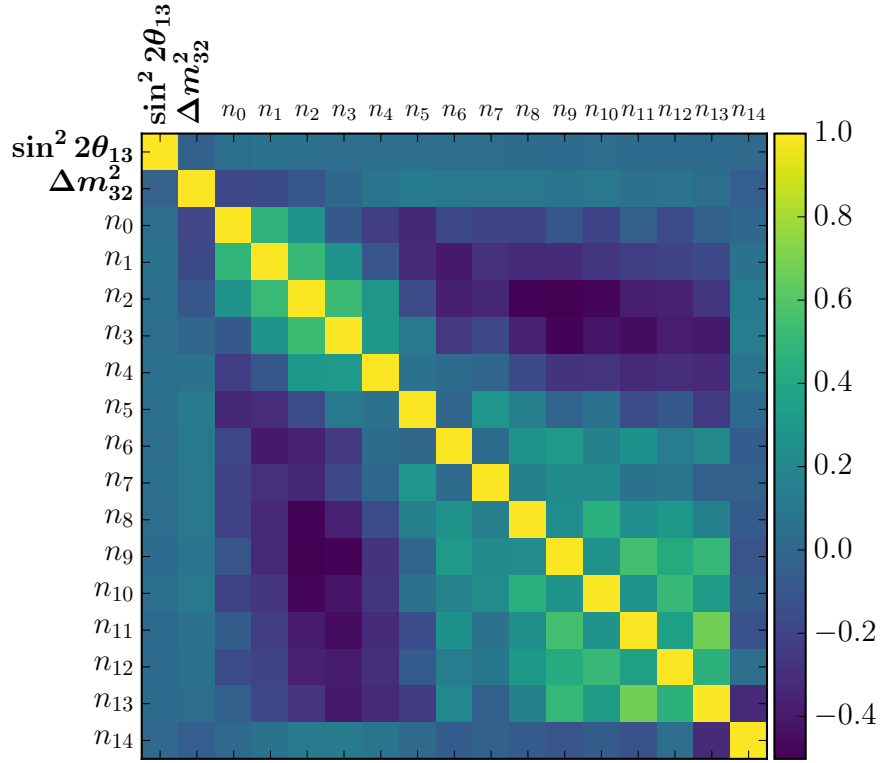


Рисунок 8.14 — Оценка корреляционной матрицы параметров подгонки $\sin^2 2\theta_{13}$, Δm_{32}^2 , n_i .

ся выделениями энергии частиц в конечном состоянии. Во-вторых, эти эффекты отличаются по времени появления, поскольку микроскопические процессы, используемые для оценки энергии, происходят позже по времени относительно времени детектирования нейтрино в детекторе. В третьих, эти эффекты не идентичны. В частности, предел $\sigma_p \rightarrow 0$ ведет к декогеренции нейтринных осцилляций в отличие от влияния параметра δ_E , который в пределе $\delta_E \rightarrow 0$ приводит к отсутствию размывания в реконструированном спектре энергии.

Проиллюстрируем аналитически взаимосвязь влияния параметров σ_p и δ_E . Для этого рассмотрим экспоненциальный множитель в вероятности выживания, свернутый с гауссовой функцией разрешения энергии, как функцию реконструированной энергии E_{vis} . Предположим, что $\delta_E \ll p$, а длина дисперсии $L^d = \infty$. Пренебрегая членом с D^2 , а также опуская индексы, нумерующие массовые состояния для краткости ⁴:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_E} \int dp \exp\left(-i 2\pi L/L^{\text{osc}} - (L/L^{\text{coh}})^2 - (p - E_{\text{vis}})^2/2\delta_E^2\right) \\ & \simeq \exp\left(-i 2\pi L/L_{\text{rec}}^{\text{osc}} - (L/L_{\text{eff}}^{\text{coh}})^2\right), \end{aligned} \quad (8.36)$$

где L^{osc} и L^{coh} даны ур. (3.115), ур. (3.116) и эффективная длина когерентности включает в себя внутреннюю дисперсию нейтрино σ_p и разрешение детектора δ_E :

$$\left(\frac{1}{L_{\text{eff}}^{\text{coh}}}\right)^2 = \left(\frac{1}{L_{\text{rec}}^{\text{coh}}}\right)^2 + \left(\frac{1}{L_{\text{det}}^{\text{coh}}}\right)^2, \quad (8.37)$$

⁴действительный учет детекторных эффектов был выполнен численно в точности также, как и в случае с плоско-волновым анализом

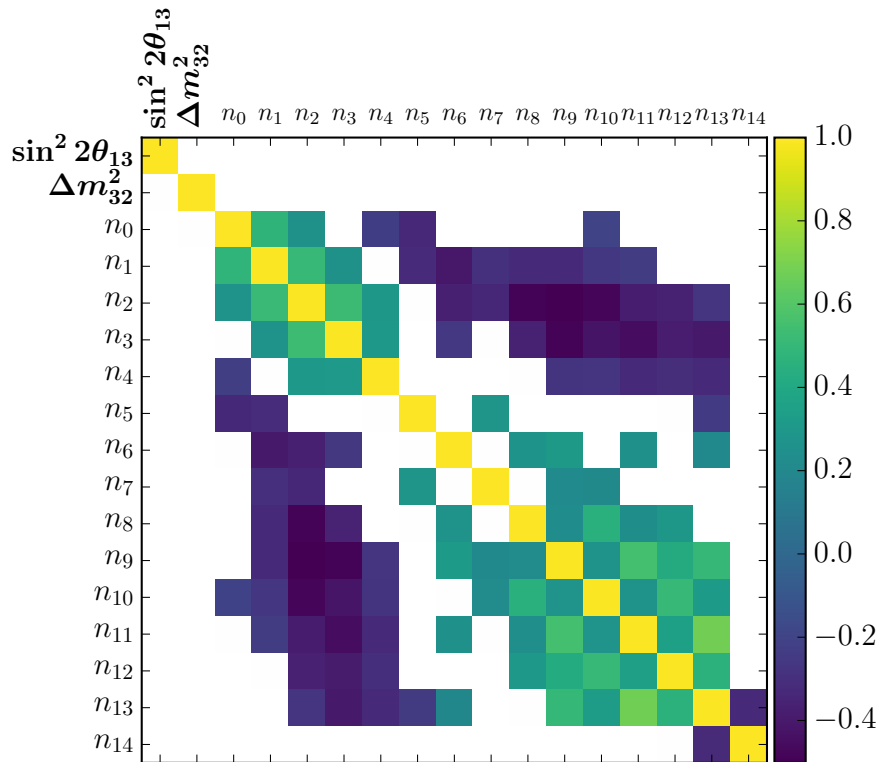
Correlation matrix ($|C_{ij}| \geq 0.20$)

Рисунок 8.15 — Оценка корреляционной матрицы параметров подгонки $\sin^2 2\theta_{13}$, Δm_{32}^2 , n_i . Значения корреляции $C < 0.2$ исключены.

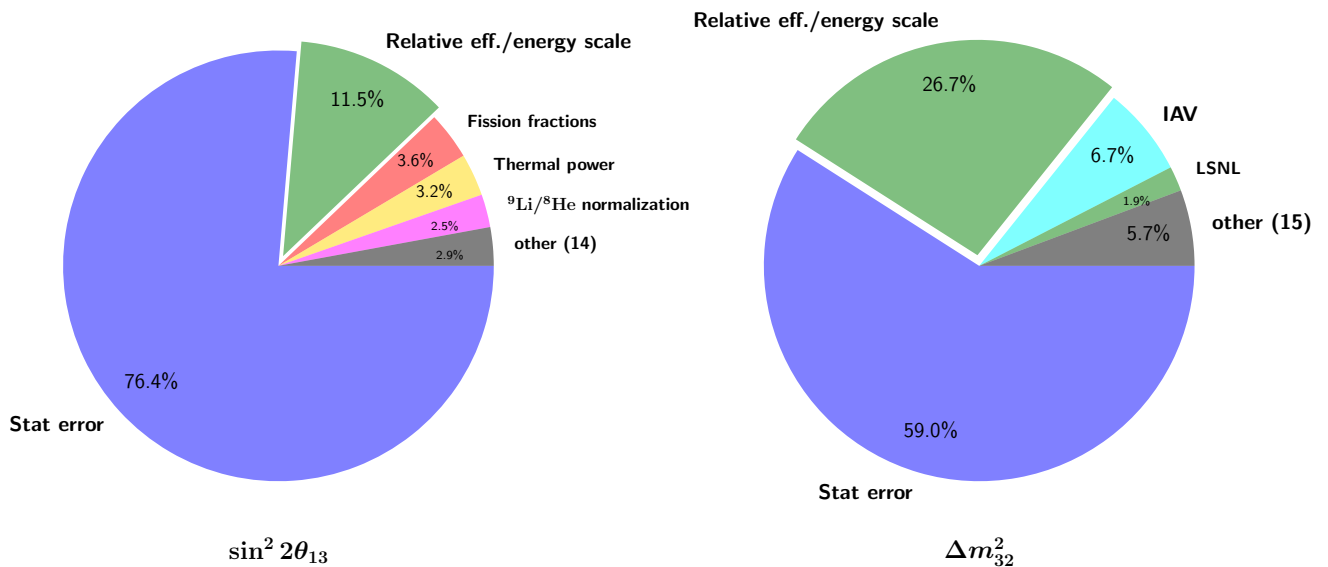


Рисунок 8.16 — Бюджет ошибок в измерении $\sin^2 2\theta_{13}$, Δm_{32}^2 .

где $L_{\text{rec}}^{\text{osc}}$ и $L_{\text{rec}}^{\text{coh}}$ даны формулами для L^{osc} и L^{coh} с заменой p на E_{vis} , и $L_{\text{det}}^{\text{coh}}$ дается формулой для $L_{\text{rec}}^{\text{coh}}$, с заменой σ_p на δ_E . Взаимосвязь параметров σ_p и δ_E иллюстрируется эффективной длиной когерентности $L_{\text{eff}}^{\text{coh}}$, которая определяется наименьшей длиной среди $L_{\text{rec}}^{\text{coh}}$ и $L_{\text{det}}^{\text{coh}}$ или наибольшей среди σ_p и δ_E .

Дадим сначала простые оценки для влияния волнового пакета нейтрино на нейтринные осцилляции в эксперименте Daya Bay. Для характерного импульса взаимодействующего нейтрино $p = 4$ МэВ, осцилляции подавлены для двух разных областей параметра $\sigma_{\text{rel}} = \sigma_p/p$. Область $\sigma_{\text{rel}} \gtrsim O(0.1)$ соответствует заметному вкладу от L -зависящих членов, подавляющих осцилляции нейтрино, и поправок к фазе осцилляций φ_{32}^d в ур. (3.112), в то время как член с D_{kj}^2 пренебрежимо мал. Например, при $L = L_{32}^{\text{osc}}/2$ экспоненциальное подавление достигает максимума $e^{-\pi/8}$ при $\sigma_{\text{rel}} = 1/\sqrt{2\pi} \simeq 0.4$. Соответственно, в этом примере длины когерентности и дисперсии — $L_{32}^{\text{coh}} \simeq 2.2$ км и $L_{32}^d \simeq 2$ км. При больших значениях σ_{rel} и фиксированном расстоянии, пространственная дисперсия волновых пакетов частично компенсирует потерю когерентности из-за потери перекрытия волновых пакетов ν_k и ν_j .

Область $\sigma_{\text{rel}} \lesssim O(2.8 \cdot 10^{-17})$ соответствует $D_{32}^2 \gtrsim 1$, что заметно для подавления интерференции в ур. (3.112) через L -независящий член, в то время как L -зависящие члены малы. Таким образом, область $O(2.8 \cdot 10^{-17}) \ll \sigma_{\text{rel}} \ll O(0.1)$ соответствует области параметра σ_{rel} для которой влияние волнового пакета на осцилляции нейтрино в эксперименте Daya Bay ничтожно мало.

Для иллюстрации на рис. 8.17 приведено отношение наблюдаемого числа ОБР к ожидаемому, в предположении отсутствия осцилляций, с использованием данных, накопленных за 621 день работы эксперимента в ближних и дальних детекторах, как функции реконструированной энергии E_{vis} . На этом же рисунке показаны также ожидаемые отношения в плосковолновой модели нейтринных осцилляций и в модели с волновым пакетом для двух значений параметра σ_{rel} , равных 0.33 и $8 \cdot 10^{-17}$, взятых в качестве примера. Результаты обеих моделей приведены при величинах осцилляционных параметров, фиксированных в наилучших значениях, полученных в рамках плосковолновой модели нейтринных осцилляций⁵. Для этого набора параметров, модель с волновым пакетом при значениях $\sigma_{\text{rel}} = 0.33$ и $\sigma_{\text{rel}} = 8 \cdot 10^{-17}$ не согласуется с данными на уровне пяти стандартных отклонений, что и мотивировало выбор этих значений. Также верхний и нижний рисунки иллюстрируют, как спектр реконструированной энергии позитрона меняется в ближних и дальнем холлах в зависимости от дисперсии импульса нейтринного волнового пакета. В основном, изменения в спектрах за счет σ_{rel} антикоррелируют для ближних и дальних детекторов, что качественно можно объяснить следующим образом. Как обсуждается в части II, пределы $\sigma_p \rightarrow 0$ и $\sigma_p \rightarrow \infty$ приводят к полностью декогерентным нейтрино с вероятностью из ур. (3.124). Антинейтрино, взаимодействующие в ближних детекторах, испытывают относительно небольшой эффект осцилляций в плосковолновом приближении. Выбранные для рис. 8.17 значения параметра σ_{rel} приводят к частичной декогерентности антинейтрино и P_{ee} стремится к ур. (3.124), предсказывая *меньшее* число выживших $\bar{\nu}_e$ по сравнению с плосковолновой формулой. Расстояния, на которых расположены дальние детекторы в эксперименте Daya Bay, оптимизированы для наблюдения максимального эффекта от нейтринных осцилляций из-за Δm_{32}^2 . Частичная декогерентность антинейтрино стремится уменьшить эффект осцилляций, таким образом, предсказывая *большее* число выживших антинейтрино по сравнению с плосковолновой формулой. Эта особенность эксперимента Daya Bay добавляет чувствительности к эффектам декогерентности и делает такое исследование менее чувствительным к неопределенностям в предсказании потока $\bar{\nu}_e$.

⁵Следующие значения осцилляционных параметров были использованы при расчетах: $\Delta m_{21}^2 = 7.53 \cdot 10^{-5}$ eV², $\Delta m_{32}^2 = 2.45 \cdot 10^{-3}$ eV², $\sin^2 2\theta_{12} = 0.846$, $\sin^2 2\theta_{13} = 0.0852$.

Данные могут быть писаны следующими наборами параметров

$$\begin{aligned} \Delta m_{32}^2 &= 2.17 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2, & \sin^2 2\theta_{13} &= 0.102, \\ \sigma_{\text{rel}} &= 8 \cdot 10^{-17}, & \chi^2/\text{ndf} &= 246.8/(256 - 4), \end{aligned} \quad (8.38)$$

и

$$\begin{aligned} \Delta m_{32}^2 &= 2.16 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2, & \sin^2 2\theta_{13} &= 0.097, \\ \sigma_{\text{rel}} &= 0.33, & \chi^2/\text{ndf} &= 253.8/(256 - 4). \end{aligned} \quad (8.39)$$

Эти результаты демонстрируют, что можно получить разумное описание данных в рамках модели с волновым пакетом для некоторых значений фиксированных σ_{rel} и дать отличную оценку осцилляционным параметрам по сравнению с результатами в рамках плосковолновой модели ⁶:

$$\begin{aligned} \Delta m_{32}^2 &= 2.45 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2, & \sin^2 2\theta_{13} &= 0.0852, \\ \chi^2/\text{ndf} &= 245.9/(256 - 3). \end{aligned} \quad (8.40)$$

Однако, уравнения (8.38), (8.39) не соответствуют глобальному минимуму χ^2 , поскольку значения σ_{rel} были зафиксированы в двух произвольных значениях в иллюстративных целях. Чтобы найти глобальный минимум, был применен статистический анализ всей области изменения σ_{rel} . Использовались два метода анализа: метод основанный на сравнении $\Delta\chi^2$ с фиксированным значением аналогично тому как были получены результаты в разделах 8.5.1 и 8.5.2, и метод Фельдмана-Казинса, не предполагающий асимптотической формы $\Delta\chi^2$ распределения.

На рис. 8.18 приведены разрешенные области $(\Delta m_{32}^2, \sigma_{\text{rel}})$ и $(\sin^2 2\theta_{13}, \sigma_{\text{rel}})$, полученные двумя статистическими методами, которые дали близкие результаты. Для значений $\sigma_{\text{rel}} \lesssim 10^{-16}$ эффекты декогеренции приводят к сильной корреляции оценок Δm_{32}^2 , $\sin^2 2\theta_{13}$ и σ_{rel} , приводя к меньшим значениям Δm_{32}^2 и бóльшим $\sin^2 2\theta_{13}$. Для $\sigma_{\text{rel}} \gtrsim O(0.1)$ корреляции оказались гораздо меньше. Наилучшая оценка соответствует

$$\begin{aligned} \Delta m_{32}^2 &= 1.59 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2, & \sin^2 2\theta_{13} &= 0.160, \\ \sigma_{\text{rel}} &= 4.0 \cdot 10^{-17}, & \chi^2/\text{ndf} &= 245.9/(256 - 4), \end{aligned} \quad (8.41)$$

с вероятностью наблюдаемого значения $\chi^2 = 245.9$ при $\text{ndf} = 252$ равной 0.596, что меньше аналогичной вероятности равной 0.614 для плосковолновой модели из ур. (8.40). Поэтому, найденный минимум статистически незначим. Разрешенная область параметра σ_{rel} на 95% У.Д.:

$$2.38 \cdot 10^{-17} < \sigma_{\text{rel}} < 0.23. \quad (8.42)$$

Верхний предел ур. (8.42) соответствует $L_{32}^{\text{coh}} > 1.94 L_{32}^{\text{osc}}/2$ и $L_{32}^{\text{d}} > 2.96 L_{32}^{\text{osc}}/2$. Нижний предел можно интерпретировать в терминах длины σ_x , соответствующей пространственной ширине волнового пакета с учетом областей рождения и детектирования. Взяв средний импульс взаимодействующего антинейтрино $p = 4$ МэВ, нижний предел ур. (8.42) исключает $\sigma_x \gtrsim 1$ км. Данные Daya Bay не обладают достаточной чувствительностью, чтобы ограничить член с D_{kj}^2 значительно лучше полученного нижнего предела.

⁶Наилучшие значения осцилляционных параметров $\sin^2 2\theta_{13}$ и Δm_{32}^2 отличаются от результатов публикации [288] из-за другого учета систематических неопределенностей и другого выбора энергетических интервалов по переменной E_{vis} .

Таким образом, нижний предел гораздо слабее очевидного ограничения $\sigma_x \lesssim 2$ м, следующего из того, что дисперсия σ_x (равная $1/2\sigma_p$) волнового пакета $\bar{\nu}_e$, взаимодействующего в эксперименте Daya Bay, не может превышать размеры ядра реактора и детектора. С учетом этого ограничения $\sigma_p \gtrsim 5 \cdot 10^{-8}$ эВ, что для среднего импульса $p = 4$ МэВ означает $\sigma_{\text{rel}} \gtrsim 10^{-14}$. Такие значения σ_{rel} соответствуют режиму, когда $D_{kj}^2 \ll 1$ и локализационным членом можно пренебречь, что позволяет поставить верхний предел:

$$\sigma_{\text{rel}} < 0.20, \text{ на } 95\% \text{ У.Д.} \quad (8.43)$$

Итак, в результате анализа, впервые получены ограничения на внутреннюю дисперсию волнового пакета антинейтрино $2.38 \cdot 10^{-17} < \sigma_{\text{rel}} < 0.23$. С учетом размером ядра реактора и детектора, нижний предел $\sigma_{\text{rel}} > 10^{-14}$ соответствует случаю, когда локализационным членом можно пренебречь, что позволяет поставить верхний предел $\sigma_{\text{rel}} < 0.20$ на 95% У.Д.. Полученные пределы можно перевести в координатное пространство: 10^{-11} см $\lesssim \sigma_x \lesssim 2$ м.

Текущие пределы ограничены статистическими флуктуациями. Влияние волнового пакета, разрешенное полученными ограничениями, незначительно для данных эксперимента Daya Bay, что гарантирует несмещенную оценку осцилляционных параметров $\sin^2 2\theta_{13}$ и Δm_{32}^2 , полученную в плосковолновой модели в настоящей работе. Представленные в этом разделе результаты нашего анализа данных Daya Bay в модели волнового пакета нейтрино отражены в работе [176].

8.6 Заключение к главе

Обсуждение начинается с краткого введения, в котором напоминает об устройстве эксперимента – положении ядерных реакторов и о том, какие изотопы дают наибольший вклад в рождение реакторных антинейтрино. Затем мы обсуждаем вопрос о том, как контролируется действительная мощность реактора и как эволюционирует изотопный состав топлива. Далее мы обсуждаем методы вычисления энергетического спектра реакторных антинейтрино. Кроме четырех главных изотопов, дающих наибольший вклад в число наблюдаемых антинейтрино, мы учитываем в нашем анализе так называемую неравновесную поправку к спектрам, полученным методом конверсии (также обсуждаемой в этой главе). В конце цикла работы реактора, длительностью как правило 1 год, примерно треть топливных стержней извлекается и перемещается в бассейн, находящийся недалеко от реактора, где хранится длительное время, порядка пяти лет. Вклад отработанного топлива, который по порядку величины не превышает 0.3% от ожидаемого от работающего реактора, также учитывается в нашем анализе.

Кратко упоминаются две “реакторные аномалии”:

- завышенные, примерно на 6% теоретические ожидания потока антинейтрино, по сравнению с результатами наблюдений,
- искажение в спектре антинейтрино в области 6 МэВ.

В связи с этими аномалиями особенно актуальным становится вопрос о методе измерения значений осцилляционных параметров, минимальным образом зависящем от возможных неопреде-

ленностей в знании спектров антинейтрино от реактора и/или сечений взаимодействия. Метод относительного измерения, используемый в эксперименте Daya Bay, отвечает таким требованиям.

Далее, мы приводим результаты расчета сечения обратного бета-распада [262], используемого в нашем анализе.

Затем, обсуждается ожидаемое число взаимодействий антинейтрино. Учитывается угловое распределение позитронов в конечном состоянии. Формализм учитывает соответствующий якобиан, упущенный из виду в других работах на эту тему. Обсуждается метод учета отклика детектора.

Отдельный раздел посвящен статистическому анализу, в котором обсуждаются вопросы связи метода χ^2 со штрафными членами с приближением χ^2 с ковариационной матрицей, учет систематических неопределенностей, построение интервалов приемки и доверительных интервалов, а также метод проецирования многомерных доверительных интервалов на пространство меньшей размерности. Завершается раздел обсуждением конкретной реализации методов статистического анализа в эксперименте Daya Bay.

В следующем разделе мы обсуждаем методы учета систематических неопределенностей в осцилляционном анализе эксперимента Daya Bay. Чтобы учесть неопределенности в нормировке и форме спектра реакторных антинейтрино нами была использована кусочно-гладкая параметризация спектра со свободными параметрами, также подгоняемыми в процессе минимизации соответствующего χ^2 . Кратко обсуждается пакет программ `dybOscar`, развитый нашей дубненской группой для осцилляционного анализа, и используемый для получения официальных результатов коллаборации Daya Bay.

Далее, мы приводим и обсуждаем полученные результаты.

- измерение амплитуды осцилляций $\sin^2 2\theta_{13}$ на основе полного числа событий;
- измерение значений $\sin^2 2\theta_{13}$ и Δm_{32}^2 на основе измеренных чисел событий взаимодействия антинейтрино и их энергетических спектров;
- измерение спектра реакторных антинейтрино.

Результаты измерений сравниваются с результатами других экспериментов с реакторными, ускорительными и атмосферными нейтрино. Точность измерения $\sin^2 2\theta_{13}$ экспериментом Daya Bay является наилучшей. Точность измерений Δm_{32}^2 сравнима с текущей точностью измерений в ускорительных экспериментах.

Достигнутая точность измерений исследуется в следующем разделе с точки зрения вкладов различных источников неопределенности. Заключаем, что точность текущего результата все еще определяется статистической неопределенностью, что позволяет рассчитывать на дальнейшее увеличение точности измерений $\sin^2 2\theta_{13}$ и Δm_{32}^2 к концу 2020 года, когда ожидается завершение набора данных эксперимента Daya Bay.

Наконец, глава завершается обсуждением результатов осцилляционного анализа экспериментальных данных Daya Bay в модели волнового пакета, разработанной в части II настоящей диссертации. Такой анализ выполнен впервые. Получены первые ограничения на параметр дисперсии σ_p .

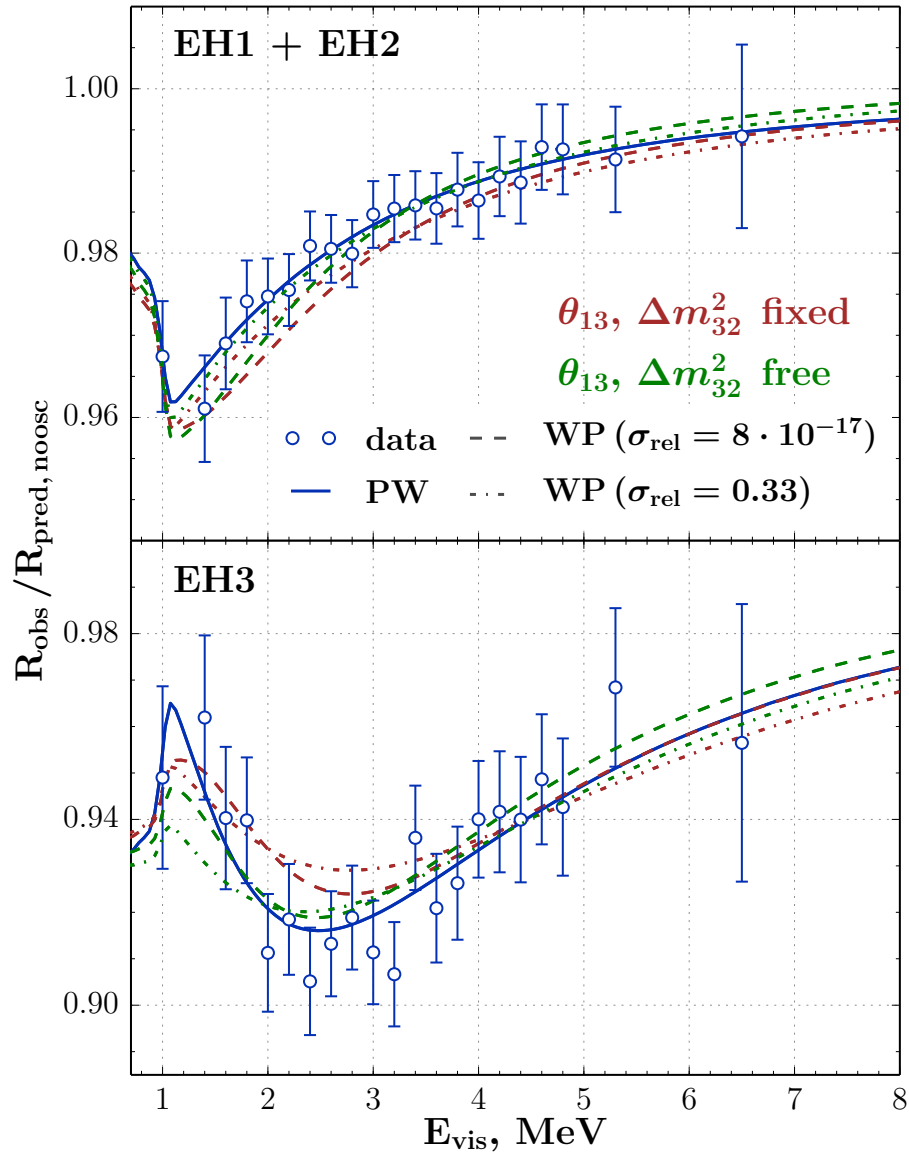


Рисунок 8.17 — Отношение наблюдаемого числа событий ОБР к ожидаемому в отсутствии осцилляций, в зависимости от реконструированной видимой энергии E_{vis} . Данные сгруппированные для ближних (ЕН1+ЕН2) и дальних (ЕН3) экспериментальных холлов, показаны на верхнем и нижнем рисунках, соответственно. Ошибки соответствуют статистическим неопределенностям. Сплошные линии – отношения предсказания модели в предположении нейтринных осцилляций в плосковолновом приближении (PW) с лучшими значениями параметров $\sin^2 2\theta_{13}$ и Δm_{32}^2 , полученными также в плосковолновой модели, к модели без нейтринных осцилляций. Аналогичные отношения для предсказания модели с волновым пакетом к модели без нейтринных осцилляций показаны пунктирной линией для $\sigma_{\text{rel}} = 0.33$ и точно-пунктирной линией для $\sigma_{\text{rel}} = 8 \cdot 10^{-17}$. Выбранные значения параметра $\sigma_{\text{rel}} = 0.33$ взяты в качестве примера. Зеленые линии соответствуют отношениям в модели волнового пакета со значениями параметров $\sin^2 2\theta_{13}$ и Δm_{32}^2 , полученными в плосковолновой модели, что не согласуется с данными на уровне пяти стандартных отклонений. Красные линии соответствуют отношениям в модели волнового пакета со значениями параметров $\sin^2 2\theta_{13}$ и Δm_{32}^2 , полученными в модели волнового пакета, что гораздо лучше согласуется с наблюдаемым спектром. Все отношения входят в область энергий ниже $2m_e$, что соответствует порогу реакции ОБР из-за эффектов отклика детектора, таких как реконструкция энергии и поглощение в IAV (см. подробности в [205; 288]).

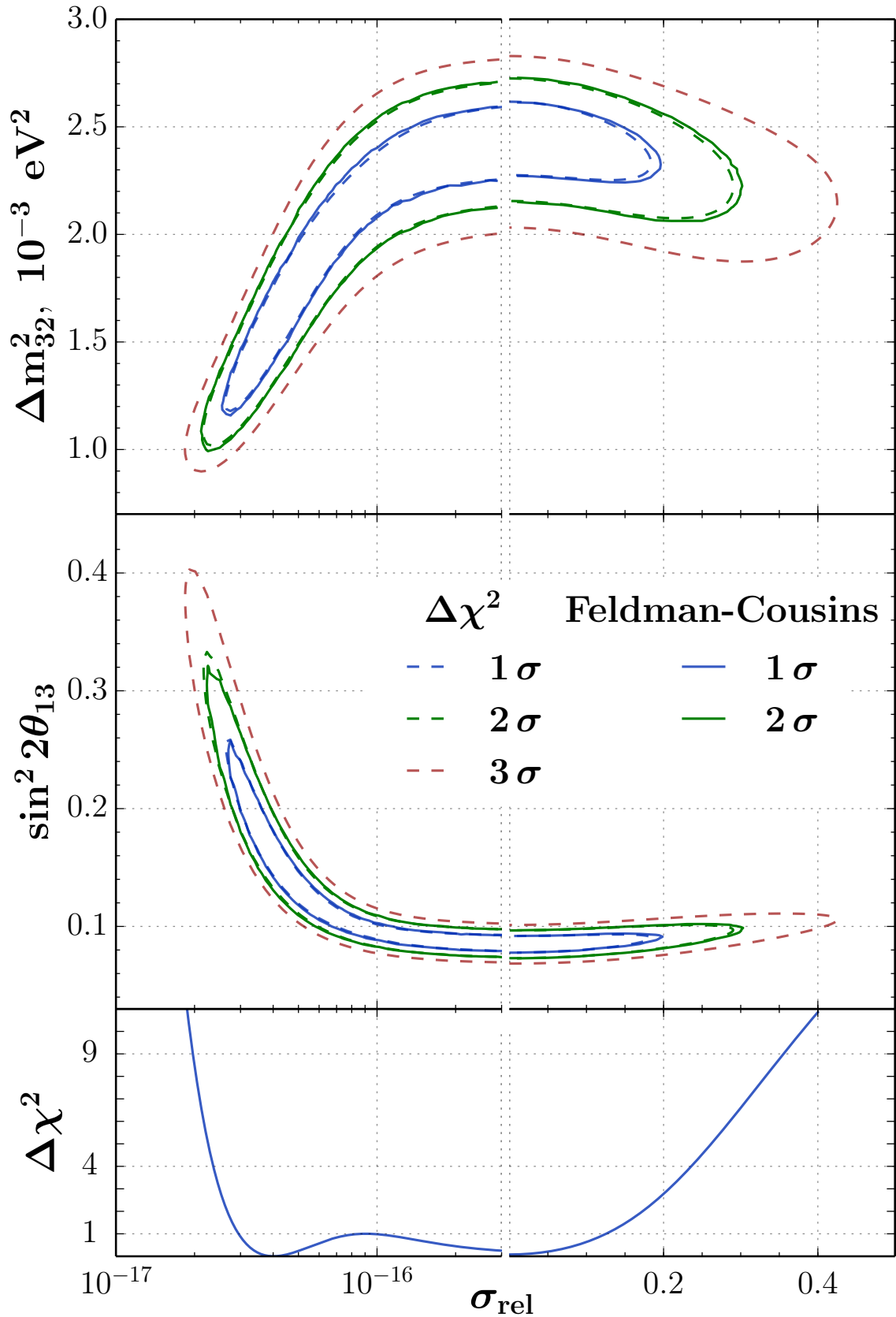


Рисунок 8.18 — Разрешенные области параметров $(\Delta m_{32}^2, \sigma_{\text{rel}})$ (верхний рисунок) и $(\sin^2 2\theta_{13}, \sigma_{\text{rel}})$ (средний рисунок) полученные методом, основанном на сравнении $\Delta\chi^2$ с $\chi_\alpha^2(2)$ в предположении, что $\Delta\chi^2$ распределен как $\chi^2(2)$ (пунктирные линии) и методом Фельдмана-Казинса (сплошные линии). Нижний рисунок показывает маргинализованную функцию $\Delta\chi^2(\sigma_{\text{rel}})$. Абсцисса разделена на две части с логарифмической и линейной шкалами.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем. Исследование осцилляций нейтрино – чувствительный инструмент для изучения смешивания в лептонном секторе и разницы квадратов масс $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ нейтрино. В настоящей диссертации разработана квантовополевая теория нейтринных осцилляций в рамках ковариантного волнового пакета и измерены фундаментальные параметры Стандартной Модели – угол смешивания θ_{13} и разность квадратов масс Δm_{32}^2 в данных эксперимента Daya Bay, детектирующего антинейтрино от реакторов.

Вторая часть диссертации посвящена разработке квантовополевой теории нейтринных осцилляций.

Разработана теория ковариантного волнового пакета и детально исследованы его свойства. В качестве рабочей модели предложен и рассмотрен релятивистский гауссов волновой пакет. В нашей работе показано, что гауссов волновой пакет вида $\propto e^{-(k-p)^2/4\sigma_p^2}$, традиционно используемый при описании нейтринных осцилляций в модели волнового пакета, является нерелятивистским приближением релятивистского гауссова волнового пакета, предложенного в нашей работе.

Исследовано распывание волнового пакета вдоль направления его движения и в плоскости перпендикулярной вектору его средней скорости. Доказано, что поперечное распывание приводит к подавлению вероятности обнаружить волновой пакет на расстоянии $|x|$ от источника его рождения. Плотности потока волнового пакета, проинтегрированной по времени в пределах $(0, \infty)$ отвечает подавление вида $1/4\pi|x|^2$ в системе покоя волнового пакета. Этот результат обеспечивается прозрачной интерпретацией поперечное распывание волнового пакета. Использование релятивистских волновых пакетов в качестве начальных и конечных фоковских состояний в \mathbb{S} -матричной теории позволило вычислить соответствующую вероятность рассеяния

$$dN = d\sigma L e^{-b_T^2/2\sigma_{x,ab}^2},$$

где $d\sigma$ – сечение рассеяния в плосковолновом приближении, L – светимость рассеяния двух волновых пакетов в определении, используемом в теории рассеяния и ускорительной физике, $\sigma_{x,ab}$ – эффективная пространственная дисперсия рассеивающихся волновых пакетов a и b , и b_T – лоренц-инвариантный модуль прицельного вектора, с которым рассеиваются друг на друге a и b .

Вычислена амплитуда $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ “макроскопической” диаграммы, в которой “источник” и “детектор” нейтрино разделены макроскопическим расстоянием; начальные и конечные частицы описываются построенными ковариантными волновыми пакетами; нейтрино – виртуальная частица. В “источнике” и “детекторе” рождаются заряженные лептоны ℓ_α^+ и ℓ_β^- , соответственно. Амплитуда $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ отвечает нарушению лептонного числа, если $\alpha \neq \beta$. Вычисленная амплитуда $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ позволила определить волновую функцию виртуального нейтрино, которая оказалась релятивистским волновым пакетом. Эффективная дисперсия импульса нейтрино зависит от дисперсий импульсов и самих импульсов всех входящих в диаграмму частиц.

Вычислена микроскопическая вероятность $|\mathcal{A}_{\alpha\beta}|^2$. Поскольку каждый волновой пакет характеризуется средней координатой x_κ в момент времени x_κ^0 , средним 4-импульсом p_κ , а также дисперсией импульса σ_κ , то $|\mathcal{A}_{\alpha\beta}|^2$ зависит параметрически от всех параметров $\{x_\kappa, p_\kappa, \sigma_\kappa\}$. Мик-

роскопическая вероятность $|\mathcal{A}_{\alpha\beta}|^2$ – наиболее общий результат нашего вычисления. $|\mathcal{A}_{\alpha\beta}|^2$ содержит подавление, связанное с ненулевыми прицельными векторами рассеивающихся волновых пакетов. В нашей работе прицельный вектор обобщен на четырехмерный случай. Получены явные формулы для соответствующего подавления. Доказана их лоренц-инвариантность.

Чтобы связать вычисленную вероятность $|\mathcal{A}_{\alpha\beta}|^2$ с экспериментально наблюдаемым числом событий $N_{\alpha\beta}$ с ℓ_α^+ в источнике и ℓ_β^- в детекторе, произведено макроскопическое усреднение $|\mathcal{A}_{\alpha\beta}|^2$ по параметрам $\{x_\kappa, p_\kappa\}$. Понятия “источник” и “детектор” обретают свой смысл как области пространства-времени вокруг прицельных точек $X_{s,d}$, определяемых параметрами волновых пакетов $\{x_\kappa, p_\kappa, \sigma_\kappa\}$ в вершинах с рождением ℓ_α^+ и ℓ_β^- , соответственно. Прицельные точки $X_{s,d}$ являются следствием развитого формализма.

Найдены условия, при которых $N_{\alpha\beta}$ может быть представлено в виде интеграла по объемам источника и детектора от произведения трех множителей $\Phi_\nu(E_\nu, L) \times \mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L; \mathfrak{D}) \times \sigma(E_\nu)$. Поток безмассового нейтрино от источника в детектор $\Phi_\nu(E_\nu, L) \propto 1/L^2$, где L – расстояние между точками источника и детектора. $\sigma(E_\nu)$ – сечение рассеяния безмассового нейтрино в детекторе. Лоренц-инвариантность $N_{\alpha\beta}$ требует ковариантности волновых пакетов, отвечающих внешним частицам.

Множитель $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$, зависящий от флэйворных индексов α, β , энергии нейтрино, эффективного расстояния между источником и детектором и дисперсии энергии-импульса нейтрино \mathfrak{D} , является обобщением квантовомеханической вероятности осцилляций нейтрино

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{\mathfrak{D}}{\tau_d}} \int_{y_1^0}^{y_2^0} dy^0 \int_{x_1^0}^{x_2^0} dx^0 \left| \sum_j V_{\alpha j}^* V_{\beta j} e^{-\Omega_j} \frac{1}{1 + i\mathbf{r}_j} \right|^2,$$

где (x_1^0, x_2^0) – время работы источника, а (y_1^0, y_2^0) – время работы детектора. Вычисляя интеграл по конечным интервалам времени и пренебрегая дисперсией волнового пакета нейтрино в конфигурационном пространстве, получена формула для $P_{\alpha\beta}(E_\nu, L) \equiv \frac{1}{S_0} \mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L)$

$$P_{\alpha\beta}(E_\nu, L) = \frac{1}{S_0} \sum_{ij} V_{\alpha i} V_{\beta j} V_{\alpha j}^* V_{\beta i}^* S_{ij} \exp(i\varphi_{ij} - \mathcal{A}_{ij}^2).$$

Важное отличие от квантовомеханического рассмотрения заключается в том, что функции \mathfrak{D} и \mathcal{B}_{ij}^2 зависят от кинематики события, а следовательно и от 4-импульсов ℓ_α^+ и ℓ_β^- , т.е. от индексов α, β . Поэтому, унитарные соотношения для $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L; \mathfrak{D})$ могут выполняться только в случае слабой зависимости \mathfrak{D} и \mathcal{B}_{ij}^2 от индексов α, β .

Фактор \mathcal{A}_{ij}^2 подавляет интерференцию состояний нейтрино ν_i и ν_j на расстояниях, превышающих длину когерентности, аналогично квантовомеханическому рассмотрению. Важным отличием от последнего, однако, оказывается то, что дисперсия энергии нейтринного волнового пакета, с учетом взаимодействий нейтрино в источнике и детекторе, является функцией кинематических переменных. Новым оказывается фактор S_{ij} , который подавляет как диагональные члены с функцией подавления $S_0 = S_{ii}$, так и не диагональные члены в формуле для вероятности осцилляций.

Полученная формула для $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(E_\nu, L)$ правильно воспроизводит интуитивное ожидание подавления числа взаимодействий в случае, если времена работы источника и детектора не синхронизированы друг с другом. В случае синхронизированных интервалов времен, S_{ij}/S_0 представляет собой новую квантово-полевую функцию подавления интерференционных членов в формуле

для вероятности. При определенных условиях функция S_{ij} переходит в независящий от L фактор $\exp(-\mathcal{B}_{ij}^2)$, ответственный за подавление когерентности при рождении и детектировании нейтрино. Соответствующие условия возникают в двух случаях. В первом, когда время экспозиции детектора $\tau_d = (y_2^0 - y_1^0)$ много меньше времени работы источника $\tau_s = (x_2^0 - x_1^0)$. Во втором, когда $\tau_d \approx \tau_s \gg \tau_\nu$, где τ_ν может быть интерпретировано как временная дисперсия волнового пакета нейтрино. В противоположном случае фактор S_{ij} предсказывает меньшее подавление, по сравнению с $\exp(-\mathcal{B}_{ij}^2)$, что объясняется дополнительным внесением неопределенности в измерение энергии нейтрино из-за конечных временных интервалов. Сильная зависимость S_0 от параметров τ_s и τ_d предоставляет возможность измерения усреднённого значения функции \mathcal{Q} в специальном ускорительном эксперименте, допускающем вариацию этих параметров (или одного из них). Такое измерение было бы очень полезно для планирования и обработки данных будущих прецизионных экспериментов. Недиагональные факторы декогерентности S_{ij} ($i \neq j$) имеют более сложное поведение, что иллюстрируют аналитические и численные оценки.

Третья часть диссертации посвящена измерению угла смешивания θ_{13} и разницы квадратов масс Δm_{32}^2 в данных эксперимента Daya Bay, детектирующего антинейтрино от реакторов.

Для этого, под руководством автора и с его непосредственным участием, разработан метод и создан комплекс компьютерных программ для анализа экспериментальных данных эксперимента Daya Bay. Программное обеспечение моделирует всю цепочку детектирования взаимодействий антинейтрино от реактора в жидкосцинтилляционном детекторе. Учитываются энергетические спектры антинейтрино от каждого из четырех главных изотопов ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu . Принимаются во внимание неравновесная поправка к спектрам и вклад от отработанного топлива. Вычисление числа взаимодействий антинейтрино как функция энергии позитрона учитывает зависимость соответствующего сечения от угла вылета позитрона. Все эффекты детектирования энерговыделения от позитрона учитываются в нашем расчете. Также учитываются фоновые события с учетом их измеренных энергетических спектров.

Отдельное внимание уделено корректному учету систематических неопределенностей и статистическому анализу данных. Реализована минимизация χ^2 и построение доверительных интервалов с учетом статистических и систематических неопределенностей при помощи ковариационной матрицы и штрафных членов.

Разработанное программное обеспечение используется также для ряда других исследований: исследование эффектов квантовой декогерентности в экспериментах Daya Bay и KamLAND, поиск стерильных нейтрино, исследование спектра антинейтрино от реактора.

В результате анализа данных эксперимента Daya Bay, накопленных за 1230 дней измерена амплитуда осцилляций

$$\sin^2 2\theta_{13} = 0.0841 \pm 0.0027 \text{ (стат.)} \pm 0.0019 \text{ (сист.)}$$

и разницы квадратов масс

$$\Delta m_{ee}^2 = (2.50 \pm 0.06 \text{ (стат.)} \pm 0.06 \text{ (сист.)}) \times 10^{-3} \text{ эВ}^2.$$

Для гипотезы нормальной иерархии масс нейтрино измерена разность квадратов масс

$$\Delta m_{32}^2 = (2.45 \pm 0.06 \text{ (стат.)} \pm 0.06 \text{ (сист.)}) \times 10^{-3} \text{ эВ}^2.$$

В предположении обратной иерархии

$$\Delta m_{32}^2 = (-2.56 \pm 0.06 \text{ (стат.)} \pm 0.06 \text{ (сист.)}) \times 10^{-3} \text{ эВ}^2.$$

Результаты нашего анализа являются официальными результатами коллаборации Daya Bay [289]. На сегодняшний день, это самые точные измерения $\sin^2 2\theta_{13}$ и Δm_{32}^2 (Δm_{ee}^2).

Открытие ненулевого значения угла смешивания коллаборацией Daya Bay [290] и прецизионное измерение его значения [289] открыло путь к измерению иерархии масс нейтрино и фазы, ответственной за нарушение CP-инвариантности, что используется в ряде экспериментов (T2K, NO ν A) и при подготовке новых экспериментов (JUNO, RENO-50, T2HK, DUNE и др.).

Прецизионные измерения $\sin^2 2\theta_{13}$ и Δm_{32}^2 и измеренный энергетический спектр антинейтрино от реактора уменьшают систематическую неопределенность в определении иерархии масс нейтрино в экспериментах следующего поколения, таких как JUNO и RENO-50.

Благодарности

Самая приятная часть работы над диссертацией – это вспомнить добрым словом всех тех, с кем мне посчастливилось сотрудничать и обсуждать затрагиваемые в работе темы.

Я выражаю свою искреннюю благодарность моим соавторам обзора, опубликованного в УФН [291] – В. А. Беднякову и О. Ю. Смирнову за их любезное разрешение использовать часть материала при написании обзора литературы по теме диссертации, приведенной в части I.

Часть II, посвященная квантово-полевой теории нейтринных осцилляций в модели релятивистского волнового пакета – результат нашей напряженной и многолетней работы с моим соавтором и отцом – Вадимом Александровичем Наумовым. Эта работа началась в 2005-2006 году и, как любит говорить мой соавтор, до сих пор не закончена. Действительно, у нас появилась очевидная ясность в вопросе осцилляций нейтрино, что позволило нам переосмыслить многие казавшиеся незыблемыми вопросы. Однако, дойдя до некоторого края, за ним мы “обнаружили бездну”, в которой скрыто еще много нового и интересного. Представленная работа – это результат лишь части всей работы, содержащейся в сотнях страниц черновиков.

Разумеется, работая бок о бок с моим соавтором, я многому у него научился, что представляет для меня не меньшую ценность, чем сам результат нашей работы. Наши методы работы и даже постановка задачи, зачастую заметно отличались, что нередко приводило к ожесточенным спорам, в которых, как известно, рождается истина. Построенная в итоге теоретическая конструкция обладает, по нашему мнению, определенной стройностью и изяществом, что было бы совершенно невозможно достичь, по моему мнению, без математического гения моего соавтора. Он пробивался с формулами там, где я был вынужден ограничиваться качественными рассуждениями. Впрочем, иногда случалось и наоборот, так что формул хватало на всех и с избытком. Как трехмерный объект легче всего разглядеть, смотря на него под разными углами, так и физическое явление проще осознать, исследуя его с разных точек зрения. Поэтому, развитая нами теория обладает простотой, наглядностью и математической строгостью. Вероятно, этого было бы невозможно достичь каждому из нас по-отдельности. Я выражаю огромную признательность моему соавтору за радость совместной кропотливой работы и за любезное разрешение представить результаты нашего труда в настоящей диссертации.

Хочу отметить очень полезные и интересные обсуждения теории нейтринных осцилляций с Е. Ахмедовым, М. И. Высоцким, Д. С. Горбуновым, И. П. Ивановым, А. Е. Калошиным, С. Э. Коренблитом, В. А. Рубаковым, Д. В. Тайченачевым, О. В. Теряевым, К. А. Тресковым.

По материалам настоящей диссертации я сделал четыре семинара (ЛТФ ОИЯИ, НИИЯФ МГУ, ИЯИ и ПИЯФ), которые длились от двух до трех с половиной часов. Мне очень приятно поблагодарить участников этих семинаров за интересные обсуждения. Наибольший интерес на семинарах был вызван нашей работой по теории нейтринных осцилляций. Я очень признателен М. С. Дворникову, который после моего семинара в ИЯИ РАН обратил мое внимание на то, что первой работой в которой была рассмотрена макроскопическая диаграмма в применении к осцилляциям нейтрино, была работа наших соотечественников [180].

Часть III настоящей диссертации посвящена нашей работе в эксперименте Daya Bay и измерению $\sin^2 2\theta_{13}$ и Δm_{ee}^2 . Наша группа ОИЯИ с самого начала принимает активное участие в этом эксперименте. Мы участвовали в работах по оптимизации мюонного вето. Эта работа велась под руководством Ю. А. Горнушкина и в сотрудничестве с М. О. Гончаром, который был в то время моим студентом-дипломником. Силами И.Б. Немченка и его группы была развита методика приготовления жидких сцинтилляторов (основанных на С,Н и с добавлением гадолиния), подходящих для использования в крупномасштабном эксперименте Daya Bay, что стало одним из важных направлений активности дубненской группы в эксперименте. А. Г. Ольшевский, Ю. А. Горнушкин и И. Б. Немченко восстановили технологию производства спектросмещающей добавки PPO, под их руководством нужное количество этого вещества было произведено и постановлено в эксперимент Daya Bay. После завершения работ по созданию эксперимента наша группа занялась обработкой и анализом данных. В работах по реконструкции, отбору событий обратного бета распада, оценкам фона и в осцилляционном анализе участвовали под моим руководством М. О. Гончар, М. А. Долгарева, Е. А. Наумова, К. А. Тресков, Д. В. Тайченачев, А. В. Чуканов. Всем членам дубненской группы хочется выразить самую теплую благодарность за их многолетнюю работу, которая в итоге привела к важнейшему открытию, уже отмеченному крупными премиями.

Особую благодарность я бы хотел выразить М. О. Гончару, который был сначала моим студентом, потом аспирантом, а сейчас возглавляет сектор реакторных антинейтрино в НЭОФЭЧ ЛЯП ОИЯИ. Мы сотрудничаем вместе уже 10 лет и я нахожу нашу совместную работу исключительно эффективной, приятной и взаимообогащающей в научном плане. Коллаборация Daya Bay оказала высокую честь дубненской группе, выбрав наш анализ в качестве официального. Однако, путь к признанию не был усыпан лепестками роз – пришлось выдержать серьезную конкуренцию со стороны еще четырех групп, что было бы совершенно невозможно без самоотверженной работы Максима Олеговича, который на протяжении нескольких месяцев по два-три раза в неделю по ночам докладывал результаты нашего анализа и необходимых проверок. Уверен, что без его определяющего вклада наш осцилляционный анализ не был бы признан официальным анализом коллаборации Daya Bay.

Безусловно, считаю своим приятным долгом поблагодарить всех членов коллаборации Daya Bay за их самоотверженный труд по созданию установки, набору данных и анализу. Работа в коллаборации Daya Bay научила меня очень многому и я горжусь тем, что являюсь ее участником. Эксперимент Daya Bay, несомненно, не состоялся бы без консолидирующей роли И. Ванга (Y. Wang), Дж.Сяо (J. Cao), Кам-Бью Люка (Kam-Biu Luk), которым я выражаю свою искреннюю благодарность. Мне посчастливилось работать со многими талантливыми физиками коллаборации Daya Bay. Вот лишь некоторые из них: В. Ванг (W.Wang), С. Вонг (S. Wong), Х. Вонг (Hin-Lok Henoeh Wong), Ч. Жанг (C. Zhang), Д. Джаффе (D. Jaffe), Д. Двайер (D. Dwyer), Р. Лейтнер (R. Leitner), Л. Лебановски (L. Lebanowski), Л. Литтенберг (L. Littenberg), Я. Накаджима (Y. Nakajima), Х.Очоа (J. P. Ochoa-Ricoux), Б. Росковец (B. Roskovec), М. Хе (M. He), К. Хеерер (K. Heeger), Э. Хуанг (En Chuan Huang). Всем им я также выражаю свою благодарность.

Мне доставляет также огромную радость выразить благодарность всем членам нашего дружного коллектива НЭОФЭЧ ЛЯП и, отдельно, нашему замечательному и обаятельному секретарю Ирине Ивановне Сидоркиной.

Для меня оказались очень ценными советы Г. А. Карамышевой по подготовке документов к защите настоящей диссертации. Считаю своим приятным долгом выразить свою симпатию Ю. А. Батусову, который всегда тепло интересовался ходом работы над моей диссертацией. Хочу выразить также благодарность нашему секретарю Е. С. Морозовой за большую помощь во всех административных вопросах.

Для меня очень дорог постоянный интерес к этой работе со стороны В. А. Беднякова, который регулярно интересовался ходом написания диссертации и принимал живое участие в решении всевозможных административных вопросов.

Деликатный, но твердый интерес к завершению работы над диссертацией со стороны А. А. Кулькова на протяжении последних трех лет немало способствовал тому, чтобы я, наконец, потратил свой отпуск на написание этого труда.

Для меня всегда был очень дорог интерес со стороны моего первого учителя А.Н. Валла, к сожалению, ушедшего от нас в 2016 году.

Первую версию диссертации внимательно прочитали С. Э. Коренблит, В. А. Наумов и Е. А. Наумова. Я благодарен им за множество ценных замечаний, улучшивших как правописание, так и корректность формулировок. С первой версией автореферата ознакомились и высказали ценные замечания: Л. К. Гладилин, А. С. Жемчугов, С. Э. Коренблит, Ю. Г. Куденко, В. А. Наумов и Е. А. Наумова. Их замечания и предложения были очень полезными и помогли существенно улучшить содержание автореферата. Всем им я выражаю свою искреннюю признательность за огромный объем проделанной работы.

Эта работа никогда не была закончена, если бы не постоянная поддержка моей семьи. Мои любимые родители Наумова Татьяна Трифионовна и Наумов Вадим Александрович, и любимая жена – Наумова Елена Александровна сделали все возможное, чтобы эта работа увидела свет, за что я им премного благодарен.

Наконец, считаю своим приятным долгом поблагодарить автора прекрасно структурированного и хорошо продуманного \LaTeX шаблона для написания диссертации [292], который был использован при подготовке настоящей диссертации.

Глава 9. Словарь терминов

9.1 Определения, система единиц

В работе используется система единиц, принятая в физике высоких энергий:

$$\hbar = c = 1.$$

В этом случае: [Энергия] = [Масса] = [Импульс] = [Длина]⁻¹ = [Время]⁻¹.

Контр-вариантный 4-вектор $a^\mu = (a^0, \mathbf{a})$ и ковариантный 4-вектор $a_\mu = (a_0, -\mathbf{a})$ связаны метрическим тензором $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ при помощи: $a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$. У метрического тензора отличны от нуля только диагональные элементы: $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$.

Используются определения 4-спиноров и γ матриц Дирака следуя книге Бьёркена и Дрелла [293] со следующими соглашениями:

$$\begin{aligned} u^\dagger u &= v^\dagger v = 2E \\ \bar{u}u &= -\bar{v}v = 2m \end{aligned} \quad (9.1)$$

Матрица γ_5 определена как: $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. 4-вектор спина фермиона определен как: $s^\mu = (s^0, \mathbf{s})$, где

$$\begin{aligned} s^0 &= \mathbf{p}\boldsymbol{\xi}/m \\ \mathbf{s} &= \boldsymbol{\xi} + (\mathbf{p}\boldsymbol{\xi})\mathbf{p}/m(m + E), \end{aligned} \quad (9.2)$$

$\boldsymbol{\xi}$ — единичный вектор поляризации частицы в ее системе покоя. Вектор s^μ удовлетворяет соотношениям:

$$s^2 = -1, s \cdot p = 0.$$

Полностью антисимметричный тензор определен таким образом: $\epsilon_{0123} = +1$.

9.2 Список сокращений

- ACU** automated calibration unit — автоматическое калибровочное устройство. 184, 218
AD антинейтринный детектор. 180, 181, 183–188, 190, 195, 199, 207, 213–216, 222, 223, 225, 308, 309, 311
CP CP-инвариантность. 178
FEE считывающая электроника. 186–188, 190
GPS Global Positioning System – Спутниковая система навигации. 182, 242, 317
Gd-ЖС жидкий сцинтиллятор с добавлением гадолиния. 183–185, 194, 196, 197, 208, 209, 222, 223, 227, 231, 236, 308, 309

- IAV** inner acrylic vessel — внутренний акриловый контейнер. 183, 185, 210, 254, 259, 267, 275, 316
- IWS** inner water shield — внутренний водяной буфер. 186, 207, 222–224, 312
- LAB** linear alkylbenzene — линейный алкилбензол, $C_6H_5C_nH_{2n+1}$. 183
- LS hall** жидкосцинтилляционный холл. 181, 308
- LTV** локальная триггерная микросхема. 186, 187
- MTB** Плата управляющего триггера (Master Trigger Board). 186, 187
- OAV** outer acrylic vessel — внешний акриловый контейнер. 183, 188
- OWS** outer water shield — внешний водяной буфер. 186, 207, 222–224, 312
- SAB** surface assembly building – сборочный цех на поверхности. 181, 184, 308
- SSV** stainless steel vessel — контейнер из нержавеющей стали. 183, 184, 308
- TDC** время-цифровой преобразователь. 186, 187
- АЦП** аналого-цифровой преобразователь. 186–190, 308
- АЭС** атомная электростанция. 180, 181, 243, 308
- Бк** Беккерель – единица измерения активности радиоактивного источника. Один беккерель определяется как активность источника, в котором за одну секунду происходит в среднем один радиоактивный распад.. 231
- ГэВ** гигаэлектронвольт. 207, 222, 226, 263, 313
- ЖС** жидкий сцинтиллятор. 181, 183, 184, 191, 194–196, 200, 208, 210, 222, 308, 309
- кэВ** килоэлектронвольт. 183, 208
- м.в.э.** метр водного эквивалента — принятая в физике единица измерения коэффициента подавления космического излучения, используемая для характеристики защищённости подземных лабораторий. Определяет высоту водяного столба, обладающего эквивалентной подавляющей способностью по отношению к космическому излучению. 182, 266, 317
- ММ** минеральное масло. 183, 200
- МСВ** (эффект) Михеева-Смирнова-Вольфенштейна. 65
- МэВ** мегаэлектронвольт. 64–66, 178–180, 183, 186, 188, 191, 193, 200, 202, 204, 205, 207–213, 216–218, 222–225, 227–231, 233, 234, 236, 242, 253, 258, 259, 263, 271–273, 309–313
- ОБР** обратный бета-распад. 178, 179, 182, 183, 196, 199–202, 207–211, 213–215, 218, 221, 225, 226, 247–251, 260, 263, 271, 275, 310, 311, 313, 314, 316, 317
- ОЯТ** отработавшее ядерное топливо. 246, 247, 314, 318
- РПК** resistive plate chamber (RPC) — резистивная плоская камера. 185–187, 223, 224, 308, 312
- СМ** Стандартная Модель. 13, 15–18, 20–23, 27–31, 33, 66, 120, 138, 139, 149, 178, 248, 317
- У.Д.** уровень достоверности. 178, 203, 205, 263, 272, 273, 310

ф.э. фотоэлектрон. 186, 188–193, 200, 207, 209, 213–215, 222, 309, 311

ФЭУ фотоэлектронный умножитель. 182–184, 186–192, 194, 195, 197, 202, 204, 207, 211, 213–215, 217, 222, 236, 254, 308, 309, 311

Список литературы

1. *Kudenko Yu. G.* Long-baseline neutrino accelerator experiments: results and prospects // *Phys. Usp.* — 2014. — Т. 57. — С. 462—469. — [Usp. Fiz. Nauk184,502(2014)].
2. *Spiering C.* High-energy neutrino astronomy: a glimpse of the promised land // *Phys. Usp.* — 2014. — Т. 57. — С. 470—481. — arXiv: [1402.2096 \[astro-ph.IM\]](#). — [Usp. Fiz. Nauk184,510(2014)].
3. *Barabash A. S.* Double beta decay experiments: current status and prospects // *Phys. Usp.* — 2014. — Т. 57. — С. 482—488. — [Usp. Fiz. Nauk184,524(2014)].
4. *Bilenky S. M.* Bruno Pontecorvo and the neutrino // *Phys. Usp.* — 2014. — Т. 57. — С. 489—496. — [Usp. Fiz. Nauk184,531(2014)].
5. *Olshevskiy A. G.* Reactor neutrino experiments: results and prospects // *Phys. Usp.* — 2014. — Т. 57. — С. 497—502.
6. *Gorbunov D. S.* Sterile neutrinos and their role in particle physics and cosmology // *Phys. Usp.* — 2014. — Т. 57. — С. 503—511. — [Usp. Fiz. Nauk184,545(2014)].
7. *Derbin A. V.* Solar neutrino experiments // *Phys. Usp.* — 2014. — Т. 57. — С. 512—524. — [Usp. Fiz. Nauk184,555(2014)].
8. *Kudenko Yu. G.* A study of neutrino oscillations in long baseline accelerator experiments // *Usp. Fiz. Nauk.* — 2011. — Т. 181. — С. 569—594. — [Phys. Usp.54,549(2011)].
9. *Troitsky S.* Unsolved problems in particle physics // *Phys. Usp.* — 2012. — Т. 55. — С. 72—95. — arXiv: [1112.4515 \[hep-ph\]](#). — [Usp. Fiz. Nauk182,77(2012)].
10. *Pais A.* Inward Bound. — (New York: Oxford University Press, 1986).
11. *Cowan C., Reines F.* Neutrino magnetic moment upper limit // *Phys.Rev.* — 1957. — Т. 107. — С. 528—530.
12. Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos / G. Danby [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 1962. — Т. 9. — С. 36—44.
13. Observation of tau neutrino interactions / K. Kodama [и др.] // *Phys. Lett.* — 2001. — Т. B504. — С. 218—224. — arXiv: [hep-ex/0012035 \[hep-ex\]](#).
14. Final tau-neutrino results from the DONuT experiment / K. Kodama [и др.] // *Phys. Rev.* — 2008. — Т. D78. — С. 052002. — arXiv: [0711.0728 \[hep-ex\]](#).
15. Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay / C. Wu [и др.] // *Phys.Rev.* — 1957. — Т. 105. — С. 1413—1414.
16. Measurement of the solar electron neutrino flux with the Homestake chlorine detector / B. T. Cleveland [и др.] // *Astrophys. J.* — 1998. — Т. 496. — С. 505—526.

17. *Рубаков В. А.* К открытию на Большом адронном коллайдере новой частицы со свойствами бозона Хиггса // Успехи физических наук. — 2012. — Т. 182, № 10. — С. 1017—1025. — URL: <http://ufn.ru/ru/articles/2012/10/a/>.
18. *Goldstone J., Salam A., Weinberg S.* Broken Symmetries // Phys. Rev. — 1962. — Т. 127. — С. 965—970.
19. Evidence for an oscillatory signature in atmospheric neutrino oscillation / Y. Ashie [и др.] // Phys.Rev.Lett. — 2004. — Т. 93. — С. 101801. — arXiv: [hep-ex/0404034](https://arxiv.org/abs/hep-ex/0404034) [hep-ex].
20. Precision Measurement of Neutrino Oscillation Parameters with KamLAND / S. Abe [и др.] // Phys.Rev.Lett. — 2008. — Т. 100. — С. 221803. — arXiv: [0801.4589](https://arxiv.org/abs/0801.4589) [hep-ex].
21. *Giunti C., Kim C., Lee U.* Coherence of neutrino oscillations in vacuum and matter in the wave packet treatment // Phys.Lett. — 1992. — Т. B274. — С. 87—94.
22. *De Leo S., Nishi C., Rotelli P.* Wave packets and quantum oscillations // Int.J.Mod.Phys. — 2004. — Т. A19. — С. 677—694.
23. *Bernardini A. E., De Leo S.* An Analytic approach to the wave packet formalism in oscillation phenomena // Phys.Rev. — 2004. — Т. D70. — С. 053010. — arXiv: [hep-ph/0411134](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0411134) [hep-ph].
24. *Shirokov M. I., Naumov V. A.* Time-to-Space Conversion in Neutrino Oscillations // Concepts Phys. — 2007. — Т. 4. — С. 121—138. — arXiv: [hep-ph/0611202](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0611202) [hep-ph].
25. A Wave-Packet View of Neutrino Oscillation and Pion Decay / C. Fuji [и др.]. — 2006. — arXiv: [hep-ph/0612300](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0612300) [hep-ph].
26. *Kaysen B., Kopp J.* Testing the wave packet approach to neutrino oscillations in future experiments. — 2010. — arXiv: [1005.4081](https://arxiv.org/abs/1005.4081) [hep-ph].
27. *Beuthe M.* Oscillations of neutrinos and mesons in quantum field theory // Phys.Rept. — 2003. — Т. 375. — С. 105—218. — arXiv: [hep-ph/0109119](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0109119) [hep-ph].
28. *Giunti C., Kim C. W.* Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics. — 2007.
29. *Grimus W., Stockinger P.* Real oscillations of virtual neutrinos // Phys.Rev. — 1996. — Т. D54. — С. 3414—3419. — arXiv: [hep-ph/9603430](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9603430) [hep-ph].
30. *Cardall C. Y.* Coherence of neutrino flavor mixing in quantum field theory // Phys.Rev. — 2000. — Т. D61. — С. 073006. — arXiv: [hep-ph/9909332](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9909332) [hep-ph].
31. *Akhmedov E. K., Kopp J.* Neutrino oscillations: Quantum mechanics vs. quantum field theory // JHEP. — 2010. — Т. 1004. — С. 008. — arXiv: [1001.4815](https://arxiv.org/abs/1001.4815) [hep-ph].
32. *Naumov D. V., Naumov V. A.* Relativistic wave packets in a field theoretical approach to neutrino oscillations // Russ.Phys.J. — 2010. — Т. 53. — С. 549—574.
33. *Naumov D., Naumov V.* A Diagrammatic treatment of neutrino oscillations // J.Phys.G. — 2010. — Т. G37. — С. 105014. — arXiv: [1008.0306](https://arxiv.org/abs/1008.0306) [hep-ph].
34. *Akhmedov E. K.* Do charged leptons oscillate? // JHEP. — 2007. — Т. 0709. — С. 116. — arXiv: [0706.1216](https://arxiv.org/abs/0706.1216) [hep-ph].

35. New Measurement of Antineutrino Oscillation with the Full Detector Configuration at Daya Bay / F. P. An [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Т. 115, № 11. — С. 111802. — arXiv: [1505.03456 \[hep-ex\]](#).
36. Spectral measurement of electron antineutrino oscillation amplitude and frequency at Daya Bay / F. An [и др.] // Phys.Rev.Lett. — 2014. — Т. 112. — С. 061801. — arXiv: [1310.6732 \[hep-ex\]](#).
37. *Maltoni M., Smirnov A. Yu.* Solar neutrinos and neutrino physics // Eur. Phys. J. — 2016. — Т. A52, № 4. — С. 87. — arXiv: [1507.05287 \[hep-ph\]](#).
38. *Wolfenstein L.* Neutrino Oscillations in Matter // Phys.Rev. — 1978. — Т. D17. — С. 2369—2374.
39. *Mikheev S., Smirnov A. Y.* Resonance Amplification of Oscillations in Matter and Spectroscopy of Solar Neutrinos // Sov.J.Nucl.Phys. — 1985. — Т. 42. — С. 913—917.
40. Review of Particle Physics / C. Patrignani [и др.] // Chin. Phys. — 2016. — Т. C40, № 10. — С. 100001.
41. Precision electroweak measurements on the Z resonance / S. Schael [и др.] // Phys. Rept. — 2006. — Т. 427. — С. 257—454. — arXiv: [hep-ex/0509008 \[hep-ex\]](#).
42. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters / P. Ade [и др.]. — 2015. — arXiv: [1502.01589 \[astro-ph.CO\]](#).
43. An upper limit on electron antineutrino mass from Troitsk experiment / V. Aseev [и др.] // Phys.Rev. — 2011. — Т. D84. — С. 112003. — arXiv: [1108.5034 \[hep-ex\]](#).
44. Upper limit of the muon-neutrino mass and charged pion mass from momentum analysis of a surface muon beam / K. Assamagan [и др.] // Phys.Rev. — 1996. — Т. D53. — С. 6065—6077.
45. An Upper limit on the tau-neutrino mass from three-prong and five-prong tau decays / R. Barate [и др.] // Eur.Phys.J. — 1998. — Т. C2. — С. 395—406.
46. *Thomas S. A., Abdalla F. B., Lahav O.* Upper Bound of 0.28eV on the Neutrino Masses from the Largest Photometric Redshift Survey // Phys.Rev.Lett. — 2010. — Т. 105. — С. 031301. — arXiv: [0911.5291 \[astro-ph.CO\]](#).
47. *Battye R. A., Moss A.* Evidence for Massive Neutrinos from Cosmic Microwave Background and Lensing Observations // Phys.Rev.Lett. — 2014. — Т. 112, № 5. — С. 051303. — arXiv: [1308.5870 \[astro-ph.CO\]](#).
48. Limit on Neutrinoless $\beta\beta$ Decay of ^{136}Xe from the First Phase of KamLAND-Zen and Comparison with the Positive Claim in ^{76}Ge / A. Gando [и др.] // Phys.Rev.Lett. — 2013. — Т. 110, № 6. — С. 062502. — arXiv: [1211.3863 \[hep-ex\]](#).
49. Search for Neutrinoless Double-Beta Decay in ^{136}Xe with EXO-200 / M. Auger [и др.] // Phys.Rev.Lett. — 2012. — Т. 109. — С. 032505. — arXiv: [1205.5608 \[hep-ex\]](#).
50. *Minkowski P.* $\mu \rightarrow e\gamma$ at a Rate of One Out of 10^9 Muon Decays? // Phys.Lett. — 1977. — Т. B67. — С. 421—428.
51. *Mohapatra R. N., Senjanovic G.* Neutrino Mass and Spontaneous Parity Violation // Phys.Rev.Lett. — 1980. — Т. 44. — С. 912.

52. *Giunti C., Studenikin A.* Neutrino electromagnetic interactions: a window to new physics // *Rev. Mod. Phys.* — 2015. — Т. 87. — С. 531. — arXiv: [1403.6344 \[hep-ph\]](#).
53. *Raffelt G. G.* Limits on neutrino electromagnetic properties: An update // *Phys. Rept.* — 1999. — Т. 320. — С. 319—327.
54. Constraint on the magnetic dipole moment of neutrinos by the tip-RGB luminosity in ω -Centauri / *S. Arceo-Díaz [и др.] // Astropart. Phys.* — 2015. — Т. 70. — С. 1—11.
55. *Balantekin A. B., Vassh N.* Magnetic moments of active and sterile neutrinos // *Phys. Rev.* — 2014. — Т. D89, № 7. — С. 073013. — arXiv: [1312.6858 \[hep-ph\]](#).
56. *Derbin A.* Restriction on the magnetic dipole moment of reactor neutrinos // *Phys.Atom.Nucl.* — 1994. — Т. 57. — С. 222—226.
57. Limit on the electron neutrino magnetic moment from the Kuo-Sheng reactor neutrino experiment / *H. B. Li [и др.] // Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Т. 90. — С. 131802. — arXiv: [hep-ex/0212003 \[hep-ex\]](#).
58. Final results on the neutrino magnetic moment from the MUNU experiment / *Z. Daraktchieva [и др.] // Phys. Lett.* — 2005. — Т. B615. — С. 153. — arXiv: [hep-ex/0502037](#).
59. Gemma experiment: The results of neutrino magnetic moment search / *A. Buda [и др.] // Phys.Part.Nucl.Lett.* — 2013. — Т. 10. — С. 139—143.
60. Direct Measurement of the Be-7 Solar Neutrino Flux with 192 Days of Borexino Data / *C. Arpesella [и др.] // Phys.Rev.Lett.* — 2008. — Т. 101. — С. 091302. — arXiv: [0805.3843 \[astro-ph\]](#).
61. *Derbin A.* First results of the Borexino experiment // *Phys.Atom.Nucl.* — 2010. — Т. 73. — С. 1935—1941.
62. Measurement of electron - neutrino - electron elastic scattering / *L. Auerbach [и др.] // Phys.Rev.* — 2001. — Т. D63. — С. 112001. — arXiv: [hep-ex/0101039 \[hep-ex\]](#).
63. A New upper limit for the tau - neutrino magnetic moment / *R. Schwienhorst [и др.] // Phys.Lett.* — 2001. — Т. B513. — С. 23—29. — arXiv: [hep-ex/0102026 \[hep-ex\]](#).
64. *Perrin F.* // *Comptes Rendues.* — 1933. — Т. 197. — С. 1625.
65. *Fermi E.* An attempt of a theory of beta radiation. 1. // *Z. Phys.* — 1934. — Т. 88. — С. 161—177.
66. *Alvarez L. W., Cornog R.* Helium and Hydrogen of Mass 3 // *Phys. Rev.* — 1939. — Сент. — Т. 56, вып. 6. — С. 613—613. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.56.613>.
67. *Hanna G. C., Pontecorvo B.* The β Spectrum of H^3 // *Phys. Rev.* — 1949. — Т. 75. — С. 983—984.
68. *Curran S. C., Angus J., Cockroft A. L.* The Beta-Spectrum of Tritium // *Phys. Rev.* — 1949. — Т. 76. — С. 853—854.
69. Final results from phase II of the Mainz neutrino mass search in tritium beta decay / *C. Kraus [и др.] // Eur. Phys. J.* — 2005. — Т. C40. — С. 447—468. — arXiv: [hep-ex/0412056 \[hep-ex\]](#).

70. Current direct neutrino mass experiments / G. Drexlin [и др.] // Adv. High Energy Phys. — 2013. — Т. 2013. — С. 293986. — arXiv: [1307.0101](https://arxiv.org/abs/1307.0101) [[physics.ins-det](#)].
71. KATRIN design report 2004 / J. Angrik [и др.]. — 2005.
72. Unambiguous Determination of the Neutrino Mass Hierarchy Using Reactor Neutrinos / Y.-F. Li [и др.] // Phys. Rev. — 2013. — Т. D88. — С. 013008. — arXiv: [1303.6733](https://arxiv.org/abs/1303.6733) [[hep-ex](#)].
73. Neutrino Physics with JUNO / F. An [и др.] // J. Phys. — 2016. — Т. G43, № 3. — С. 030401. — arXiv: [1507.05613](https://arxiv.org/abs/1507.05613) [[physics.ins-det](#)].
74. *Kim S.-B.* New results from RENO and prospects with RENO-50 // Neutrino Oscillation Workshop (NOW 2014) Conca Specchiulla, Otranto, Lecce, Italy, September 7-14, 2014. — 2014. — arXiv: [1412.2199](https://arxiv.org/abs/1412.2199) [[hep-ex](#)]. — URL: <http://inspirehep.net/record/1333219/files/arXiv:1412.2199.pdf>.
75. NOvA: Proposal to build a 30 kiloton off-axis detector to study $\nu(\mu) \rightarrow \nu(e)$ oscillations in the NuMI beamline / D. Ayres [и др.]. — 2004. — arXiv: [hep-ex/0503053](https://arxiv.org/abs/hep-ex/0503053) [[hep-ex](#)].
76. The 2010 Interim Report of the Long-Baseline Neutrino Experiment Collaboration Physics Working Groups / T. Akiri [и др.]. — 2011. — arXiv: [1110.6249](https://arxiv.org/abs/1110.6249) [[hep-ex](#)].
77. Letter of Intent: The Precision IceCube Next Generation Upgrade (PINGU) / M. Aartsen [и др.]. — 2014. — arXiv: [1401.2046](https://arxiv.org/abs/1401.2046) [[physics.ins-det](#)].
78. *Ribordy M., Smirnov A. Y.* Improving the neutrino mass hierarchy identification with inelasticity measurement in PINGU and ORCA // Phys.Rev. — 2013. — Т. D87, № 11. — С. 113007. — arXiv: [1303.0758](https://arxiv.org/abs/1303.0758) [[hep-ph](#)].
79. *Huber P., Maltoni M., Schwetz T.* Resolving parameter degeneracies in long-baseline experiments by atmospheric neutrino data // Phys. Rev. — 2005. — Т. D71. — С. 053006. — arXiv: [hep-ph/0501037](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0501037) [[hep-ph](#)].
80. The reach of INO for atmospheric neutrino oscillation parameters / T. Thakore [и др.] // Journal of High Energy Physics. — 2013. — Т. 2013, № 5. — С. 58. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP05\(2013\)058](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP05(2013)058).
81. Quantifying the sensitivity of oscillation experiments to the neutrino mass ordering / M. Blennow [и др.] // JHEP. — 2014. — Т. 1403. — С. 028. — arXiv: [1311.1822](https://arxiv.org/abs/1311.1822) [[hep-ph](#)].
82. The Long-Baseline Neutrino Experiment: Exploring Fundamental Symmetries of the Universe / C. Adams [и др.]. — 2013. — arXiv: [1307.7335](https://arxiv.org/abs/1307.7335) [[hep-ex](#)].
83. *Goepfert-Mayer M.* Double beta-disintegration // Phys. Rev. — 1935. — Т. 48. — С. 512—516.
84. *Majorana E.* Teoria simmetrica dell elettrone e del positron // Il Nuovo Cimento. — 1937. — Т. 14, вып. 4. — С. 171—184.
85. *Furry W. H.* On transition probabilities in double beta-disintegration // Phys. Rev. — 1939. — Т. 56. — С. 1184—1193.

86. Search for neutrinoless double beta decay with enriched Ge-76 in Gran Sasso 1990-2003 / H. Klapdor-Kleingrothaus [и др.] // Phys.Lett. — 2004. — Т. B586. — С. 198—212. — arXiv: [hep-ph/0404088](#) [hep-ph].
87. *Klapdor-Kleingrothaus H., Krivosheina I.* The evidence for the observation of $0\nu\beta\beta$ decay: The identification of $0\nu\beta\beta$ events from the full spectra // Mod.Phys.Lett. — 2006. — Т. A21. — С. 1547—1566.
88. *Klapdor-Kleingrothaus H., Dietz A., Krivosheina I.* Evidence for neutrinoless double beta decay revisited: Reply to a comment. — 2002.
89. *Feruglio F., Strumia A., Vissani F.* Neutrino oscillations and signals in beta and $0\nu 2\beta$ experiments // Nucl. Phys. — 2002. — Т. B637. — С. 345—377. — arXiv: [hep-ph/0201291](#) [hep-ph]. — [Addendum: Nucl. Phys.B659,359(2003)].
90. Results on Neutrinoless Double- β Decay of ^{76}Ge from Phase I of the GERDA Experiment / M. Agostini [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Т. 111, № 12. — С. 122503. — arXiv: [1307.4720](#) [nucl-ex].
91. *Schechter J., Valle J. W. F.* Neutrinoless Double beta Decay in $\text{SU}(2) \times \text{U}(1)$ Theories // Phys. Rev. — 1982. — Т. D25. — С. 2951.
92. *Bilenky S., Giunti C.* Neutrinoless double-beta decay: A brief review // Mod.Phys.Lett. — 2012. — Т. A27. — С. 1230015. — arXiv: [1203.5250](#) [hep-ph].
93. Evidence for neutrino oscillations from the observation of anti-neutrino(electron) appearance in a anti-neutrino(muon) beam / A. Aguilar-Arevalo [и др.] // Phys. Rev. — 2001. — Т. D64. — С. 112007. — arXiv: [hep-ex/0104049](#) [hep-ex].
94. Improved Search for $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ Oscillations in the MiniBooNE Experiment / A. A. Aguilar-Arevalo [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Т. 110. — С. 161801. — arXiv: [1207.4809](#) [hep-ex].
95. The Russian-American gallium experiment (SAGE) Cr neutrino source measurement / D. Abdurashitov [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Т. 77. — С. 4708—4711.
96. Measurement of the response of a Ga solar neutrino experiment to neutrinos from an Ar-37 source / J. N. Abdurashitov [и др.] // Phys. Rev. — 2006. — Т. C73. — С. 045805. — arXiv: [nucl-ex/0512041](#) [nucl-ex].
97. First results from the Cr-51 neutrino source experiment with the GALLEX detector / P. Anselmann [и др.] // Phys. Lett. — 1995. — Т. B342. — С. 440—450.
98. Reanalysis of the GALLEX solar neutrino flux and source experiments / F. Kaether [и др.] // Phys. Lett. — 2010. — Т. B685. — С. 47—54. — arXiv: [1001.2731](#) [hep-ex].
99. The Reactor Antineutrino Anomaly / G. Mention [и др.] // Phys. Rev. — 2011. — Т. D83. — С. 073006. — arXiv: [1101.2755](#) [hep-ex].
100. Light Sterile Neutrinos: A White Paper / K. N. Abazajian [и др.]. — 2012. — arXiv: [1204.5379](#) [hep-ph].

101. SOX: Short distance neutrino Oscillations with BoreXino / G. Bellini [и др.] // JHEP. — 2013. — Т. 08. — С. 038. — arXiv: [1304.7721 \[physics.ins-det\]](#).
102. *Веретенкин Е. П. и др.* — URL: [%7Bhttp://www.inr.ru/rus/bno/best.pdf%7D](#).
103. 2011. — URL: [http://nrd.pnpi.spb.ru/facilities/menu%20pik.html](#).
104. . — URL: [http://www-dev.niiar.ru/ork/sm/features.htm](#).
105. *Derbin A. V., Kayunov A. S., Muratova V. N.* Search for neutrino oscillations at a research reactor. — 2012.
106. *Danilov M.* Sensitivity of the DANSS detector to short range neutrino oscillations // PoS. — 2013. — Т. EPS—HEP2013. — С. 493. — arXiv: [1311.2777 \[physics.ins-det\]](#).
107. DANSSino: a pilot version of the DANSS neutrino detector / I. Alekseev [и др.] // Phys.Part.Nucl.Lett. — 2014. — Т. 11. — С. 473—482. — arXiv: [1305.3350 \[physics.ins-det\]](#).
108. On possibility of realization NEUTRINO-4 experiment on search for oscillations of the reactor antineutrino into a sterile state / A. P. Serebrov [и др.]. — 2013. — arXiv: [1310.5521 \[physics.ins-det\]](#).
109. *Grevesse N., Sauval A.* Standard Solar Composition // Space Science Reviews. — 1998. — Т. 85, № 1—2. — С. 161—174. — URL: [http://dx.doi.org/10.1023/A%3A1005161325181](#).
110. The Chemical Composition of the Sun / M. Asplund [и др.]. — 2009. — Сент. — arXiv: [0909.0948 \[astro-ph.SR\]](#).
111. *Abdurashitov J. N., al. et* Measurement of the solar neutrino capture rate with gallium metal. III. Results for the 2002–2007 data-taking period // Phys. Rev. C. — 2009. — Июль. — Т. 80, вып. 1. — С. 015807. — URL: [http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.80.015807](#).
112. Neutrinos from the primary proton–proton fusion process in the Sun / G. Bellini [и др.] // Nature. — 2014. — Т. 512, № 7515. — С. 383—386.
113. First evidence of pep solar neutrinos by direct detection in Borexino / G. Bellini [и др.] // Phys.Rev.Lett. — 2012. — Т. 108. — С. 051302. — arXiv: [1110.3230 \[hep-ex\]](#).
114. Precision measurement of the ${}^7\text{Be}$ solar neutrino interaction rate in Borexino / G. Bellini [и др.] // Phys.Rev.Lett. — 2011. — Т. 107. — С. 141302. — arXiv: [1104.1816 \[hep-ex\]](#).
115. *Aharmim B., al. et* Low-energy-threshold analysis of the Phase I and Phase II data sets of the Sudbury Neutrino Observatory // Phys. Rev. C. — 2010. — Май. — Т. 81, вып. 5. — С. 055504. — URL: [http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.81.055504](#).
116. *Aharmim B., al. et* A Search for Neutrinos from the Solar hep Reaction and the Diffuse Supernova Neutrino Background with the Sudbury Neutrino Observatory // The Astrophysical Journal. — 2006. — Т. 653, № 2. — С. 1545. — URL: [http://stacks.iop.org/0004-637X/653/i=2/a=1545](#).
117. *Serenelli A. M., Haxton W. C., Pena-Garay C.* Solar models with accretion. I. Application to the solar abundance problem // Astrophys. J. — 2011. — Т. 743. — С. 24. — arXiv: [1104.1639 \[astro-ph.SR\]](#).

118. *Lozza V., Sno+ collaboration the Scintillator phase of the SNO+ experiment // Journal of Physics: Conference Series.* — 2012. — Т. 375, № 4. — С. 042050. — URL: <http://stacks.iop.org/1742-6596/375/i=4/a=042050>.
119. Observation in the Kamiokande-II Detector of the Neutrino Burst from Supernova SN 1987a / K. S. Hirata [и др.] // *Phys. Rev.* — 1988. — Т. D38. — С. 448—458.
120. Observation of a neutrino burst in coincidence with supernova SN1987A in the Large Magellanic Cloud / R. M. Bionta [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 1987. — Т. 58. — С. 1494.
121. DETECTION OF THE NEUTRINO SIGNAL FROM SN1987A IN THE LMC USING THE INR BAKSAN UNDERGROUND SCINTILLATION TELESCOPE / E. N. Alekseev [и др.] // *Phys. Lett.* — 1988. — Т. B205. — С. 209—214.
122. On the event observed in the Mont Blanc Underground Neutrino observatory during the occurrence of Supernova 1987a / M. Aglietta [и др.] // *Europhys. Lett.* — 1987. — Т. 3. — С. 1315—1320.
123. Detection of a Rare Event on 23 February 1987 by the Neutrino Radiation Detector Under Mont Blanc / V. L. Dadykin [и др.] // *JETP Lett.* — 1987. — Т. 45. — С. 593—595. — [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*45,464(1987)].
124. *Dadykin V. L., Zatsepin G. T., Ryazhskaya O. G.* EVENTS DETECTED BY UNDERGROUND DETECTORS ON FEBRUARY 23, 1987 // *Sov. Phys. Usp.* — 1989. — Т. 32. — С. 459—468. — [*Usp. Fiz. Nauk*158,139(1989)].
125. *Imshennik V. S., Ryazhskaya O. G.* A rotating collapsar and possible interpretation of the lsd neutrino signal from sn 1987a // *Astron. Lett.* — 2004. — Т. 30. — С. 14—31. — arXiv: [astro-ph/0401613](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0401613) [*astro-ph*].
126. SNEWS: The Supernova Early Warning System / P. Antonioli [и др.] // *New J. Phys.* — 2004. — Т. 6. — С. 114. — arXiv: [astro-ph/0406214](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0406214) [*astro-ph*].
127. Evidence for High-Energy Extraterrestrial Neutrinos at the IceCube Detector / M. G. Aartsen [и др.] // *Science.* — 2013. — Т. 342. — С. 1242856. — arXiv: [1311.5238](https://arxiv.org/abs/1311.5238) [*astro-ph.HE*].
128. Atmospheric and astrophysical neutrinos above 1 TeV interacting in IceCube / M. G. Aartsen [и др.] // *Phys. Rev.* — 2015. — Т. D91, № 2. — С. 022001. — arXiv: [1410.1749](https://arxiv.org/abs/1410.1749) [*astro-ph.HE*].
129. Letter of intent for KM3NeT 2.0 / S. Adrian-Martinez [и др.] // *J. Phys.* — 2016. — Т. G43, № 8. — С. 084001. — arXiv: [1601.07459](https://arxiv.org/abs/1601.07459) [*astro-ph.IM*].
130. ANTARES: the first undersea neutrino telescope / M. Ageron [и др.] // *Nucl. Instrum. Meth.* — 2011. — Т. A656. — С. 11—38. — arXiv: [1104.1607](https://arxiv.org/abs/1104.1607) [*astro-ph.IM*].
131. *Davies J. H., Davies D. R.* Earth's surface heat flux // *Solid Earth.* — 2010. — Т. 1, № 1. — С. 5—24. — URL: <http://www.solid-earth.net/1/5/2010/>.
132. Reactor On-Off Antineutrino Measurement with KamLAND / A. Gando [и др.] // *Phys. Rev.* — 2013. — Т. D88, № 3. — С. 033001. — arXiv: [1303.4667](https://arxiv.org/abs/1303.4667) [*hep-ex*].
133. Spectroscopy of geo-neutrinos from 2056 days of Borexino data / M. Agostini [и др.]. — 2015. — arXiv: [1506.04610](https://arxiv.org/abs/1506.04610) [*hep-ex*].

134. Measurement of geo-neutrinos from 1353 days of Borexino / G. Bellini [и др.] // Phys. Lett. — 2013. — T. B722. — C. 295—300. — arXiv: [1303.2571 \[hep-ex\]](#).
135. Expected geoneutrino signal at JUNO / V. Strati [и др.]. — 2014. — arXiv: [1412.3324 \[physics.geo-ph\]](#).
136. Letter of Intent: The Hyper-Kamiokande Experiment — Detector Design and Physics Potential — / K. Abe [и др.]. — 2011. — arXiv: [1109.3262 \[hep-ex\]](#).
137. A Long Baseline Neutrino Oscillation Experiment Using J-PARC Neutrino Beam and Hyper-Kamiokande / K. Abe [и др.] // — 2014. — arXiv: [1412.4673 \[physics.ins-det\]](#). — URL: <https://inspirehep.net/record/1334360/files/arXiv:1412.4673.pdf>.
138. *Field J. H.* A Covariant path amplitude description of flavor oscillations: The Gribov-Pontecorvo phase for neutrino vacuum propagation is right // Eur. Phys. J. — 2003. — T. C30. — C. 305—325. — arXiv: [hep-ph/0211199 \[hep-ph\]](#).
139. *Kuo T.-K., Pantaleone J. T.* Nonadiabatic Neutrino Oscillations in Matter // Phys.Rev. — 1989. — T. D39. — C. 1930.
140. First evidence of pep solar neutrinos by direct detection in Borexino / G. Bellini [и др.] // Phys.Rev.Lett. — 2012. — T. 108. — C. 051302. — arXiv: [1110.3230 \[hep-ex\]](#).
141. *Eliezer S., Swift A. R.* Experimental Consequences of electron Neutrino-Muon-neutrino Mixing in Neutrino Beams // Nucl. Phys. — 1976. — T. B105. — C. 45—51.
142. *Fritzsch H., Minkowski P.* Vector-Like Weak Currents, Massive Neutrinos, and Neutrino Beam Oscillations // Phys. Lett. — 1976. — T. B62. — C. 72—76.
143. *Bilenky S. M., Pontecorvo B.* Again on Neutrino Oscillations // Lett. Nuovo Cim. — 1976. — T. 17. — C. 569.
144. *Akhmedov E. K., Smirnov A. Y.* Paradoxes of neutrino oscillations // Phys.Atom.Nucl. — 2009. — T. 72. — C. 1363—1381. — arXiv: [0905.1903 \[hep-ph\]](#).
145. *Giunti C.* Coherence and wave packets in neutrino oscillations // Found.Phys.Lett. — 2004. — T. 17. — C. 103—124. — arXiv: [hep-ph/0302026 \[hep-ph\]](#).
146. *Nussinov S.* Solar Neutrinos and Neutrino Mixing // Phys. Lett. — 1976. — T. B63. — C. 201—203.
147. *Kayser B.* On the Quantum Mechanics of Neutrino Oscillation // Phys.Rev. — 1981. — T. D24. — C. 110.
148. *Kiers K., Nussinov S., Weiss N.* Coherence effects in neutrino oscillations // Phys.Rev. — 1996. — T. D53. — C. 537—547. — arXiv: [hep-ph/9506271 \[hep-ph\]](#).
149. *Akhmedov E., Hernandez D., Smirnov A.* Neutrino production coherence and oscillation experiments // JHEP. — 2012. — T. 1204. — C. 052. — arXiv: [1201.4128 \[hep-ph\]](#).
150. *Almeida C., Jabs A.* SPREADING OF A RELATIVISTIC WAVE PACKET // Am. J. Phys. — 1984. — T. 52. — C. 921—925.

151. *Taylor J. R.* Scattering Theory: The quantum Theory on Nonrelativistic Collisions. — Wiley, New York, 1972.
152. *Goldberger M. L. W. K. M.* Collision Theory. — Wiley, New York, 1964.
153. *Naumov D.* On the theory of wave packets // *Phys.Part.Nucl.Lett.* — 2013. — Т. 10. — С. 642—650.
154. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables / под ред. М. Abramowitz, I. A. Stegun. — 10th. — Dover Publications, Incorporated, New York, 1974. — (National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series – 55).
155. *Федорюк М. В.* Метод перевала. — М. Наука, 1977.
156. *Naumov V. A., Shkirmanov D. S.* Covariant asymmetric wave packet for a field-theoretical description of neutrino oscillations // *Mod. Phys. Lett.* — 2015. — Т. A30, № 24. — С. 1550110. — arXiv: [1409.4669](https://arxiv.org/abs/1409.4669) [[hep-ph](#)].
157. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 1. — М. Наука, 1981.
158. Review of Particle Physics (RPP) / К. А. Olive [и др.] // *Chin.Phys.* — 2014. — Т. C38. — С. 090001. — URL: <http://pdg.lbl.gov> ; and 2015 update.
159. *Naumov V. A.* Atmospheric muons and neutrinos // 2nd Workshop on Methodical Aspects of Underwater/Ice Neutrino Telescopes / под ред. R. Wischnewski. — Zeuthen, Germany, DESY, 2002. — С. 31. — arXiv: [hep-ph/0201310](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0201310) [[hep-ph](#)]. — [hep-ph/0201310](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0201310).
160. *Lagage P.-O.* Accélération et propagation des rayons cosmiques. Production, oscillations et détection de neutrinos: дис. ... канд. / Lagage Pierre-Olivier. — Paris U., VI-VII, 1987. — URL: <http://inspirehep.net/record/1122091/files/Thesis-1987-Lagage.pdf>.
161. *Lindroos M., Mezzetto M.* Beta beams: Neutrino beams. — 2010. — URL: <http://www.worldscibooks.com/physics/p635.html>.
162. *Goodman M.* Planned reactor and beam experiments on neutrino oscillations // *Nucl. Phys.* — 2009. — Т. A827. — С. 518C—523C. — [821(2009)].
163. *Goodman M. C., Kaplan D. M., Sullivan Z.* Neutrino factories, superbeams and beta beams. Proceedings, 11th International Workshop on Neutrino Factories, Superbeams and Beta Beams, NuFact09, Fermilab and Illinois Institute of Technology, Chicago, Illinois, 20-25 July 2009 // *AIP Conf. Proc.* — 2010. — Т. 1222. — pp.1—509.
164. *Sato J.* Monoenergetic neutrino beam for long baseline experiments // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Т. 95. — С. 131804. — arXiv: [hep-ph/0503144](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0503144) [[hep-ph](#)].
165. *Peskin M., Schroeder D.* An Introduction to Quantum Field Theory. — Addison-Wesley Publishing Company, 1995. — (Advanced book classics). — URL: <https://books.google.ru/books?id=i35LALN0GosC>.
166. Large Impact Parameters Cutoff in Bremsstrahlung at Colliding Beams / А. Е. Blinov [и др.] // *Phys. Lett.* — 1982. — Т. B113. — С. 423.
167. *Tikhonov Y. / Tikhonov Yu.A.* — 1982.

168. *Kotkin G. L., Serbo V. G., Schiller A.* Processes with large impact parameters at colliding beams // *Int. J. Mod. Phys.* — 1992. — Т. А7. — С. 4707—4745.
169. *Case W. B.* Wigner functions and Weyl transforms for pedestrians // *American Journal of Physics.* — 2008. — Окт. — Т. 76. — С. 937—946.
170. *Karlovets D. V.* Probing phase of a scattering amplitude beyond the plane-wave approximation. — 2016. — arXiv: [1608.08858 \[hep-ph\]](#).
171. *Nowakowski M., Pilaftsis A.* On gauge invariance of Breit-Wigner propagators // *Z. Phys.* — 1993. — Т. С60. — С. 121—126. — arXiv: [hep-ph/9305321 \[hep-ph\]](#).
172. *Lopez Castro G., Lucio J. L., Pestieau J.* Remarks on the W propagator at the resonance // *Int. J. Mod. Phys.* — 1996. — Т. А11. — С. 563—570. — arXiv: [hep-ph/9504351 \[hep-ph\]](#).
173. *Naumov V. A., Shkirmanov D. S.* Extended Grimus-Stockinger theorem and inverse square law violation in quantum field theory // *Eur.Phys.J.* — 2013. — Т. С73, № 11. — С. 2627. — arXiv: [1309.1011 \[hep-ph\]](#).
174. *Beuthe M.* Towards a unique formula for neutrino oscillations in vacuum // *Phys.Rev.* — 2002. — Т. D66. — С. 013003. — arXiv: [hep-ph/0202068 \[hep-ph\]](#).
175. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Квантовая теория. Т. 10. Введение в теорию квантовых полей. — М.: Наука, 2008.
176. Study of the wave packet treatment of neutrino oscillation at Daya Bay / F. P. An [и др.]. — 2016. — arXiv: [1608.01661 \[hep-ex\]](#).
177. *Coelho J. A. B., Mann W. A., Bashar S. S.* Nonmaximal θ_{23} mixing at NOvA from neutrino decoherence. — 2017. — arXiv: [1702.04738 \[hep-ph\]](#).
178. Elastic scattering of vortex electrons provides direct access to the Coulomb phase / I. P. Ivanov [и др.] // *Phys. Rev.* — 2016. — Т. D94, № 7. — С. 076001. — arXiv: [1608.06551 \[hep-ph\]](#).
179. *Ivanov I. P., Serbo V. G.* Scattering of Twisted Particles: Extension to Wave Packets and orbital helicity // *Phys. Rev.* — 2011. — Т. А84. — С. 033804. — arXiv: [1105.6244 \[hep-ph\]](#).
180. Sum Rules for Neutrino Oscillations / I. Yu. Kobzarev [и др.] // *Sov. J. Nucl. Phys.* — 1982. — Т. 35. — С. 708. — [*Yad. Fiz.*35,1210(1982)].
181. *Naumov D.* On the theory of wave packets // *Phys.Part.Nucl.Lett.* — 2013. — Т. 10. — С. 642—650.
182. On the treatment of neutrino oscillations without resort to weak eigenstates / C. Giunti [и др.] // *Phys.Rev.* — 1993. — Т. D48. — С. 4310—4317. — arXiv: [hep-ph/9305276 \[hep-ph\]](#).
183. *Korenblit S. E., Taychenachev D. V.* Higher order corrections to the Grimus-Stockinger formula // *Phys. Part. Nucl. Lett.* — 2013. — Т. 10. — С. 610—614. — arXiv: [1304.5192 \[hep-th\]](#).
184. *Korenblit S. E., Taychenachev D. V.* Extension of Grimus–Stockinger formula from operator expansion of free Green function // *Mod. Phys. Lett.* — 2015. — Т. А30, № 14. — С. 1550074. — arXiv: [1401.4031 \[math-ph\]](#).

185. *Korenblit S. E., Sinitskaya A. V.* The role of short distance power corrections to differential and total cross-section and the optical theorem for potential scattering // *Modern Physics Letters A.* — 2017. — Т. 32, вып. 11. — С. 1750066. — arXiv: [1607.00625](https://arxiv.org/abs/1607.00625) [[quant-ph](#)].
186. Measurement of the solar neutrino capture rate with gallium metal. III: Results for the 2002–2007 data-taking period / J. N. Abdurashitov [и др.] // *Phys. Rev.* — 2009. — Т. C80. — С. 015807. — arXiv: [0901.2200](https://arxiv.org/abs/0901.2200) [[nucl-ex](#)].
187. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos / Y. Fukuda [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Т. 81. — С. 1562—1567.
188. Indications of neutrino oscillation in a 250 km long baseline experiment / M. H. Ahn [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Т. 90. — С. 041801.
189. Measurement of the rate of $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ interactions produced by 8B solar neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory / Q. R. Ahmad [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Т. 87. — С. 071301.
190. Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory / Q. Ahmad [и др.] // *Phys.Rev.Lett.* — 2002. — Т. 89. — С. 011301. — arXiv: [nucl-ex/0204008](https://arxiv.org/abs/nucl-ex/0204008) [[nucl-ex](#)].
191. Search for neutrino oscillations on a long baseline at the CHOOZ nuclear power station / M. Apollonio [и др.] // *Eur. Phys. J.* — 2003. — Т. C27. — С. 331—374.
192. Final results from the Palo Verde neutrino oscillation experiment / F. Boehm [и др.] // *Phys. Rev.* — 2001. — Т. D64. — С. 112001. — arXiv: [hep-ex/0107009](https://arxiv.org/abs/hep-ex/0107009) [[hep-ex](#)].
193. A. de Gouvea [и др.]. — 2013. — arXiv: [1310.4340](https://arxiv.org/abs/1310.4340) [[hep-ex](#)]. — URL: <https://inspirehep.net/record/1260555/files/arXiv:1310.4340.pdf>.
194. Determining neutrino mass hierarchy by precision measurements in electron and muon neutrino disappearance experiments / H. Minakata [и др.] // *Phys.Rev.* — 2006. — Т. D74. — С. 053008.
195. *Mikaelyan L., Sinev V.* // *Phys. Atom. Nucl.* — 1999. — Т. 62. — С. 2008—2012. — arXiv: [hep-ph/9811228](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9811228) [[hep-ph](#)]. — [*Yad. Fiz.*62,2177(1999)].
196. F. P. An [и др.]. — 2007.
197. J. K. Ahn [и др.]. — 2010.
198. F. Ardellier [и др.]. — 2006.
199. F. P. An [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Т. 108. — С. 171803.
200. J. Ahn [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Т. 108. — С. 191802.
201. *Abe Y.* // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Т. 108. — С. 131801.
202. Measurements of neutrino oscillation in appearance and disappearance channels by the T2K experiment with 6.6×10^{20} protons on target / K. Abe [и др.] // *Phys. Rev.* — 2015. — Т. D91, № 7. — С. 072010. — arXiv: [1502.01550](https://arxiv.org/abs/1502.01550) [[hep-ex](#)].
203. First measurement of electron neutrino appearance in NOvA / P. Adamson [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2016. — Т. 116, № 15. — С. 151806. — arXiv: [1601.05022](https://arxiv.org/abs/1601.05022) [[hep-ex](#)].

204. A side-by-side comparison of Daya Bay antineutrino detectors / A. F.P. [и др.] // Nuclear Inst. and Methods in Physics Research. — 2012. — Т. А 685. — С. 78—97. — arXiv: [1202.6181 \[physics.ins-det\]](#).
205. The Detector System of The Daya Bay Reactor Neutrino Experiment / F. P. An [и др.] // Nucl. Instrum. Meth. — 2016. — Т. А811. — С. 133—161. — arXiv: [1508.03943 \[physics.ins-det\]](#).
206. Production of a gadolinium-loaded liquid scintillator for the Daya Bay reactor neutrino experiment / W. Beriguete [и др.] // Nucl. Instrum. Meth. — 2014. — Т. А763. — С. 82—88. — arXiv: [1402.6694 \[physics.ins-det\]](#).
207. Automated calibration system for a high-precision measurement of neutrino mixing angle θ_{13} with the Daya Bay antineutrino detectors / J. L. Liu [и др.] // Nucl. Instr. Meth. A. — 2014. — Т. 750. — С. 19—37.
208. The muon system of the Daya Bay Reactor antineutrino experiment / F. P. An [и др.] // Nucl. Instrum. Meth. — 2015. — Т. А773. — С. 8—20. — arXiv: [1407.0275 \[physics.ins-det\]](#).
209. *Knoll G. Radiation Detection and Measurement* (4th ed.) — Hoboken, NJ : John Wiley, 2010. — URL: <http://www-spires.fnal.gov/spires/find/books/www?cl=QC787.C6K56::2010>.
210. Absolute calibration and monitoring of a spectrometric channel using a photomultiplier / E. H. Bellamy [и др.] // Nucl. Instr. Meth. A. — 1993. — Т. 339. — С. 468—476.
211. T. Skwarnicki, Ph.D Thesis, DESY F31-86-02(1986), Appendix E; M.J. Oreglia, Ph.D Thesis, SLAC-236(1980), Appendix D; J. E. Gaiser, Ph.D Thesis, SLAC-255(1982), Appendix F.
212. GEANT4: A Simulation toolkit / S. Agostinelli [и др.] // Nucl. Instrum. Meth. — 2003. — Т. А506. — С. 250—303.
213. New measurement of θ_{13} via neutron capture on hydrogen at Daya Bay / F. P. An [и др.] // Phys. Rev. — 2016. — Т. D93. — С. 072011. — arXiv: [1603.03549 \[hep-ex\]](#).
214. Independent measurement of the neutrino mixing angle θ_{13} via neutron capture on hydrogen at Daya Bay / F. P. An [и др.] // Phys. Rev. — 2014. — Т. D90, № 7. — С. 071101. — arXiv: [1406.6468 \[hep-ex\]](#).
215. Production of Radioactive Isotopes through Cosmic Muon Spallation in KamLAND / S. Abe [и др.] // Phys. Rev. — 2010. — Т. C81. — С. 025807. — arXiv: [0907.0066 \[hep-ex\]](#).
216. Measuring cosmogenic Li-9 background in a reactor neutrino experiment / L.-j. Wen [и др.] // Nucl. Instrum. Meth. — 2006. — Т. А564. — С. 471—474. — arXiv: [hep-ex/0604034 \[hep-ex\]](#).
217. Neutron Calibration Sources in the Daya Bay Experiment / J. Liu [и др.] // Nucl. Instrum. Meth. — 2015. — Т. А797. — С. 260—264. — arXiv: [1504.07911 \[physics.ins-det\]](#).
218. F. P. An [и др.] // Chin. Phys. C. — 2013. — Т. 37. — С. 011001.
219. W. Q. Gu [и др.]. — 2015. — arXiv: [1512.00295 \[physics.ins-det\]](#).

220. *J. Zhao, Z. Y. Yu, J. L. Liu, X. B. Li, F. H. Zhang and D. M. Xia* $^{13}\text{C}(\alpha, n)^{16}\text{O}$ background in a liquid scintillator based neutrino experiment // *Chin. Phys. C.* — 2014. — Т. 38. — С. 116201.
221. *Wojcik M., Zuzel G.* ^{226}Ra , ^{210}Pb , ^{210}Bi and ^{210}Po deposition and removal from surfaces and liquids // *J. Radioanal. Nucl. Chem.* — 2013. — Т. 296. — С. 639—645.
222. JENDL-4.0: A New Library for Nuclear Science and Engineering / K. Shibata [и др.] // *J. of Nucl. Sci. and Tech.* — 2011. — Т. 48, № 1. — С. 1—30.
223. Towards a More Complete and Accurate Experimental Nuclear Reaction Data Library (EXFOR): International Collaboration Between Nuclear Reaction Data Centres (NRDC) / N. Otuka [и др.] // *Nuclear Data Sheets.* — 2014. — Т. 120. — С. 272—276. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0090375214005171>.
224. <http://www.srim.org>.
225. Improved Measurement of the Reactor Antineutrino Flux and Spectrum at Daya Bay / F. P. An [и др.]. — 2016. — arXiv: [1607.05378](https://arxiv.org/abs/1607.05378) [hep-ex].
226. *Huber P.* On the determination of anti-neutrino spectra from nuclear reactors // *Phys.Rev.* — 2011. — Т. C84. — С. 024617. — arXiv: [1106.0687](https://arxiv.org/abs/1106.0687) [hep-ph].
227. *Копейкин В. И.* Поток и спектр антинейтрино ядерного реактора // *Ядерная Физика.* — 2012. — Т. 75. — С. 165.
228. APOLLO2: Vailidation/Qualification. — http://nucleaire-saclay.cea.fr/Phoce/Vie_des_labos/Ast/ast_technique.php?id_ast=351.
229. *Marleau R. R. G., Hebert A., Roy R.* A User Guide for DRAGON // Report. — 2001. — Т. IGE—236.
230. *International Network of Nuclear Structure and Decay Data Evaluators* Evaluated Nuclear Structure Data File. — URL: <http://www.nndc.bnl.gov/ensdf/>.
231. *Japan Atomic Energy Agency* Japanese Evaluated Nuclear Data Library. — URL: <http://wwwndc.jaea.go.jp/jendl/jendl.html>.
232. *Nuclear Energy Agency* Joint Evaluated Fission and Fusion File. — URL: <http://www.oecd-neo.org/dbdata/jeff/>.
233. Integral Anti-neutrino Spectra Derived From Experimental Beta Spectra of Individual Fission Products / O. Tengblad [и др.] // *Nucl.Phys.* — 1989. — Т. A503. — С. 136—160.
234. Reactor Decay Heat in Pu-239: Solving the gamma Discrepancy in the 4-3000-s Cooling Period / A. Algora [и др.] // *Phys.Rev.Lett.* — 2010. — Т. 105. — С. 202501.
235. Reactor Anti-neutrino Spectra and Their Application to Anti-neutrino Induced Reactions. 2. / P. Vogel [и др.] // *Phys.Rev.* — 1981. — Т. C24. — С. 1543—1553.
236. Improved Predictions of Reactor Antineutrino Spectra / T. Mueller [и др.] // *Phys.Rev.* — 2011. — Т. C83. — С. 054615. — arXiv: [1101.2663](https://arxiv.org/abs/1101.2663) [hep-ex].

237. New antineutrino energy spectra predictions from the summation of beta decay branches of the fission products / M. Fallot [и др.] // Phys.Rev.Lett. — 2012. — Т. 109. — С. 202504. — arXiv: [1208.3877 \[nucl-ex\]](#).
238. *Dwyer D. A., Langford T. J.* Spectral Structure of Electron Antineutrinos from Nuclear Reactors // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Т. 114. — С. 012502.
239. Systematic Uncertainties in the Analysis of the Reactor Neutrino Anomaly / A. C. Hayes [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2014. — Т. 112. — С. 202501. — arXiv: [1309.4146 \[nucl-th\]](#).
240. *Von Feilitzsch F., Hahn A., Schreckenbach K.* Experimental Beta Spectra From Pu-239 And U-235 Thermal Neutron Fission Products And Their Correlated Anti-Neutrinos Spectra // Phys.Lett. — 1982. — Т. B118. — С. 162—166.
241. Determination Of The Anti-Neutrino Spectrum From U-235 Thermal Neutron Fission Products Up To 9.5-MeV / K. Schreckenbach [и др.] // Phys.Lett. — 1985. — Т. B160. — С. 325—330.
242. Anti-neutrino Spectra From ²⁴¹Pu and ²³⁹Pu Thermal Neutron Fission Products / A. Hahn [и др.] // Phys.Lett. — 1989. — Т. B218. — С. 365—368.
243. Experimental Determination of the Antineutrino Spectrum of the Fission Products of ²³⁸U / N. Haag [и др.]. — 2013. — arXiv: [1312.5601 \[nucl-ex\]](#).
244. *Kopeikin V., Mikaelyan L., Sinev V.* Antineutrino background from spent fuel storage in sensitive searches for theta(13) at reactors // Phys.Atom.Nucl. — 2006. — Т. 69. — С. 185—188. — arXiv: [hep-ph/0412044 \[hep-ph\]](#).
245. A study of antineutrino spectra from spent nuclear fuel at Daya Bay / B. Zhou [и др.] // Chin.Phys. — 2012. — Т. C36. — С. 1—5.
246. *Lewis C.* Revisiting the SNF: talk. — 01.2016. — URL: <http://dayabay.ihep.ac.cn/cgi-bin/DocDB/ShowDocument?docid=9408>.
247. A Simple model of reactor cores for reactor neutrino flux calculations for the KamLAND experiment / K. Nakajima [и др.] // Nucl.Instrum.Meth. — 2006. — Т. A569. — С. 837—844. — arXiv: [physics/0607126 \[physics.data-an\]](#).
248. Search for Neutrino Oscillations at a Fission Reactor / H. Kwon [и др.] // Phys. Rev. — 1981. — Т. D24. — С. 1097—1111.
249. *et al. H. A.* Neutrino oscillations I.L.L experiment reanalysis // Appl. Radiat. Isot. — Т. 46. — С. 1097—1111.
250. Neutrino Oscillation Experiments at the Gosgen Nuclear Power Reactor / G. Zacek [и др.] // Phys. Rev. — 1986. — Т. D34. — С. 2621—2636.
251. Detection of Anti-neutrinos in the Flux From Two Reactors / G. S. Vidyakin [и др.] // Sov. Phys. JETP. — 1987. — Т. 66. — С. 243—247. — [Zh. Eksp. Teor. Fiz.93,424(1987)].
252. Limitations on the characteristics of neutrino oscillations / G. S. Vidyakin [и др.] // JETP Lett. — 1994. — Т. 59. — С. 390—393. — [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.59,364(1994)].

253. A Study of the Reaction $\bar{\nu}_e + P \rightarrow e^+ + N$ on a Nuclear Reactor / A. I. Afonin [и др.] // Sov. Phys. JETP. — 1988. — Т. 67. — С. 213—221. — [Zh. Eksp. Teor. Fiz.94N2,1(1988)].
254. Measuring the anti-electron-neutrino + p \rightarrow n + e⁺ cross-section and beta decay axial constant in a new experiment at Rovno NPP reactor. (In Russian) / A. A. Kuvshinnikov [и др.] // JETP Lett. — 1991. — Т. 54. — С. 253—257. — [Sov. J. Nucl. Phys.52,300(1990)].
255. Reactor experiments of a new type to detect neutrino oscillations / S. N. Ketov [и др.] // JETP Lett. — 1992. — Т. 55. — С. 564—568. — [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.55,544(1992)].
256. Study of reactor anti-neutrino interaction with proton at Bugey nuclear power plant / Y. Declais [и др.] // Phys. Lett. — 1994. — Т. B338. — С. 383—389.
257. Search for neutrino oscillations at 15-meters, 40-meters, and 95-meters from a nuclear power reactor at Bugey / Y. Declais [и др.] // Nucl. Phys. — 1995. — Т. B434. — С. 503—534.
258. Results of a two position reactor neutrino oscillation experiment / Z. D. Greenwood [и др.] // Phys. Rev. — 1996. — Т. D53. — С. 6054—6064.
259. Measurement of the Reactor Antineutrino Flux and Spectrum at Daya Bay / F. P. An [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Т. 116, № 6. — С. 061801. — arXiv: [1508.04233](#) [hep-ex].
260. Improved measurements of the neutrino mixing angle θ_{13} with the Double Chooz detector / Y. Abe [и др.] // JHEP. — 2014. — Т. 1410. — С. 86.
261. *Seo S.-H.* New Results from RENO and The 5 MeV Excess. — 2014. — arXiv: [1410.7987](#) [hep-ex].
262. *Vogel P., Beacom J. F.* Angular distribution of neutron inverse beta decay, $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$ // Phys. Rev. — 1999. — Т. D60. — С. 053003. — arXiv: [hep-ph/9903554](#) [hep-ph].
263. *Wilkinson D. H.* Phase space for neutron beta-decay: An update // Nucl.Instrum.Meth. — 1998. — Т. A404. — С. 305—310.
264. Review of particle physics / K. Nakamura [и др.] // J.Phys. — 2010. — Т. G37. — С. 075021.
265. Review of Particle Physics (RPP) / J. Beringer [и др.] // Phys.Rev. — 2012. — Т. D86. — С. 010001.
266. Measurement of the neutron lifetime using a gravitational trap and a low-temperature Fomblin coating / A. Serebrov [и др.] // Phys.Lett. — 2005. — Т. B605. — С. 72—78. — arXiv: [nucl-ex/0408009](#) [nucl-ex].
267. Neutron lifetime measurement with the UCN trap-in-trap MAMBO II / A. Pichlmaier [и др.] // Phys.Lett. — 2010. — Т. B693. — С. 221—226.
268. Quasielastic scattering in the interaction of ultracold neutrons with a liquid wall and application in a reanalysis of the Mambo I neutron-lifetime experiment / A. Steyerl [и др.] // Phys.Rev. — 2012. — Т. C85. — С. 065503.
269. Uncertainties in the Anti-neutrino Production at Nuclear Reactors / Z. Djurcic [и др.] // J.Phys. — 2009. — Т. G36. — С. 045002. — arXiv: [0808.0747](#) [hep-ex].

270. Improved calculation of the energy release in neutron-induced fission / X. B. Ma [и др.] // Phys.Rev. — 2013. — Т. C88, № 1. — С. 014605.
271. *Kopeikin V. I.* Flux and spectrum of reactor antineutrinos // Phys. Atom. Nucl. — 2012. — Т. 75. — С. 143—152. — [Yad. Fiz.75N2,165(2012)].
272. V. Kopeikin [и др.] // Atom. Phys. Nucl. — 2004. — Т. 67. — С. 1892.
273. *Feldman G. J., Cousins R. D.* A Unified approach to the classical statistical analysis of small signals // Phys.Rev. — 1998. — Т. D57. — С. 3873—3889. — arXiv: [physics / 9711021](https://arxiv.org/abs/physics/9711021) [[physics.data-an](https://arxiv.org/abs/physics/9711021)].
274. *Wilks S.* The Large-Sample Distribution of the Likelihood Ratio for Testing Composite Hypotheses // Annals Math.Statist. — 1938. — Т. 9, № 1. — С. 60—62.
275. Precise Measurement of the Neutrino Mixing Parameter θ_{23} from Muon Neutrino Disappearance in an Off-axis Beam / K. Abe [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2014. — Т. 112. — С. 181801.
276. Combined analysis of ν_μ disappearance and $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ appearance in MINOS using accelerator and atmospheric neutrinos / P. Adamson [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2014. — Т. 112. — С. 191801. — arXiv: [1403.0867](https://arxiv.org/abs/1403.0867) [[hep-ex](https://arxiv.org/abs/1403.0867)].
277. First measurement of muon-neutrino disappearance in NOvA / P. Adamson [и др.] // Phys. Rev. — 2016. — Т. D93, № 5. — С. 051104. — arXiv: [1601.05037](https://arxiv.org/abs/1601.05037) [[hep-ex](https://arxiv.org/abs/1601.05037)].
278. *Wendell R.* Atmospheric Results from Super-Kamiokande // XXVI International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics. — 2014. — arXiv: [1412.5234](https://arxiv.org/abs/1412.5234) [[hep-ex](https://arxiv.org/abs/1412.5234)].
279. Determining neutrino oscillation parameters from atmospheric muon neutrino disappearance with three years of IceCube DeepCore data / M. G. Aartsen [и др.] // Phys. Rev. — 2015. — Т. D91, № 7. — С. 072004. — arXiv: [1410.7227](https://arxiv.org/abs/1410.7227) [[hep-ex](https://arxiv.org/abs/1410.7227)].
280. Observation of Energy and Baseline Dependent Reactor Antineutrino Disappearance in the RENO Experiment / J. H. Choi [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Т. 116, № 21. — С. 211801. — arXiv: [1511.05849](https://arxiv.org/abs/1511.05849) [[hep-ex](https://arxiv.org/abs/1511.05849)].
281. *Ishitsuka M.* New Results of Double Chooz // 51st Rencontres de Moriond, Electroweak Interactions and Unified Theories. — 2016. — URL: <https://indico.in2p3.fr/event/12279/other-view?view=standard>.
282. Electron neutrino and antineutrino appearance in the full MINOS data sample / P. Adamson [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Т. 110. — С. 171801.
283. *Tanaka H.* T2K: Latest Results // XXVII International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics. — 2016.
284. *Evans J.* New Result from MINOS and MINOS+ // XXVII International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics. — 2016.
285. *Vahle P.* New Results from NOvA // XXVII International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics. — 2016.

286. *Moriyama S.* New atmospheric and solar results from Super-Kamiokande // XXVII International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics. — 2016.
287. *Koskinen J.* Atmospheric neutrino results from IceCube/DeepCore and plans for PINGU // XXVII International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics. — 2016.
288. New Measurement of Antineutrino Oscillation with the Full Detector Configuration at Daya Bay / F. P. An [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Т. 115, № 11. — С. 111802. — arXiv: [1505.03456](https://arxiv.org/abs/1505.03456) [hep-ex].
289. Measurement of electron antineutrino oscillation based on 1230 days of operation of the Daya Bay experiment / F. P. An [и др.] // Phys. Rev. — 2017. — Т. D95. — С. 072006. — arXiv: [1610.04802](https://arxiv.org/abs/1610.04802) [hep-ex].
290. Observation of electron-antineutrino disappearance at Daya Bay / A. F.P. [и др.] // Phys.Rev.Lett. — 2012. — Т. 108. — С. 171803. — arXiv: [1203.1669](https://arxiv.org/abs/1203.1669) [hep-ex].
291. *Vednyakov V. A., Naumov D. V., Smirnov O. Y.* Neutrino physics and JINR // Phys. Usp. — 2016. — Т. 59, № 3. — С. 225—253.
292. *Акиншин А.* Russian-Phd-Latex-Dissertation-Template. — URL: <https://github.com/AndreyAkinshin/Russian-Phd-Latex-Dissertation-Template>.
293. *Бьеркен Д., Дрелл С. Д.* Релятивистская квантовая механика. — Москва : Наука, 1978.
294. *Kestin J., Persen L. N.* On the error function of a complex argument // Z. Angew. Math. Phys. — 1956. — Т. 7. — С. 33.
295. *Zaker T. A.* Calculation of the complementary error function of complex argument // J. Comp. Phys. — 1969. — Т. 4. — С. 427.
296. *Mori M.* A method for evaluation of the error function of real and complex variable with high relative accuracy // Publ. RIMS, Kyoto Univ. — 1983. — Т. 19. — С. 1081.
297. Evaluation of the asymmetric Voigt profile and complex error functions in terms of the Kummer functions // Acta. Phys. Polon. A. — 2004. — Т. 106. — С. 817.
298. *Ramond P.* Field theory: A modern primer. — Frontiers in Physics Series, Vol. 74. 2nd edition, revised printing, Westview, 2001.
299. *Bellman R.* Introduction to matrix analysis. — McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1960.
300. *Bilenky S. M.* Введение в диаграммную технику Фейнмана. — М.: Атомиздат, 1971.

Список рисунков

- 1.1 Вероятность выживания мюонных нейтрино $P_{\mu\mu}$ как функция L/E (длина пути нейтрино/энергия нейтрино). Точки с ошибками – результаты измерения коллаборации SuperKamiokande. Синяя кривая – теоретическое предсказание в гипотезе нейтринных осцилляций. Рис. взят из работы [19]. 23
- 1.2 Вероятность выживания электронных антинейтрино как функция L/E (длина пути нейтрино/энергия нейтрино). Точки с ошибками – результаты измерения коллаборации KamLAND. Гистограмма и кривая, выделенная синим цветом, – теоретическое предсказание в гипотезе нейтринных осцилляций. Рис. взят из работы [20]. 23
- 1.3 Вероятность выживания электронных антинейтрино как функция L/E (длина пути нейтрино/энергия нейтрино). Точки с ошибками – результаты измерения коллаборации DayaBay. Красная кривая – теоретическое предсказание в гипотезе нейтринных осцилляций. Обозначения EN1, EN2 и EN3 относятся к данным, набранным в разных экспериментальных залах. Рис. взят из работы [35] 24
- 1.4 Вероятность выживания солнечных электронных нейтрино как функция энергии нейтрино E . Точки с ошибками – экспериментальные данные. Линия с полосой неопределенности – теоретическое предсказание в гипотезе нейтринных осцилляций с учетом влияния вещества. Здесь Φ_{CC} – поток электронных нейтрино, Φ_{NC} – полный поток нейтрино. Символами $W_{\nu\chi}$ обозначена вероятность выживания соответствующего потока электронных нейтрино по результатам эксперимента Борексина, KL (${}^7\text{Be}$) — вероятность выживания потока электронных нейтрино из реакции ${}^7\text{Be}$ по результатам эксперимента KamLAND Рисунок взят из работы [37]. 25
- 1.5 Сечение взаимодействия $e^+e^- \rightarrow$ адроны как функция полной энергии сталкивающихся пары e^+e^- , измеренное в экспериментах ALEPH, DELPH, L3, OPAL (точки с ошибками, увеличенные в 10 раз, чтобы их можно было различить) и теоретическое вычисление в рамках Стандартной Модели с числом поколений нейтрино равным 2, 3, 4. Рисунок взят из работы [41]. 27
- 1.6 Электрослабое $d\sigma_W/dT$ и электромагнитное $d\sigma_{EM}/dT$ (для разных значений магнитного момента нейтрино) сечения взаимодействия $\nu_e e$, усредненные по спектру антинейтрино от делений ядра ${}^{235}\text{U}$, как функции кинетической энергии рассеянного электрона. Рис. взят из работы [55]. 31

- 2.1 На рисунке слева представлена функция $K(T)$ для $m_\beta = 0$ и $m_\beta \neq 0$. Хорошо видно искажение формы распределения в конце спектра. Также показано характерное экспериментальное разрешение. Реальная форма спектра искажается еще больше из-за ядерных эффектов и учета взаимодействия вылетевшего электрона с частицами вещества в экспериментальной установке. На рисунке справа (рисунок из обзора [70]) приведено измеренное значение эффективной массы нейтрино m_β^2 в зависимости от года публикации. 36
- 2.2 Сравнительная оценка чувствительности нейтринных экспериментов к определению иерархии масс нейтрино в зависимости от иерархии, реализуемой в природе [81]. Для экспериментов на большой базе области, выделенные сплошными (штрихованными) линиями, соответствуют значению $\theta_{23} = 40^\circ(50^\circ)$ 39
- 2.3 Вероятность осцилляций $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ и $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ как функция энергии и длины пути распространения нейтрино для нормальной иерархии, предполагая $\delta = 0$ (левые рисунки). Вероятность осцилляций $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ и $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ как функция энергии для $L=1300$ км и трех значений δ ($-\pi/2, 0, \pi/2$). 1st vac. osc. max — первый максимум вакуумных осцилляций; 2nd vac. osc. max — второй максимум вакуумных осцилляций. Желтая линия соответствует вероятности появления электронных нейтрино только за счет смешивания ν_1 и ν_2 . Рисунки взяты из работы [82]. 40
- 2.4 Вероятность осцилляций $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ и $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ как функция энергии и длины пути распространения нейтрино для обратной иерархии, предполагая $\delta = 0$ (левые рисунки). Вероятность осцилляций $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ и $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ как функция энергии для $L=1300$ км и трех значений δ ($-\pi/2, 0, \pi/2$). 1st vac. osc. max — первый максимум вакуумных осцилляций; 2nd vac. osc. max — второй максимум вакуумных осцилляций. Желтая линия соответствует вероятности появления электронных нейтрино только за счет смешивания ν_1 и ν_2 . Рисунки взяты из работы [82]. 41
- 2.5 Эффективная масса $|m_{\beta\beta}|$ как функция минимальной массы нейтрино. В случае нормальной иерархии $m_{\min} = m_1$ (NS). Для обратной $m_{\min} = m_3$ (IS). Рисунок взят из работы [92]. 43
- 2.6 Ожидаемый геонейтринный сигнал в детекторе JUNO (кривая G) в сравнении с сигналом от реакторов до включения (кривая R_{OFF}) и после включения (кривая R_{ON}) реакторов в Яньджиане (17.4 ГВт) и Тайшане (18.4 ГВт). Штриховая линия соответствует суммарному сигналу после включения детектора. Рисунок из работы [135]. 51
- 3.1 Параметр адиабатичности γ в зависимости от энергии нейтрино, вычисленный для Солнца. 64
- 3.2 Вероятность выживания электронного нейтрино, рожденного в Солнце, как функция энергии этой частицы. Модельные предсказания (заштрихованная область), данные (точки с ошибками). Рисунок взят из работы [140]. 65
- 4.1 Схематическая иллюстрация малости подынтегрального выражения в ур. (4.36) при больших значениях $|p_*|$ 91

4.2	3-мерные графики функций $ \zeta $ и φ в переменных $\sigma^2 x_*^0/m$ и $\sigma^2 \mathbf{x}_* /m$	99
4.3	3-мерный график функции $ \psi_G(\mathbf{0}, x_*) $ (слева) и ее увеличенный фрагмент в окрестности максимума (справа) в переменных $\sigma^2 x_*^0/m$ и $\sigma^2 x_*^3/m$ (предполагается, что $\mathbf{x}_* = (0, 0, x_*^3)$). Расчет выполнен с $\sigma = 0.1m$	99
5.1	Макроскопическая фейнмановская диаграмма общего вида с обменом массивным нейтрино.	119
5.2	Пример макроскопической фейнмановской диаграммы, описывающей $\pi_{\mu 2}$ распад в пространственно-временной точке x_1 и последующее квазиупругое нейтринорождение τ -лептона в точке x_2 . Точки x_1 и x_2 могут быть разделены макроскопически большим пространственно-временным интервалом.	121
5.3	Диаграммы низшего порядка по электрослабому взаимодействию, описывающие μ_{e3} распад в источнике и квазиупругое рождение τ -лептона в детекторе.	122
5.4	Диаграммы низшего порядка по электрослабому взаимодействию, описывающие синтез дейтрона в <i>per</i> -реакции в источнике и нейтринорождение электрона на ядре галлия (а) и на свободном электроде (б,в) в детекторе.	123
5.5	Условный образ “классических мировых трубок” сталкивающихся волновых пакетов. Трубки изображают пространственно-временные цилиндрические объемы, заметаемые классически движущимися эллипсоидами, служащими наглядными моделями волновых пакетов. Прицельная точка X однозначно определяется скоростями v_x пакетов и пространственно-временными точками $\tilde{x}_x = \tilde{x}_x(\theta_x)$, произвольно выбранными на осях симметрии трубок (по которым в среднем движутся центры волновых пакетов). Эти оси отнюдь не обязаны пересекать точку X , но если конфигурация координат и скоростей in- и out-пакетов такова, что прицельная точка оказывается внутри области пересечения <i>всех</i> мировых трубок пакетов, то подавление такой конфигурации мало (отсутствует в случае точного пересечения осей в точке X); в противном же случае оно велико.	131
5.6	Схематическая иллюстрация двух конфигураций пары перекрывающихся волновых пакетов в системе их центра инерции. Левая конфигурация соответствует фактору $ \psi_1(\mathbf{p}_1, y_1 - x)\psi_2(\mathbf{p}_2, y_2 - x) = \psi_1(\mathbf{p}_1^*, y_1^* - x^*)\psi_2(-\mathbf{p}_1^*, y_2^* - x^*) $ в подынтегральном выражении числителя, а правая – фактору $ \psi_1(\mathbf{p}_1, x)\psi_2(\mathbf{p}_2, x) = \psi_1(\mathbf{p}_1^*, x^*)\psi_2(-\mathbf{p}_1^*, x^*) $ в подынтегральном выражении знаменателя в ур. (5.24). Стрелками показаны импульсы $\pm \mathbf{p}_1^*$	132
5.7	Макроскопическая диаграмма, описывающая процесс ур. (5.42).	138
5.8	Функция декогерентности $S_0(t, t')$ и график её плотности распределения.	159
5.9	Зависимость $S_0(t, t)$ от t	160
5.10	Профили функции декогерентности $S(t, t', b)$ вычисленные при девяти значениях параметра b , указанных на панелях.	161
5.11	Функция $S(t, t, b)$ в зависимости от b при фиксированных значениях t , указанных в легенде. Для сравнения пунктирной кривой показана асимптотика функции $S(t, t, b)$ при $t \rightarrow \infty$ и конечных b	162

- 5.12 Вероятность выживания $\bar{\nu}_e$ (на расстоянии $L = 52$ км) как функция энергии антинейтрино в плосковолновой модели (синяя линия) и в модели с волновым пакетом нейтрино (коричневая линия соответствует $\sigma_{\text{rel}} = 0.2$), (зеленая линия соответствует $\sigma_{\text{rel}} = 0.05$). 168
- 6.1 Размещение эксперимента Daya Bay. Реакторы АЭС Daya Bay и Ling Ao (красные кружки) располагаются на узком прибрежном шельфе между побережьем и внутренними горами. Пара AD, установленных в каждом подземном экспериментальном холле вблизи с реакторами (ЕН1 и ЕН2), измеряют поток $\bar{\nu}_e$, испущенных реакторами, в то время как четыре AD в дальнем экспериментальном холле (ЕН3) измеряют дефицит потока $\bar{\nu}_e$ вследствие осцилляций нейтрино. Детекторы были построены и протестированы в SAB, перевезены в LS hall для заполнения ЖС и затем установлены в экспериментальный холл. 181
- 6.2 Сечение антинейтринного детектора (AD). Сцинтилляционный свет рождается, когда реакторное $\bar{\nu}_e$ взаимодействует в центральном 20 тонном объеме Gd-ЖС, заключенном в прозрачном акриловом контейнере. Мишенная часть окружена дополнительными 20 тоннами чистого ЖС для увеличения эффективности детектирования γ -квантов, рожденных в центральной части. Сцинтилляционный свет регистрируется 192 ФЭУ, установленными на внутренней поверхности SSV, заполненного минеральным маслом. 184
- 6.3 Близкие детекторы. Два антинейтринных детектора погружены в водно-черенковский детектор, который служит как для пассивной защиты от радиации, так и в качестве активной вето системы против космогенных мюонов. Шторка из тайвека делит бассейн на два оптически разделенных детектора, внутренний и внешний водные буферы. Сверху бассейн накрыт системой РПК, обеспечивающих дополнительной идентификацией мюонов. 185
- 6.4 Пример распределения заряда (за вычетом постоянной подложки) АЦП некоррелированных сигналов от ФЭУ (гистограмма). Результаты модели, описываемые ур. (6.6), показаны сплошной линией. 189
- 6.5 Одноэлектронный средний заряд, усредненный также по всем каналам в каждом AD, как функция времени. Затемненная область ограничивает период лета 2012, в течение которого проводились работы по инсталляции детекторов, включались/выключались источники питания, прерывался набор данных. 190

- 6.6 Наблюдаемый световойход в зависимости от времени, в единицах числа наблюдаемых ф.э./МэВ, полученный при помощи источника ^{60}Co , еженедельно устанавливаемого в центр детектора (верхний рисунок), и при помощи захватов медленных нейтронов, равномерно распределенных в объеме детектора, ядрами гадолиния (нижний рисунок). Световойход уменьшается $\sim 1\%$ в год, что согласованно наблюдается всеми детекторами. Разница в световыходе, измеренная двумя калибровками, возникает из-за нелинейности в отклике детекторов. Вертикальные затененные области соответствуют летнему периоду 2012 года, в течение которого были установлены последние два детектора, что приводило к частичной остановке в наборе данных. . . . 193
- 6.7 Вариация световыхода относительно вертикального (z) и радиального (r) положения взаимодействия в детекторе ЕН1-AD1 для реконструкции А (голубая поверхность). Функциональная форма вариации $f_b(z,r)$ основана на результатах моделирования, с параметрами уточненными сравнением с калибровочными данными по измерению выхода света от источника ^{60}Co , устанавливаемого в точках АСU А ($r=0$ мм), АСU В ($r=1350$ мм) и АСU С ($r=1772.5$ мм) (красные точки). Хотя модельная поправка варьировалась от -6% до 17% в объеме детектора, она оказалась универсальной для всех детекторов, отличаясь не более чем на 3.2% между всеми восемью детекторами. . 195
- 6.8 Вариация световыхода относительно вертикальной (z) и радиальной (r^2) положений захвата нейтронов в детекторе ЕН1-AD1 для метода реконструкции В. Каждая ячейка соответствует отношению наблюдаемого световыхода к среднему по Gd-ЖС детектору. Пунктирные линии соответствуют границе между внутренним Gd-ЖС и внешним ЖС объемов детектора. Нейтроны, захваченные ядрами гадолиния использовались для карты Gd-ЖС объема, а захваты на водороде были использованы для карты внешнего ЖС объема. Небольшая разница ($<3.0\%$) в неоднородностях наблюдается для восьми детекторов. 196
- 6.9 Сравнение вариаций в световыходе относительно радиального (верхний рисунок) и вертикального (нижний рисунок) положения в методе реконструкции В. Каждая точка соответствует отношению наблюдаемого световыхода к усредненному по Gd-ЖС объему. Вариация, в первую очередь, связана с оптическим акцептансом ФЭУ, зависящим от положения, что хорошо воспроизводится моделированием. Небольшая разница ($<3.0\%$) в неоднородностях наблюдается для восьми детекторов. . 197
- 6.10 Стабильность энергии n-H захвата от времени, измеренная при помощи источников ^{60}Co (метод А, верхний рисунок), и при помощи нейтронов от развала ядер (метод В, нижний рисунок). Каждая точка соответствует одному дню. Затененная область относится к лету 2012. 198
- 6.11 Сравнение средней реконструированной энергии в разных антинейтринных детекторах для набора калибровочных эталонов: (а) калибровка с использованием источников ^{60}Co (реконструкция А) и (б) калибровка с использованием нейтронов от развалов ядер (реконструкция В). E_{AD} – реконструированная энергия, определенная для каждого AD. $\langle E \rangle$ – реконструированная энергия, усредненная по восьми детекторам. Приведены только статистические ошибки. 199

- 6.12 Энергетические разрешения, измеренные для калибровочных источников, захватов нейтронов после ОБР и естественной α радиоактивности в сцинтилляторе (открытые голубые маркеры). Разрешение энергии, ограниченное статистическими неопределенностями, моделируется согласно ур. (6.14) (синяя сплошная линия). Разрешения согласуются с результатами моделирования (сплошные оранжевые маркеры). Моделирование предсказывает, что внутреннее разрешение энергии (пунктирная оранжевая линия) должно быть немного лучше для калибровочных источников (сплошная оранжевая линия), чем наблюдаемое из-за эффекта оптической тени контейнеров в которые помещены источники. Внутреннее разрешение было подтверждено с использованием естественной α радиоактивности в сцинтилляторе. 201
- 6.13 Отношение наблюдаемой энергии к истинной для калибровочных источников γ -квантов в сравнении с наилучшей моделью нелинейности сцинтиллятора и с учетом черенковского излучения. В качестве “эффективной” энергии источников γ -квантов использовались соответствующие средние энергии. Для иллюстративных целей оценка вклада электроники в нелинейный отклик детектора была вычтена из данных и модели. 203
- 6.14 Сравнение измеренного спектра электронов от распадов ^{12}B с модельным, учитывающим оценку нелинейности сцинтиллятора и электроники. 204
- 6.15 Оценка отношения реконструированной энергии к истинной, $E_{\text{rec}}/E_{\text{true}}$, для взаимодействий позитрона в мишени антинейтринного детектора (сплошная красная линия). Энергия 0.511-МэВ от двух аннигиляционных γ -квантов включена в определение энергии. Параметры модели были определены с использованием калибровочных данных от источников γ -квантов и электронов от распадов ^{12}B . Полученная полоса соответствующая 68% У.Д. (серая закрашенная область) ограничивает это отношение лучше 1% в большей части интересующей нас области энергий. Независимая оценка, основанная на анализе $\beta+\gamma$ спектров от распадов висмута и таллия, а также на определении конечной точки электронного спектра от распадов мюона с энергией 53 МэВ, привела к согласующейся модели (голубая пунктирная линия). 205
- 7.1 (*Верхний рисунок*) Распределения разницы времен детектирования первичного и задержанного сигналов ОБР кандидатов для каждого детектора за весь период набора данных. (*Нижний рисунок*) Отношение наблюдаемого распределения в каждом детекторе к усредненному по всем детекторам. Согласованность этих распределений ограничивает возможную систематическую вариацию в доле ОБР нейтронов, захватываемых гадолинием между всеми детекторами. 209
- 7.2 Сравнение времен захвата нейтрона, измеренных в каждом детекторе для нейтронов от ОБР, ^{241}Am - ^{13}C , развалов ядер. Данные от ОБР объединены для детекторов дальнего холла. Наблюдаемое время захвата отличается не более чем на $\pm 0.2 \mu\text{s}$. Небольшие отличия в средних временах захвата между разными источниками нейтронов связаны с различием их пространственных распределений. 210

- 7.3 Распределение энергий первичного сигнала относительно задержанного для отобранных кандидатов в $\bar{\nu}_e$ события. Взаимодействия с энергиями первичного $0.7 \text{ МэВ} < E_p < 12 \text{ МэВ}$ и задержанного $6 \text{ МэВ} < E_d < 12 \text{ МэВ}$ сигналов используются для анализа нейтринных осцилляций, обсуждаемых в этой работе (красный пунктирный прямоугольник). В выделенной красным пунктиром области видны вклады от случайных совпадений (симметричный при перестановке сигналов от первичного и задержанного сигналов), от распадов ${}^9\text{Li}$ и от быстрых нейтронов (большая энергия первичного сигнала и $\sim 8 \text{ МэВ}$ энергии задержанного сигнала). События обратного бета распада в которых нейтрон был захвачен ${}^1\text{H}$ обеспечивают еще одну область сигнальных событий, в которой $E_d \sim 2.2 \text{ MeV}$, обладающую бóльшим уровнем фоновых событий. 212
- 7.4 Характерное распределение заряда, наблюдаемое после разрядки ФЭУ в AD, где цилиндрический массив ФЭУ из 8 колец и 24 колонок спроектирован на плоскость. В приведенном примере из данных вспышка произошла в ФЭУ, расположенном в колонке 19 и в кольце 5. Цветами, а также числами показаны доли (в процентах) от полного наблюдаемого заряда, зарегистрированные ФЭУ в данных кольце и колонке. Разряжающийся ФЭУ зарегистрировал наибольшую долю ф.э.. Этот ФЭУ также послал свет к своим ближайшим соседям и ФЭУ, расположенным напротив (квадрант 3). Такой характерный шаблон распределения заряда позволяет эффективное отбрасывание этого источника фона. 214
- 7.5 Распределение переменной f_{ID} для задержанных сигналов от кандидатов в ОБР во всех восьми детекторах. Дискриминатор использует информацию о пространственном распределении заряда среди ФЭУ, чтобы отличить вспышки ФЭУ ($f_{\text{ID}} \geq 0$) от настоящих взаимодействий частиц ($f_{\text{ID}} < 0$). Распределения нормированы, чтобы продемонстрировать согласующуюся форму распределений для настоящих кандидатов в антинейтринные события, в то время как распределения от вспышек ФЭУ варьировались в соответствии с характеристиками излучающих ФЭУ. Дискриминатор отбрасывает почти все ложные сигналы, вызванные вспышками ФЭУ, с ничтожным вкладом в эффективность детектирования антинейтрино. 215
- 7.6 Спектр реконструированной энергии для всех изолированных сигналов, похожих на первичный для всех восьми детекторов. Большая часть некоррелированных сигналов, похожих на первичный, происходит от естественной радиоактивности материалов детектора и окружающего его вещества и имеет $E_{\text{rec}} < 3 \text{ МэВ}$. Основной вклад в спектр сигналов, похожих на задержанный, дают бета распады ${}^{12}\text{B}$ и γ -кванты от захватов нейтронов от калибровочных источников ${}^{241}\text{Am}$ - ${}^{13}\text{C}$, расположенных на крышке каждого детектора. 217

- 7.7 Скорость счета фоновых событий от случайных совпадений для отбора А как функции времени для каждого антинейтринного детектора, вычисленная для измеренных скоростей счета некоррелированных сигналов, удовлетворяющих критериям отбора для первичного R_p и задержанного R_d сигналов от взаимодействий $\bar{\nu}_e$. Глубина расположения экспериментального холла была главной причиной, определяющей скорость счета фоновых событий от случайных совпадений, поскольку нестабильные изотопы рождаются во взаимодействиях космогенных мюонов. Уменьшение скорости счета фоновых событий от случайных совпадений со временем стало итогом уменьшения содержания естественной радиоактивности после инсталляции детектора и последующей очистки воды в водном бассейне, а также вследствие уменьшения испускания нейтронов калибровочным источником ^{241}Am - ^{13}C . R_p чувствительно к небольшим изменениям в электрическом шуме, что приводит к наблюдаемой нестабильности скорости счета фоновых событий от случайных совпадений. Вертикальный разрыв в распределениях связан с установкой последних двух детекторов летом 2012. Удаление двух из трех источников ^{241}Am - ^{13}C в каждом дальнем детекторе уменьшило фон от случайных совпадений на $\sim 50\%$ 219
- 7.8 Распределение расстояния между реконструированными положениями первичного и задержанного сигналов в наборе событий с кандидатами на взаимодействия $\bar{\nu}_e$, суммарно по всем детекторам (черные точки). Эти положения сильно коррелируют друг с другом, как продемонстрировано моделированием $\bar{\nu}_e$ взаимодействий (синяя линия). Повторение отбора $\bar{\nu}_e$ взаимодействий с искусственным сдвигом по времени от 1 мс до 20 мс между прямым и задержанным сигналами, усиливает вклад от случайных совпадений (красные точки) и подавляет коррелированные сигналы. Согласованность этих распределений подтверждает оценку вклада от случайных совпадений, которая варьируется от 1% до 2% в зависимости от детектора. 220
- 7.9 (*Верхний рисунок*) Изменение условия $0.7 \text{ МэВ} < E_p < 100 \text{ МэВ}$ при отборе первичных сигналов в кандидатах во взаимодействия $\bar{\nu}_e$ показало широкий непрерывный спектр фоновых событий, приписываемых к энергичным, или быстрым нейтронам. $\bar{\nu}_e$ взаимодействия видны как доминирующие сигналы при энергиях ниже $\sim 12 \text{ МэВ}$. Спектры энергий от быстрых нейтронов похожи во всех трех экспериментальных холлах. (*Нижний рисунок*) Сумма спектров от кандидатов во взаимодействия $\bar{\nu}_e$ всех трех экспериментальных холлов (черная линия) в сравнении со спектром от быстрых нейтронов, идентифицированных как кандидаты во взаимодействия $\bar{\nu}_e$, которые произошли в течение 200 мкс после сигнала мюона OWS или в РПК, но не в IWS. Выше 12 МэВ оба спектра согласуются друг с другом. Нормировка спектра от быстрых нейтронов была выбрана таким образом, чтобы интегралы от спектров после 12 МэВ совпадали. Спектры от быстрых нейтронов были использованы для оценки вклада от этого фона в наборе $\bar{\nu}_e$ 224

- 7.10 Распределение кандидатов во взаимодействия $\bar{\nu}_e$ относительно времени после последнего ливня частиц, индуцированного мюоном ($E_{\text{гес}} > 2.5$ ГэВ) в том же детекторе. Фит этого распределения позволяет выделить вклады ОБР, случайных совпадений (зеленая область) и событий коррелированных с мюоном (красная область). Небольшой вклад от β распадов ^{12}B виден в первом бине (синяя область). 226
- 7.11 Сравнение наблюдаемого (черные точки) и модельного (голубая линия) распределений реконструированной энергии от β -n распадов ^9Li 227
- 7.12 Некоррелированные индивидуальные сигналы с $E_{\text{гес}} > 5$ МэВ, рожденные нейтронным источником ^{241}Am - ^{13}C высокой интенсивности ~ 59 Гц, временно установленным на крышке детектора ЕНЗ-АД5 (черные точки). Пики в спектре связаны с захватами нейтронов ядрами Fe, Cr или Ni, содержащимися в нержавеющей стали крышки, через которую γ -кванты проникают в сцинтилляционный объем детектора. Эти измерения сравниваются с результатами моделирования коррелированных и некоррелированных сигналов, производимых этим источником (красная сплошная линия), что позволяет оценить коррелированный фон от используемых еженедельно источников ^{241}Am - ^{13}C с интенсивностью ~ 0.7 Гц, расположенных в автоматических калибровочных модулях также на крышке детектора. 229
- 7.13 Спектр реконструированной энергии первичных сигналов от коррелированной пары сигналов, рожденной нейтронным источником ^{241}Am - ^{13}C высокой интенсивности ~ 59 Гц, временно установленным на крышку детектора ЕНЗ-АД5 (черные точки). Неупругие столкновения нейтронов в материале нержавеющей стали порождают γ -кванты, которые иногда проникают в сцинтилляционный объем детектора, производя там сигналы с быстро падающим спектром. Моделирование, проверенное на разных наборах данных, согласуется с этими измерениями (синяя сплошная линия). Спектр энергий от еженедельного источника нейтронов ^{241}Am - ^{13}C с интенсивностью ~ 0.7 Гц оценивается как идентичный наблюдаемому (красная линия). 230
- 7.14 Распределения реконструированных энергий первичных относительно задержанных сигналов для трех временных интервалов: (а) от 1 до 3 мкс, (b) от 10 до 400 мкс, (с) 1 до 4 мс, для всех детекторов. Распределения демонстрируют коррелированные во времени пары сигналов от цепочек распадов актинидов. Хотя эти распады не вносят вклад в число фоновых событий при отборе $\bar{\nu}_e$ взаимодействий, полученные оценки α -радиоактивности от актинидов позволяют ограничить вклад от последующих $^{13}\text{C}(\alpha, n)^{16}\text{O}$ взаимодействий. 232
- 7.15 Моделирование спектров энергии первичных сигналов от $^{13}\text{C}(\alpha, n)^{16}\text{O}$ реакции для каждого из наиболее важных естественных источников α -частиц в детекторе. Энергичные нейтроны приводят к широкому пику в распределении рассеянных протонов в области энергий ниже 4 МэВ и небольшому пику около 5 МэВ из-за неупругого рассеяния на ^{12}C . Более энергичные α -частицы увеличивают, с ростом своей энергии, долю возбужденных состояний $^{16}\text{O}^*$, что приводит к широкому пику в области от 5 МэВ до 8 МэВ. 234

- 7.16 (Верхний рисунок) Темпы счета взаимодействий $\bar{\nu}_e$, отобранных методами А и В. (Нижний рисунок) Темпы счета, полученные методом В оказались на $\sim 0.2\%$ меньше результатов метода А, демонстрируя разницу в абсолютной эффективности методов в соответствии с ожиданиями. 238
- 7.17 (Верхний рисунок) Отношения измеренных темпов счета парой детекторов, расположенных в одном экспериментальном холле, r_{obs} (черные точки). Отношение темпов счета AD1/AD2 показано для всего периода набора данных. После инсталляции AD8 в ЕН2, приведено отношение AD3/AD8. Для ЕН3 отношение представлено для двух периодов набора данных: до и после инсталляции AD7. Небольшие отличия в расстояниях до реактора и числе протонов в мишени предсказывают небольшие отличия этих отношений (синяя пунктирная линия). (Нижний рисунок) То же, но выраженное в виде двойного отношения $r_{\text{obs}}/r_{\text{exp}}$ 239
- 7.18 (Верхний рисунок) Распределения реконструированной энергии первичного сигнала для отобранных кандидатов во взаимодействия $\bar{\nu}_e$ в каждом из восьми детекторов. (Нижний рисунок) Отношения распределений для детекторов из одного экспериментального холла хорошо согласуются друг с другом. 240
- 7.19 (Верхний рисунок) Распределения реконструированной энергии задержанного сигнала для отобранных кандидатов во взаимодействия $\bar{\nu}_e$ в каждом из восьми детекторов. (Нижний рисунок) Отношения распределений для детекторов из одного экспериментального холла хорошо согласуются друг с другом. Небольшие наклоны в распределениях согласуются с отличиями на уровне $\lesssim 0.2\%$ в абсолютной калибровке детекторов. 240
- 8.1 Доли развалов ядер $f_i(t)$ четырех изотопов ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu как функции Burn-up(t) в течении полного цикла работы реактора. 244
- 8.2 Спектры антинейтрино от четырех главных изотопов ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu и ^{241}Pu 245
- 8.3 Усреднённый спектр электронных антинейтрино от ОЯТ. 247
- 8.4 Сечение ОБР. 250
- 8.5 Зависимость дифференциального сечения ОБР и энергии позитрона от угла его вылета. 250
- 8.6 Якобиан dE_ν/dE_{true} как функция энергии позитрона E_e для некоторых значений $\cos \theta_e$. 252
- 8.7 Отношение наблюдаемого числа ОБР событий к ожиданию без нейтринных осцилляций как функция эффективного расстояния для всех восьми детекторов. Дефицит в дальних детекторах относительно ближних иллюстрирует исчезновение $\bar{\nu}_e$ из-за нейтринных осцилляций. Экстраполяция модели на нулевое расстояние определило абсолютную нормировку потока реакторных $\bar{\nu}_e$. Ближние (дальние) детекторы сдвинуты на ± 6 м (± 30 м) для удобства восприятия. 260

- 8.8 Спектры реконструированной энергии позитронов, измеренные в каждом экспериментальном холле (черные точки). Спектры детекторов из одного холла сложены вместе: ЕН1 (верхний рисунок), ЕН2 (средний рисунок) и ЕН3 (нижний рисунок). Измерения сравниваются с предсказаниями в предположении отсутствия нейтринных осцилляций (синяя линия) и с наилучшей 3ν -модели осцилляций нейтрино (красная линия). Фоновые события видны не очень ясно (залитые гистограммы) из-за их малого количества, поэтому добавлены внутренние рисунки с логарифмическим масштабом. Чтобы проиллюстрировать искажение спектров эффектом нейтринных осцилляций, под каждый рисунок добавлена панель с отношением спектра за вычетом фоновых событий к ожиданию в предположении отсутствия осцилляций. Также приведены отношения предсказания с наилучшей 3ν -модели осцилляций нейтрино к модели без осцилляций (красная линия). 262
- 8.9 Измеренное искажение спектра энергии реакторных $\bar{\nu}_e$, проиллюстрированное как вероятность выживания $\bar{\nu}_e$ как функция L_{eff}/E_ν . Эффективное расстояние L_{eff} оценивается для каждого экспериментального холла с учетом распределения реакторов, дающих вклад в наблюдаемое число событий согласно ур. (8.34). Средняя энергия $\bar{\nu}_e$, $\langle E_\nu \rangle$, оценивается в каждом интервале реконструированной энергии позитрона с использованием модели отклика детектора. Вероятность исчезновения $\bar{\nu}_e$ в каждом интервале реконструированной энергии позитрона дается отношением наблюдаемого числа событий (за вычетом фоновых событий) к предсказанию в предположении отсутствия осцилляций. В доступном измерению интервале L_{eff}/E_ν наблюдается почти полный цикл исчезновения и появления вновь $\bar{\nu}_e$ 264
- 8.10 Двумерный доверительный интервал для Δm_{ee}^2 и $\sin^2 2\theta_{13}$ получен из сравнения числа $\bar{\nu}_e$ взаимодействий и формы спектра позитронов в дальних детекторах относительно ближних. Контур, соответствующие стандартным отклонениям в 1σ , 2σ и 3σ , получены при использовании значений $\Delta\chi^2$ равных 2.30 (красная линия), 6.18 (зеленая) и 11.83 (синяя) относительно наилучшей оценки параметров. Верхний рисунок соответствует одномерному распределению $\Delta\chi^2$ относительно $\sin^2 2\theta_{13}$, полученному профилированием по параметру $|\Delta m_{ee}^2|$ (синяя сплошная линия), пунктирная линия отмечает уровни, соответствующие стандартным отклонениям в 1σ , 2σ и 3σ . Правый рисунок определен аналогично, но для параметра $|\Delta m_{ee}^2|$, профилированием по параметру $\sin^2 2\theta_{13}$. Точка с ошибками показывает наилучшую оценку параметров. Ошибки соответствуют одномерному уровню достоверности в 1σ . 265
- 8.11 Сравнение результатов настоящего измерения $\sin^2 2\theta_{13}$ (синяя точка) с другими измерениями. Эксперименты RENO [280] и Double-CHOOZ [281] также оценили $\sin^2 2\theta_{13}$ из наблюдения исчезновения реакторных $\bar{\nu}_e$ (красные точки). Эксперименты T2K [202] и MINOS [282] наблюдали появление ν_e в пучках ускорительных μ_μ . Этот канал чувствителен к комбинации $2\sin^2\theta_{23}\sin^2 2\theta_{13}$ (зеленые точки). Измерения MINOS [282] представлены для двух случаев: нормальной и обратной иерархии масс нейтрино в предположении $\sin^2\theta_{23} = 0.5$, $\delta_{\text{CP}} = 0$. Измерение T2K [202] использовало профилирование по этим неизвестным параметрам. 266

- 8.12 Сравнение результатов настоящего измерения Δm_{32}^2 (синяя точка) с другими измерениями. Все значения даны для случая нормальной иерархии масс; сравнение для обратной иерархии аналогичны. Эксперименты T2K [283], MINOS [284] и NO ν A [285] определили Δm_{32}^2 из исчезновения ускорительных ν_μ (зеленые точки). Эксперименты Super-Kamiokande [286] и IceCube [287] измерили Δm_{32}^2 из исчезновения атмосферных ν_μ (точки сине-зеленого цвета). Измерения эксперимента RENO [280] получено из исчезновения реакторных $\bar{\nu}_e$ (красная точка). 267
- 8.13 Результаты измерения 15 коэффициентов n_i , учитывающих возможные отклонения измеренного спектра реакторных антинейтрино от модели Huber+Mueller [226; 236]. Результат фита находится в хорошем согласии с независимым измерением спектра в эксперименте Daya Bay [225]. 268
- 8.14 Оценка корреляционной матрицы параметров подгонки $\sin^2 2\theta_{13}$, Δm_{32}^2 , n_i 269
- 8.15 Оценка корреляционной матрицы параметров подгонки $\sin^2 2\theta_{13}$, Δm_{32}^2 , n_i . Значения корреляции $C < 0.2$ исключены. 270
- 8.16 Бюджет ошибок в измерении $\sin^2 2\theta_{13}$, Δm_{32}^2 270
- 8.17 Отношение наблюдаемого числа событий ОБР к ожидаемому в отсутствии осцилляций, в зависимости от реконструированной видимой энергии E_{vis} . Данные сгруппированные для ближних (EH1+EH2) и дальних (EH3) экспериментальных холлов, показаны на верхнем и нижнем рисунках, соответственно. Ошибки соответствуют статистическим неопределенностям. Сплошные линии – отношения предсказания модели в предположении нейтринных осцилляций в плосковолновом приближении (PW) с лучшими значениями параметров $\sin^2 2\theta_{13}$ и Δm_{32}^2 , полученными также в плосковолновой модели, к модели без нейтринных осцилляций. Аналогичные отношения для предсказания модели с волновым пакетом к модели без нейтринных осцилляций показаны пунктирной линией для $\sigma_{\text{rel}} = 0.33$ и точно-пунктирной линией для $\sigma_{\text{rel}} = 8 \cdot 10^{-17}$. Выбранные значения параметра $\sigma_{\text{rel}} = 0.33$ взяты в качестве примера. Зеленые линии соответствуют отношениям в модели волнового пакета со значениями параметров $\sin^2 2\theta_{13}$ и Δm_{32}^2 , полученными в плосковолновой модели, что не согласуется с данными на уровне пяти стандартных отклонений. Красные линии соответствуют отношениям в модели волнового пакета со значениями параметров $\sin^2 2\theta_{13}$ и Δm_{32}^2 , полученными в модели волнового пакета, что гораздо лучше согласуется с наблюдаемым спектром. Все отношения входят в область энергий ниже $2m_e$, что соответствует порогу реакции ОБР из-за эффектов отклика детектора, таких как реконструкция энергии и поглощение в IAV (см. подробности в [205; 288]). 275
- 8.18 Разрешенные области параметров ($\Delta m_{32}^2, \sigma_{\text{rel}}$) (верхний рисунок) и ($\sin^2 2\theta_{13}, \sigma_{\text{rel}}$) (средний рисунок) полученные методом, основанном на сравнении $\Delta\chi^2$ с $\chi_\alpha^2(2)$ в предположении, что $\Delta\chi^2$ распределен как $\chi^2(2)$ (пунктирные линии) и методом Фельдмана-Казинса (сплошные линии). Нижний рисунок показывает маргинализованную функцию $\Delta\chi^2(\sigma_{\text{rel}})$. Абсцисса разделена на две части с логарифмической и линейной шкалами. 276

Список таблиц

1	Значение гиперзаряда Y , третьей компоненты изоспина T_3 и заряда поля Q для всех полей СМ. Поскольку, Y , T_3 и Q не зависят от поколения, соответствующий индекс опущен для краткости.	18
2	Параметры осцилляций по результатам глобальной подгонки данных осцилляционных экспериментов в модели трех ароматов нейтрино из работы [40]. Приведены значения для нормальной (НИ) и обратной (ОИ) иерархии масс. Современные эксперименты не в состоянии различить иерархию масс, разница в значении χ^2 для нормальной и обратной иерархии составляет 0.3.	26
3	Схематическая цепочка переходов между состояниями определенного аромата через промежуточные собственные состояния в веществе ν_i^m для нормальной и обратной иерархии.	38
4	Предсказания стандартной модели Солнца и экспериментальные измерения потоков солнечных нейтрино.	48
5	Предельно допустимые в СРГП значения параметра σ ($\sigma_{\max} = \sqrt{m\Gamma}$), отношения $\Gamma/\sigma_{\max} = \sqrt{\Gamma/m}$ и минимальные допустимые эффективные размеры пакетов ($d_*^{\min} \approx 1.55/\sqrt{m\Gamma}$) для некоторых нестабильных частиц.	109
6	Измеренные координаты геометрических центров эксперимента Daya Bay. Детекторы нумеруются от AD1 до AD8, согласно порядку их сбора и инсталляции. Ось X направлена на север, ось Z вертикальна в начале ординат. Координаты были определены при помощи комбинации электронного теодолита и измерений GPS с точностью 18 мм. Приводятся соответствующие расстояния для пары реактор-детектор. Также даются приблизительная толщина защиты в м.в.э. и масса мишени в кг. Средняя термальная мощность каждого реактора (единица измерения, ГВт) приводится раздельно для периодов набора данных для шести о восьми детекторов.	182
7	Резюме двух независимых методов отбора ОБР реакторных $\bar{\nu}_e$. Подробности смотрите в тексте.	207
8	Моделирование вероятности $^{13}\text{C}(\alpha, n)^{16}\text{O}$ взаимодействий в предположении равновесия распадов примесей естественных актинидов в детекторе. Вероятности даны для рождения ядер ^{16}O в основном и возбужденном состояниях. Неопределенность (σ_{tot}) вероятности определялась из сравнения с другими модельными вычислениями.	233
9	Краткая сводка оценок эффективностей (ϵ) и их относительных коррелированных ($\delta\epsilon_{\text{corr}}$) и некоррелированных ($\delta\epsilon_{\text{uncorr}}$) неопределенностей между детекторами.	236

10	Результаты отбора взаимодействий $\bar{\nu}_e$. Результаты, полученные методами А и В приведены для сравнения (Критерии отбора даны в таб. 7). Приводятся числа отобранных кандидатов во взаимодействия $\bar{\nu}_e$, эффективности критериев отбора, оценки темпов счета фоновых событий для каждого антинейтринного детектора. Приводятся также темпы счета $\bar{\nu}_e$ взаимодействий после вычета фоновых событий для каждого детектора. Все темпы счета поправлены на потерю живого времени набора данных из-за вето против мюонов и критериев на множественность, представленные соответствующими эффективностями ϵ_μ и ϵ_m . Наконец, приведена также небольшая разница в числе протонов ΔN_p , оцененная для каждой мишени.	238
11	Неравновесная поправка к спектрам антинейтрино Mueller.	246
12	Характеристики цепочек деления изотопов ОЯТ с большим временем полураспада.	247
13	Результаты измерения жизни нейтрона в разное время.	251
14	Энергия, выделенная на распад для четырех главных изотопов, а также неопределенности оценки энергии из работы [270].	253
15	Резюме систематических неопределенностей, рассмотренных в настоящем анализе осцилляций $\bar{\nu}_e$	259
16	Краткая сводка ключевых аспектов трех реакторных экспериментов, измеривших $\sin^2 2\theta_{13}$ с использованием исчезновения реакторных $\bar{\nu}_e$	266

Приложение А

К квантовополевой теории осцилляций нейтрино

А.1 Комплексная функция ошибок и связанные с ней формулы

Функция ошибок и дополнительная функция ошибок комплексного аргумента изучались во многих работах (см., например, [154; 294—297] и ссылки в этих работах). Для удобства ссылок приведем хорошо известные формулы [154]:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)n!} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^{2n+1}}{(2n+1)!!}, \quad (\text{A.1})$$

$$\operatorname{erfc}(z) \sim \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}z} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2z^2)^n} \right] \quad \left(z \rightarrow \infty, |\arg z| < \frac{3\pi}{4} \right). \quad (\text{A.2})$$

Из ур. (5.120) и ур. (A.1) получаем следующие разложения для введенной нами функции $\operatorname{Ierf}(z)$:

$$\operatorname{Ierf}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[1 + z^2 - \frac{z^4}{6} + \frac{z^6}{30} - \frac{z^8}{168} + \mathcal{O}(z^{10}) \right], \quad (\text{A.3a})$$

$$= \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} \left[1 + 2z^2 + \frac{4z^4}{3} + \frac{8z^6}{15} + \frac{16z^8}{105} + \mathcal{O}(z^{10}) \right]. \quad (\text{A.3b})$$

Эти разложения полезны для, соответственно, малых и промежуточных значений $|z|$.¹ Для того, чтобы найти асимптотики $\operatorname{erfc}(z)$ и $\operatorname{Ierf}(z)$ при больших $|z|$ нужно использовать ур. (A.2) для $\operatorname{erfc}(-z)$ и затем воспользоваться правилом

$$\operatorname{erfc}(z) = 2 - \operatorname{erfc}(-z).$$

В результате из ур. (5.120) и ур. (A.2) получаем:

$$\operatorname{Ierf}(z) \sim \pm z + \frac{e^{-z^2}}{2\sqrt{\pi}z^2} \left[1 - \frac{3}{2z^2} + \frac{15}{4z^4} - \frac{105}{8z^6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^8}\right) \right] \quad (z \rightarrow \infty), \quad (\text{A.4})$$

где верхний (нижний) знак должен быть взят для $|\arg z| < 3\pi/4$ ($|\arg z| > 3\pi/4$).

Нижеследующие формулы полезны при численных расчетах функции ошибок с высокой точностью. Они основаны на следующем интегральном представлении дополнительной функции ошибок (см., например, [154; 296]):

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2z}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dt e^{-(t^2+z^2)}}{t^2+z^2}.$$

Из ур. (A.1) следует (ср. с результатом [294])

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [\operatorname{erfc}(a+ib)] &= + \frac{r}{\pi} \exp[-r^2 \cos(2\omega)] \left[r^2 \cos(2ab+\omega) \mathcal{I}_0(a,b) + \cos(2ab-\omega) \mathcal{I}_2(a,b) \right], \\ \operatorname{Im} [\operatorname{erfc}(a+ib)] &= - \frac{r}{\pi} \exp[-r^2 \cos(2\omega)] \left[r^2 \sin(2ab+\omega) \mathcal{I}_0(a,b) + \sin(2ab-\omega) \mathcal{I}_2(a,b) \right], \end{aligned}$$

¹На практике, ур. (A.3a) и ур. (A.3b) хорошо работают при $|z| \lesssim 1$ и $1 \lesssim |z| \lesssim 4.5$ соответственно.

где

$$\mathcal{I}_n(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt t^n e^{-t^2}}{(t^2 + a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt t^n e^{-t^2}}{[t^2 + r^2 \cos(2\omega)]^2 + [r^2 \sin(2\omega)]^2}, \quad (\text{A.5})$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \omega = a/r, \quad \sin \omega = b/r,$$

причем все входящие сюда величины вещественны. Заметим, что подынтегральные выражения в ур. (A.5) положительны и несингулярны (за исключением тривиального случая $a = b = 0$) и быстро убывают при больших значениях $|t|$. Эти свойства важны при численном интегрировании, основанном на стандартных квадратурных формулах.

A.2 Многомерные гауссовы квадратуры

В основном тексте части II используются интегралы

$$\mathcal{G}(A,B) = \int dx \exp(-A_{\mu\nu}x^\mu x^\nu + B_\mu x^\mu), \quad (\text{A.6})$$

где $A = \|A_{\mu\nu}\|$ – симметричная положительно-определенная матрица, а B_μ – произвольные комплексные постоянные². Хотя интегралы такого вида хорошо известны (см., например, [298]), мы приведем здесь простой расчет ур. (A.6), поскольку в литературе имеет место некоторая путаница или лучше сказать недоговоренность, связанная с определением матрицы, обратной к A в пространстве Минковского. Симметричная матрица A всегда может быть диагонализирована с помощью ортогонального преобразования $O = \|O_{\mu\nu}\|$ (см., например, [299]):

$$A_{\mu\nu} = \sum_{\alpha} a_{\alpha} O_{\mu\alpha} O_{\nu\alpha}, \quad \sum_{\alpha} O_{\mu\alpha} O_{\nu\alpha} = \delta_{\mu\nu}, \quad (\text{A.7})$$

причем a_{α} – это (положительные) собственные значения матрицы A . Поэтому квадратичная форма в показателе экспоненты подынтегрального выражения в ур. (A.6) может быть переписана в виде

$$-\sum_{\alpha} a_{\alpha} (O_{\mu\alpha} x^{\mu}) (O_{\nu\alpha} x^{\nu}) + B_{\mu} x^{\mu} = \sum_{\alpha} \left(-a_{\alpha} y_{\alpha}^2 + \sum_{\mu} B_{\mu} O_{\mu\alpha} y_{\alpha} \right), \quad (\text{A.8})$$

где $y_{\alpha} = O_{\mu\alpha} x^{\mu}$ и, следовательно, $x^{\mu} = \sum_{\alpha} O_{\mu\alpha} y_{\alpha}$. Якобиан этого преобразования равен $|O| = 1$, так что $dx = dy$. Подстановка ур. (A.8) в ур. (A.6) сводит интеграл к произведению стандартных гауссовых квадратур:

$$\mathcal{G}(A,B) = \prod_{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{a_{\alpha}}} \exp \left[\frac{1}{4a_{\alpha}} \left(\sum_{\mu} B_{\mu} O_{\mu\alpha} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.9})$$

²В данной работе величины $A_{\mu\nu}$ and B_{μ} являются компонентами тензора и 4-вектора, соответственно, но для дальнейшего это обстоятельство не существенно. Более того, результат в ур. (A.9) не зависит от размерности и сигнатуры пространства-времени.

Согласно ур. (A.7)

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha}^{-1} O_{\mu\alpha} O_{\nu\alpha} = (A^{-1})_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{A}^{\mu\nu} \quad \text{и} \quad \prod_{\alpha} a_{\alpha} = |A|.$$

Отсюда для 3-мерного евклидова пространства получаем:

$$\mathcal{G}(A, B) = \sqrt{\frac{\pi^3}{|A|}} \exp\left(\frac{1}{4} \tilde{A}_{kn} B_k B_n\right), \quad \tilde{A} = A^{-1}, \quad (\text{A.10})$$

а для 4-мерного пространства Минковского:

$$\mathcal{G}(A, B) = \frac{\pi^2}{\sqrt{|A|}} \exp\left(\frac{1}{4} \tilde{A}^{\mu\nu} B_{\mu} B_{\nu}\right), \quad \tilde{A} = gA^{-1}g. \quad (\text{A.11})$$

Заметим, что в последнем случае $\tilde{A} \neq A^{-1}$, т.к. $\tilde{A}_{0k} = \tilde{A}_{k0} = -(A^{-1})_{0k}$, $k = 1, 2, 3$. Поскольку, очевидно, собственные значения матрицы \tilde{A} равны $1/a_{\alpha} > 0$, она положительно определена. Разумеется, $|\tilde{A}| = 1/|A|$. В наиболее важном для нас случае, когда величины $A^{\mu\nu}$ и B^{μ} образуют, соответственно, тензор и 4-вектор, форма $\tilde{A}^{\mu\nu} B_{\mu} B_{\nu}$ есть лоренцев скаляр, поскольку таковым является интеграл ур. (A.6).

A.3 Факторизация адронных блоков

Рассмотрим адронный матричный элемент

$$\begin{aligned} \langle F'_s \oplus F'_d | T[: j_q^{\mu}(x) :: j_q^{\dagger\nu}(y) : \mathbb{S}_h] | I_s \oplus I_d \rangle &= \int \left[\prod_a \frac{d\mathbf{k}_a \phi_a(\mathbf{k}_a, \mathbf{p}_a) e^{i\mathbf{k}_a x_a}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_a}} \right] \times \\ &\times \int \left[\prod_b \frac{d\mathbf{k}_b \phi_b^*(\mathbf{k}_b, \mathbf{p}_b) e^{-i\mathbf{k}_b x_b}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_b}} \right] \langle \{k_b\} | T[: j_q^{\mu}(x) :: j_q^{\dagger\nu}(y) : \mathbb{S}_h] | \{k_a\} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Здесь мы воспользовались определением волновых пакетов в ур. (4.21) и ввели сокращенное обозначение для многочастичных фоковских состояний

$$|\dots, \mathbf{k}_a, s_a, \dots; a \in I_s \oplus I_d \rangle = |\{k_a\}\rangle, \quad |\dots, \mathbf{k}_b, s_b, \dots; b \in F'_s \oplus F'_d \rangle = |\{k_b\}\rangle.$$

Выразим матричный элемент в правой части ур. (A.12), содержащий элементарные кварковые токи j_q и j_q^{\dagger} , через адронные токи. Используя определение хронологического произведения локальных операторов запишем³

$$T[j_q(x) j_q^{\dagger}(y) \mathbb{S}_h] = \theta(x_0 - y_0) A(x, y) + \theta(y_0 - x_0) B(x, y), \quad (\text{A.13})$$

где

$$A(x, y) = \mathbb{U}(\infty, x_0) j_q(x) \mathbb{U}(x_0, y_0) j_q^{\dagger}(y) \mathbb{U}(y_0, -\infty), \quad (\text{A.14a})$$

$$B(y, x) = \mathbb{U}(\infty, y_0) j_q^{\dagger}(y) \mathbb{U}(y_0, x_0) j_q(x) \mathbb{U}(x_0, -\infty), \quad (\text{A.14б})$$

³В этом разделе мы для краткости не выписываем лоренцевские индексы и символы нормального упорядочения в тех случаях, когда это не может привести к недоразумениям.

и

$$\mathbb{U}(\tau_2, \tau_1) = \exp \left[i \int_{\tau_1}^{\tau_2} dx_0 \int d\mathbf{x} \mathcal{L}_h(x) \right]. \quad (\text{A.15})$$

– оператор эволюции для адронной части лагранжиана. Используя хорошо известные свойства этого оператора

$$\begin{aligned} \mathbb{U}(\tau_2, \tau_1) &= \mathbb{U}(\tau_2, \tau) \mathbb{U}(\tau, \tau_1), & \mathbb{U}(\tau_2, \tau_1) \mathbb{U}(\tau_1, \tau_2) &= 1, \\ \mathbb{U}(\infty, -\infty) &= \mathbb{S}_h, & \mathbb{U}(\pm\infty, \pm\infty) &= 1, \end{aligned}$$

перепишем выражение ур. (A.14a) следующим образом:

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \mathbb{U}(\infty, \tau) \mathbb{U}(\tau, x_0) j_q(x) \mathbb{U}(x_0, \tau) \mathbb{U}(\tau, x_0) \mathbb{U}(x_0, y_0) j_q^\dagger(y) \mathbb{U}(y_0, \tau) \mathbb{U}(\tau, y_0) \mathbb{U}(y_0, -\infty) = \\ &= \mathbb{U}(\infty, \tau) \mathbb{U}(\tau, x_0) j_q(x) \mathbb{U}(x_0, \tau) \mathbb{U}(\tau, y_0) j_q^\dagger(y) \mathbb{U}(y_0, \tau) \mathbb{U}(\tau, -\infty). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Здесь τ – произвольный параметр. Определим теперь оператор адронного тока (в гейзенберговском представлении) как

$$J(x) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \mathbb{U}(\tau, x_0) j_q(x) \mathbb{U}(x_0, \tau). \quad (\text{A.17})$$

Тогда ур. (A.16) можно переписать как

$$A(x, y) = \mathbb{S}_h J(x) J^\dagger(y). \quad (\text{A.18a})$$

Аналогичным образом находим из ур. (A.14б):

$$B(y, x) = \mathbb{S}_h J^\dagger(y) J(x). \quad (\text{A.18б})$$

Подстановка ур. (A.18) в ур. (A.13) дает

$$T [j_q(x) j_q^\dagger(y) \mathbb{S}_h] = \mathbb{S}_h T [J(x) J^\dagger(y)]. \quad (\text{A.19})$$

Одночастичные адронные состояния не меняются под действием адронной S -матрицы. Поскольку наши состояния $|\{k_b\}\rangle$ представляют собой прямые произведения одночастичных адронных состояний, можно считать, что $\mathbb{S}_h^\dagger |\{k_b\}\rangle = |\{k_b\}\rangle$ с точностью до несущественного фазового множителя. Следовательно, с точностью до этого множителя, получаем из ур. (A.19):

$$\langle \{k_b\} | T [j_q(x) j_q^\dagger(y) \mathbb{S}_h] | \{k_a\} \rangle = \langle \{k_b\} | T [J(x) J^\dagger(y)] | \{k_a\} \rangle \equiv \langle J(x) J^\dagger(y) \rangle_T. \quad (\text{A.20})$$

Рассмотрим теперь следующий матричный элемент:

$$\langle J(x) J^\dagger(y) \rangle = \langle \{k_b\} | J(x) J^\dagger(y) | \{k_a\} \rangle.$$

Благодаря трансляционной инвариантности ток $J(x)$ должен удовлетворять уравнению

$$i \frac{\partial J(x)}{\partial x_\mu} = [J(x), P^\mu],$$

где P^μ – оператор полного 4-импульса, соответствующий адронной части лагранжиана (см., например, [300]). Используя это уравнение получаем

$$i \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{\partial}{\partial y_\mu} \right) \langle J(x) J^\dagger(y) \rangle = \langle [J(x) J^\dagger(y), P^\mu] \rangle = (K - K')^\mu \langle J(x) J^\dagger(y) \rangle, \quad (\text{A.21})$$

где

$$K = K_s + K_d = \sum_{a \in I_s} k_a + \sum_{a \in I_d} k_a, \quad K' = K'_s + K'_d = \sum_{b \in F'_s} k_b + \sum_{b \in F'_d} k_b.$$

Формальное решение дифференциальных уравнений ур. (A.21) имеет вид

$$\langle J_\mu(x) J_\nu^\dagger(y) \rangle = e^{i[(K'_s - K_s)(x - x_s) + (K'_d - K_d)(y - x_d)]} \langle J_\mu(x_s) J_\nu^\dagger(x_d) \rangle + C_{\mu\nu}(x - y), \quad (\text{A.22})$$

где x_s и x_d – произвольные пространственно-временные 4-векторы, а $C_{\mu\nu}(x)$ – компоненты некоторого тензора⁴ такие, что $C_{\mu\nu}(x_s - x_d) = 0$. В силу произвольности 4-векторов x_s, x_d заключаем, что $C_{\mu\nu}(x) \equiv 0$.

Подобный результат может быть получен и для матричного элемента ур. (A.20). В самом деле, записав ур. (A.20) в явном виде

$$\langle J(x) J^\dagger(y) \rangle_T = \theta(x_0 - y_0) \langle J(x) J^\dagger(y) \rangle + \theta(y_0 - x_0) \langle J^\dagger(y) J(x) \rangle,$$

принимая во внимание, что $(\partial/\partial x_\mu + \partial/\partial y_\mu) \theta(x_0 - y_0) = 0$ и учитывая ур. (A.21), получаем уравнения:

$$i \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{\partial}{\partial y_\mu} \right) \langle J(x) J^\dagger(y) \rangle_T = (K - K')^\mu \langle J(x) J^\dagger(y) \rangle_T. \quad (\text{A.23})$$

Их решение совпадает с решением в ур. (A.22), в котором $\langle \dots \rangle$ заменяется на $\langle \dots \rangle_T$. Для наших целей удобно выбрать в качестве 4-векторов x_s и x_d прицельные точки для in- и out-пакетов в источнике и детекторе соответственно. Поскольку точки X_s и X_d макроскопически разделены, токи $J(X_s)$ и $J^\dagger(X_d)$ взаимно коммутируют: $[J_\mu(X_s), J_\nu^\dagger(X_d)] = 0$. В результате матричный элемент $\langle J_\mu(X_s) J_\nu^\dagger(X_d) \rangle_T$ факторизуется на два множителя, относящихся к вершинам источника и детектора и зависящих лишь от соответствующих переменных. Итак, после введения 4-векторов (c -числовых адронных токов)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_s(X_s; \{k_a, k_b\}) &= e^{i(K_s - K'_s)X_s} \langle \{k_b\} | J(X_s) | \{k_a\} \rangle, \quad a \in I_s, b \in F'_s, \\ \mathcal{J}_d^*(X_d; \{k_a, k_b\}) &= e^{i(K_d - K'_d)X_d} \langle \{k_b\} | J^\dagger(X_d) | \{k_a\} \rangle, \quad a \in I_d, b \in F'_d, \end{aligned}$$

получаем

$$\langle J_\mu(x) J_\nu^\dagger(y) \rangle_T = e^{i[(K'_s - K_s)x + (K'_d - K_d)y]} \mathcal{J}_s^\mu(X_s; \{k_a, k_b\}) \mathcal{J}_d^{\nu*}(X_d; \{k_a, k_b\}). \quad (\text{A.24})$$

Итак, в силу ур. (A.20), правая часть в ур. (A.12) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} & \int \left[\prod_a \frac{d\mathbf{k}_a \phi_a(\mathbf{k}_a, \mathbf{p}_a)}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_a}} e^{i[(k_a - p_a)x_a - k_a x]} \right] \int \left[\prod_b \frac{d\mathbf{k}_b \phi_b^*(\mathbf{k}_b, \mathbf{p}_b)}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}_b}} e^{-i[(k_b - p_b)x_b - k_b y]} \right] \times \\ & \times \mathcal{J}_s^\mu(X_s; \{k_a, k_b\}) \mathcal{J}_d^{\nu*}(X_d; \{k_a, k_b\}). \end{aligned}$$

Принимая во внимание свойства формфактор в $\phi_a(\mathbf{k}_a, \mathbf{p}_a)$ и $\phi_b(\mathbf{k}_b, \mathbf{p}_b)$, можно заменить переменные \mathbf{k}_a и \mathbf{k}_b в функциях \mathcal{J}_s и \mathcal{J}_d соответствующими внешними импульсами \mathbf{p}_a и \mathbf{p}_b . Сделав это (последнее) приближение мы приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned} \langle F'_s \oplus F'_d | T [: j_q^\mu(x) : : j_q^{\dagger\nu}(y) : \mathbb{S}_h] | I_s \oplus I_d \rangle &= \Pi'(x, y; \{\mathbf{p}_x, x_x\}) \times \\ & \times \mathcal{J}_s^\mu(X_s; \{p_a, p_b\}) \mathcal{J}_d^{\nu*}(X_d; \{p_a, p_b\}), \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

⁴Вообще говоря, этот тензор может параметрически зависеть от импульсов и спинов начальных и конечных одностичных фоковских состояний адронов.

где

$$\begin{aligned} \Pi'(x, y; \{\mathbf{p}_x, x_x\}) = & \left[\prod_{a \in I_s} \psi_a(\mathbf{p}_a, x - x_a) \right] \left[\prod_{b \in F'_s} \psi_b^*(\mathbf{p}_b, x - x_b) \right] \times \\ & \times \left[\prod_{a \in I_d} \psi_a(\mathbf{p}_a, y - x_a) \right] \left[\prod_{b \in F'_d} \psi_b^*(\mathbf{p}_b, y - x_b) \right]. \end{aligned}$$

Явный вид c -числовых адронных токов \mathcal{J}_s и \mathcal{J}_d для наших целей не потребуется.