

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт ядерных исследований Российской академии наук

На правах рукописи

Иванов Михаил Михайлович

**Первичные неоднородности в неминимальных
космологических моделях и слабо-нелинейный режим
формирования структур**

01.04.02 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
кандидат физ.-мат. наук
Сибиряков Сергей Михайлович

Москва – 2017

Содержание

Введение	4
Глава 1. Космология с легким «духом»	15
1.1. Описание модели	16
1.2. Инфляционный режим	19
1.3. После инфляции: проблема космологических духов	28
1.4. Заключение к главе	31
Глава 2. Теория гравитации с нарушением Лоренцевой симметрии	33
2.1. Наблюдательные ограничения на параметры нарушения Лоренц-инвариантности в гравитации	35
2.2. Заключение к главе	37
Глава 3. Ультрафиолетовое пополнение духовой инфляции	39
3.1. Инфляция с быстрым скатыванием	40
3.2. Линейные возмущения	43
3.3. Биспектр	48
3.4. Кинетическая инфляция	53
3.5. Заключение к главе	55
Глава 4. Тёмная материя с нарушенной лоренцевой симметрией	57
4.1. Лоренц-нарушение в тёмной материи: точечные частицы	57
4.2. Лоренц-нарушение в тёмной материи: релятивистская жидкость	64
4.3. Космологические возмущения: качественный анализ	69
4.4. Заключение к главе	76
Глава 5. Наблюдательные ограничения на отклонение от Лоренцевой симметрии в гравитации и темной материи	77
5.1. Наблюдательные эффекты: численный анализ	77
5.2. Сравнение с данными	87
5.3. Заключение к главе	90

Глава 6. Теория возмущений на временных расслоениях для формирования структур в слабо – нелинейном режиме	92
6.1. Космологические уравнения движения для идеальной жидкости	93
6.2. Теория возмущений на временных расслоениях	95
6.3. Приложения к приближению Зельдовича и точной динамике	106
6.4. Предел мягких мод и инфракрасная безопасность	110
6.5. Заключение к главе	115
Глава 7. Нелинейная эволюция сахаровских осцилляций и инфракрасное пересуммирование	116
7.1. Разложение на монотонную и осциллирующую компоненты	119
7.2. ИК – усиленные диаграммы и правила подсчета степеней	123
7.3. Пересуммирование инфракрасных эффектов в главном порядке	129
7.4. Учет жестких петель	133
7.5. Пересуммирование инфракрасных эффектов первого порядка малости	138
7.6. Практическая реализация и сравнение с другими методами	141
7.7. Заключение к главе	154
Заключение	155
Приложение А. Полиномы для поправок первого порядка малости	159
Приложение Б. Вычисление сдвига положения пика сахаровских осцилляций	160
Литература	162

Введение

Актуальность темы исследования. Космология является одной из наиболее бурно развивающихся областей современной физики. Прогресс в космологии обусловлен, главным образом, прецизионными измерениями анизотропии температуры реликтового излучения и неоднородностей в распределении материи во Вселенной, которые способствовали становлению стандартной космологической модели, Λ CDM (Λ - Cold Dark Matter). Данная модель предполагает, что только 5% плотности энергии Вселенной заключены в обычном веществе, в то время как основной вклад принадлежит тёмной материи ($\sim 25\%$) и тёмной энергии ($\sim 70\%$).

тёмная материя (ТМ) - это вещество, аналогичное по своим свойствам обычной пылевидной материи, но не испытывающее электромагнитное взаимодействие, и поэтому невидимое для нас. Достоверно известно лишь то, что тёмная материя взаимодействует гравитационно. В настоящий момент имеется исчерпывающее количество независимых наблюдений, свидетельствующих о существовании ТМ: кинематика скоплений галактик, гравитационное линзирование, кривые вращения галактик, формирование структур и форма осцилляций микроволнового излучения. Несмотря на обилие космологических данных, точная природа тёмной материи до сих пор неизвестна. Простейшая модель, описывающая весь спектр экспериментальных данных - это т.н. «холодная» тёмная материя, состоящая из тяжелых частицы не имеющих зарядов по калибровочной группе Стандартной модели, которые при этом слабо взаимодействуют между собой или не взаимодействуют вовсе.

В отличие от тёмной материи, свойства тёмной энергии весьма экзотичны, в частности, она должна обладать отрицательным давлением. Такое давление необходимо для описания ускоренного расширения Вселенной, которое было независимо обнаружено из наблюдений удалённых сверхновых Ia, микроволнового излучения и барионных акустических осцилляций. Природа тёмной энергии также до сих пор надёжно не установлена. Наиболее простая модель - космологическая постоянная, постоянный член в правой части уравнения Эйнштейна. Такое решение, однако, имеет серьёзный недостаток: не существует механизма, гарантирующего наблюдаемую малость величины космологической постоянной и её устойчивости по отношению к квантовым поправкам (т.н. «проблема космологической постоянной», [1]). Несмотря на это, космологическая постоянная является весьма успешной с феноменологической точки зрения и вместе с описанной ранее холодной тёмной материей, составляет фундамент стандартной космологической модели.

Еще одним феноменом, на который указывают последние наблюдения, является космическая инфляция. Исторически, теория горячего большого взрыва не располагала механизмом, который бы гарантировал наблюдаемую плоскостность Вселенной. Помимо этого, существовали проблемы с объяснением свойств первичных возмущений, которые затем эволюционировали в наблюдаемые неоднородности. А именно, были неясны механизм происхождения первичных возмущений, причина наличия практически плоского (не зависящего от частоты) спектра, а также корреляция возмущений на пространственных масштабах, превышавших размеры причинно – связанных областей в прошлом. Теория космической инфляции решает эти проблемы предполагая, что в первые мгновения существования Вселенная испытывала ускоренное расширение. Это расширение автоматически «разгладило» пространственную кривизну и «растянуло» первоначально причинно-связанные области пространства до колоссальных размеров. В процессе инфляционного расширения флуктуации квантовых полей, существование которых гарантировано принципом неопределенности, превращаются в неоднородности классического поля и становятся источником первичных возмущений плотности. Наличие плоского спектра при этом является прямым следствием того, что расширение происходило по закону, близкому к экспоненциальному. Инфляционное расширение характеризуется крайне высокими плотностями, которые могли достигать $(10^{16} \text{ ГэВ})^4$. Флуктуации, которые формируются на инфляционной стадии, представляют уникальную возможность исследовать физику при столь высоких энергиях с помощью космологических наблюдений.

Наиболее популярные инфляционные модели предполагают существование скалярного поля *инфлатона*, чей потенциал должен быть достаточно плоским в определенном диапазоне значений поля. Простейшая возможность - квадратичный потенциал (массовое слагаемое), предложенный в А. Д. Линде в 1983 г. [2], который, однако, находится в небольшом несогласии с наблюдаемыми данными [3].

Фундаментом современной космологии является общая теория относительности (ОТО), основанная на принципах эквивалентности и инвариантности относительно локальных Лоренцевых преобразований. Последнее свойство имеет много важных концептуальных следствий, например, единственность ОТО как Лоренц – инвариантной теории гравитации [4]. Последнее столетие стало эпохой непрерывных экспериментальных подтверждений предсказаний ОТО: аномальной прецессии перигелия Меркурия, гравитационного отклонения света, гравитационного красного смещения, гравитационного линзирования, задержки сигнала в гравитационном поле (задержка Шапиро), увлечения инерциальных систем отсчета

(эффект Лензе – Тирринга), гравитационного излучения (как неявно, через увеличение периода обращения двойных пульсаров, так и напрямую с помощью гравитационно – волнового интерферометра LIGO). Помимо этого, следствиями ОТО также являются релятивистские звезды (белые карлики и нейтронные звезды), существование которых является неопровержимым фактом, а также черные дыры, на наличие которых надежно указывают астрофизические наблюдения рентгеновских источников, активных ядер галактик и гравитационных волн.

Можно с уверенностью утверждать, что на данный момент нет ни одного экспериментального факта, который бы указывал на неполноту ОТО. Есть, однако, веские теоретические основания полагать, что ОТО всё же не является фундаментальной теорией гравитации. С квантовой точки зрения ОТО представляет собой эффективную теорию поля, которая справедлива при энергиях меньше энергии Планка ($\sim 10^{19}$ ГэВ). Описание гравитации при энергиях выше планковской (т.н. ультрафиолетовое пополнение ОТО) является одной из важнейших проблем теоретической физики, известной также как проблема квантовой гравитации¹.

Наиболее популярным кандидатом на роль квантовой гравитации является теория струн (см., к примеру, [6]), которая добилась впечатляющих успехов за счет введения достаточно сложной математической структуры, что, однако, весьма затрудняет её связь с экспериментом.

Другая перенормируемая модель гравитации известна уже более 40 лет. Это теория с квадратичными инвариантами кривизны в действии (далее просто «квадратичная гравитация»), предложенная К. Стелле [7, 8]. Для некоторой области параметров модель даже является асимптотически свободной, т.е. справедливой при любых энергиях [9–11]. Квадратичная гравитация — теория со старшими производными, которая подвержена неустойчивости Остроградского на классическом уровне. На квантовом уровне модель имеет дополнительную массивную степень свободы спина 2, кинетическая энергия которой имеет «неправильный» знак. При квантовании этой степени свободы обычным образом энергия возможных состояний данной частицы оказывается неограниченной снизу, что указывает на неминуемый распад вакуума (неустойчивость любого состояния с конечной энергией). С другой стороны, данную частицу можно проквантовать таким образом, что энергия бу-

¹ Здесь стоит ещё раз подчеркнуть, что при энергиях существенно меньше массы Планка ($\sim 10^{19}$ ГэВ) ОТО является хорошо определенной квантовой теорией в смысле эффективной теории поля и её предсказания находятся в прекрасном согласии с экспериментальными данными [5].

дет ограничена снизу и неустойчивости можно избежать, однако состояния частицы будут иметь отрицательную норму. Рассматриваемая частица при этом называется *духом*. Наличие духов не позволяет интерпретировать теорию в рамках обычной квантовой механики, из-за чего квадратичная гравитация не приобрела широкой популярности. Однако, не так давно интерес к этой теории возобновился (см., к примеру, [12, 13]), что обусловлено, в частности, некоторыми указаниями на то, что самосогласованная интерпретация может всё-таки существовать, как показано в работах [14–16]. Даже если в текущем варианте квадратичная гравитация и не является окончательной теорией квантовой гравитации, она интересна с феноменологической точки зрения, в частности, можно ожидать интересные особенности во время инфляционной стадии. Примечательно, что частный случай квадратичной гравитации, теория с квадратом скаляра кривизны в действии, предложенная А. А. Старобинским в 1980 г. [17], является исторически самой первой моделью инфляции. В общем случае квадратичной гравитации можно ожидать также и наличие квадрата тензора Риччи, что может существенно изменить предсказания модели для космологических наблюдаемых.

Еще одним интересным кандидатом на роль квантовой гравитации является гравитация Хоржавы–Лифшица, представленная в 2009 г. П. Хоржавой [18] и основанная на идеях, заимствованных из физики конденсированных сред, которые были предложены Е. М. Лифшицем в 1941 г. [19, 20]. Хоржава предложил, что ценой отказа от лоренцевой симметрии на больших энергиях возможно ультрафиолетовое пополнение ОТО в рамках перенормируемой квантовой теории. Стоит отметить что перенормируемость первоначальной модели Хоржавы (т.н. проектируемая гравитация Хоржава–Лифшица) была доказана на строгом уровне странительно недавно [21, 22]. Вскоре после пионерской работы Хоржавы выяснилось, что его проектируемая модель не является феноменологически приемлимой при малых энергиях [23]. В том же 2009 г. Д. Блас, О. Пузолас и С. Сибиряков предложили улучшенную модель, называемую «непроектируемой гравитацией Хоржавы – Лифшица», которая имеет низкоэнергетический предел, близкий к ОТО [24].² Ключевой особенностью является то, что в этом пределе непроектируемая гравитация Хоржавы–Лифшица не воспроизводит ОТО в точности, следовательно нарушение лоренцевой симметрии должно иметь следствия и при низких энергиях. Предел непроектируемой гравитации Хоржавы–Лифшица, справедливый при энергиях много меньше массы Планка, известен как «хронометрическая грави-

² Стоит заметить, что перенормируемость непроектируемой модели Хоржавы – Лифшица показана лишь на уровне подсчета степеней, в отличие от т.н. проектируемой модели, перенормируемость которой была доказана строго.

тация».

Хронометрическая гравитация построена в терминах скалярного поля *хронона*, описывающего выделенное расслоение времени (по сути, выделенную систему отсчета). Хронометрическая теория может быть рассмотрена как частный случай т.н. «Эйнштейн—эфир гравитации», — наиболее общей эффективной теории описывающей нарушение лоренцевой симметрии присутствием единичного времениподобного векторного поля, названного *эфиром* [25–27]. Эйнштейн – эфир гравитация и хронометрическая теории обладают идентичными скалярными и тензорными секторами и поэтому для ряда аспектов могут считаться эквивалентными. Принципиальная разница между этими теориями – наличие в спектре возмущений Эйнштейн – эфир гравитации дополнительных векторных мод, которые, однако, не столь важны для космологических и астрофизических приложений.

Подход Хоржавы к квантовой гравитации предполагает, что лоренц–инвариантность (ЛИ) не является точной симметрией природы. В этой связи весьма важно заметить, что справедливость ЛИ была проверена с высокой точностью только для частиц Стандартной модели [28], тем временем как ограничения в других секторах (гравитации, тёмной материи, тёмной энергии) либо гораздо слабее, либо вовсе отсутствуют. При этом ЛИ в секторе Стандартной модели может быть возникающим свойством, характерным для низких энергий [29, 30] и нарушенным при высоких. Что же касается других секторов, то в зависимости от их динамики они могут характеризоваться существенными отклонениями от ЛИ даже при низких энергиях.

Изучение следствий отклонений от ЛИ в секторах гравитации, инфлатона, тёмной материи и тёмной энергии интересно по ряду причин. Во—первых, это дает весьма заманчивую возможность протестировать модели квантовой гравитации Хоржавы—Лифшица с помощью космологических наблюдений. Во—вторых, любое экспериментальное указание на отклонение от ЛИ будет иметь революционное значение для развития фундаментальной физики. Если же таковых отклонений не будет обнаружено, то можно будет говорить об экспериментальной верификации ЛИ в соответствующих секторах.

Наиболее важной космологической наблюдаемой, позволившей надежно установить справедливость стандартной космологической модели, является анизотропия температуры микроволнового реликтового излучения. Несмотря на впечатляющие успехи, количество информации, которое может быть получено с помощью наблюдений микроволнового излучения, ограничено. Этот предел обусловлен тем, что информация о температуре и поляризации реликтового излучения собирается с небесной сферы, которая является двумерной

поверхностью. С другой стороны, распределение материи (например, галактик) во Вселенной предоставляет собой трехмерный объем данных (еще одно измерение дано красным смещением), что в итоге даёт доступ к значительно большему количеству Фурье-гармоник, позволяющему уменьшить статистическую ошибку определения космологических параметров. Таким образом, есть все основания утверждать, что распределение материи, называемое крупномасштабной структурой Вселенной (КСВ), имеет потенциал стать основным источником новой информации о космологии в ближайшем будущем.

В настоящее время уже функционирует ряд глубоких обзоров неба (напр. SDSS, DES, 2MASS, PAU). В ближайшие годы их количество еще больше возрастет с введением в строй новых спутников и телескопов, таких как «Евклид» (запуск в 2020 г.), DESI (начало работы в 2019), LSST (начало работы в 2023). Эти обзоры покроют колоссальный объем Вселенной и дадут много новой информации о её эволюции и физике. Извлечение этой информации из наблюдательных данных является весьма сложной задачей и требует, в частности, точного описания процесса нелинейного сгущивания. Наиболее прямолинейный подход к этой задаче – численное моделирование методом частиц (N-body method). Несмотря на существенный прогресс в этой области, обусловленный непрерывным ростом вычислительной мощности, метод частиц всё еще являются достаточно ресурсозатратным и не позволяет расширить понимание физических процессов, ответственных за формирование наблюдаемых сигналов. Кроме того, представляется затруднительным использование численного моделирования для выявления наиболее эффективных стратегий поиска эффектов за рамками стандартной космологической модели. Эти факторы мотивируют развитие аналитических методов описания формирования структур в нелинейном режиме.

Важный класс составляют методы, основанные на теории возмущений. Эти методы опираются на тот факт, что на космологических масштабах больше нескольких десятков мегапарсек формирование структур обусловлено ТМ, которая может быть описана как почти идеальная жидкость без давления [32–37]. Начальные возмущения ТМ малы и подчиняются гауссовой статистике (что подкреплено данными по микроволновому излучению, [38]), т.е. их статистические свойства полностью определены двухточечной корреляционной функцией (или её Фурье-образом, спектром мощности). Нелинейные эффекты при этом описываются при помощи разложения полей скорости и плотности ТМ в ряд Тейлора по степеням начальных возмущений. В предположении отсутствия давления и вихревой компоненты скорости ТМ, данный метод известен как стандартная эйлеровой теории возмущений (СТВ) [39, 40]. Дальнейшее усреднение по статистическому ансамблю приводит к петлевому

разложению для нелинейных корреляционных функций космологических полей [41].

СТВ является простым и естественным методом учета нелинейностей, однако она имеет ряд недостатков. Эти недостатки так или иначе связаны с чувствительностью к коротковолновым («ультрафиолетовым», УФ) или длинноволновым («инфракрасным», ИК) возмущениям. Вклады в петлевые интегралы от соответствующих областей интегрирования оказываются достаточно большими, что существенно ограничивает предел применимости теории возмущений. Иногда эта проблема нестрого называется наличием УФ (ИК) расходимостей петлевых интегралов, хотя эти расходимости формально отсутствуют для начального спектра мощности стандартной космологической модели.

Ультрафиолетовая чувствительность петлевых интегралов в СТВ приводит к тому, что результаты вычислений начинают сильно зависеть от физики на малых масштабах, на которых приближение идеальной жидкости для тёмной материи неприменимо. Было предложено решение данной проблемы путем применения к КСВ идей эффективной теории поля [36]. В этом подходе УФ вклады петлевых интегралов должны быть перенормированны, а эффекты динамики на малых масштабах параметризованы различными эффективными операторами в уравнениях движения для тёмной материи [42, 43]. Данные операторы, называемые также «контрчленами», проблематично вывести из первых принципов, и поэтому они должны быть фиксированы из наблюдательных данных или при помощи численного моделирования. В свою очередь, результаты численного моделирования [33, 44] свидетельствуют, что зависимость от мелкомасштабной динамики должна быть существенно слабее, чем предсказывается СТВ, что подтверждает качественные аргументы о разделении масштабов [32]. Последнее указывает на то, что аккуратное описание КСВ в рамках теории возмущений может быть возможным при достаточно общих предположениях о динамике на коротких масштабах.

С другой стороны, появление ИК расходимостей в СТВ является следствием использования начального распределения полей для вычисления их корреляторов на поздних временах. Это приводит к большим секулярным вкладам в смещение частиц ТМ за счет крупномасштабных потоков. Хорошо известно, что при вычислении корреляторов плотностей взятых в один и тот же момент сопутствующего времени ИК расходимости, возникающие в петлевых интегралах СТВ, сокращаются после полного суммирования всех вкладов данного порядка теории возмущений [45]. Иными словами, сильная чувствительность к ИК модам нефизична. Эта чувствительность, однако, сильно затрудняет как численные вычисления, так и анализ физических эффектов, создаваемых крупномасштабными потоками. Послед-

ние оказывают сильное влияние на барионные акустические осцилляции [46], аккуратное описание которых требует пересуммирования инфракрасных эффектов [47–49].

Барионные акустические, или сахаровские осцилляции (СО) - это осцилляционная особенность в распределении материи на больших масштабах (~ 150 Мпк), которая используется для получения точной информации об истории расширения Вселенной [50–54]. Глубокие обзоры неба ближайшего будущего измерят двухточечную корреляционную функцию материи на масштабах сахаровских осцилляций (СО) с точностью лучше одного процента, поэтому её теоретическое описание, с учетом нелинейных эффектов, является весьма актуальной задачей. Так как характерный масштаб СО (~ 150 Мпк) достаточно велик, априорно можно полагать, что нелинейные эффекты должны быть слабы. Однако, давно известно, что низшие нелинейные поправки СТВ не могут воспроизвести поведение СО, наблюдаемое в результатах численного моделирования [46, 47, 49, 55]. Источником этого несогласия является приливной эффект крупномасштабных потоков, который, в отличие от ИК расходимостей, сокращающихся вследствие принципа эквивалентности [41, 45, 56–58], является физическим [48, 49]. Можно показать, что соответствующий (инфракрасный) вклад в корреляционные функции оказывается существенно усиленным, иными словами, эффективный параметр разложения в вычислениях по стандартной теории возмущений становится большим, и, таким образом, нарушается само условие применимости теории возмущений.

Различные методы были предложены для учета нелинейного воздействия крупномасштабных потоков. С одной стороны, на уровне анализа данных большое распространение получила техника «реконструкция» СО [46, 59–61], которая заключается в измерении скоростей крупномасштабных потоков и решении обратной задачи по их перемещению назад во времени в момент когда нелинейности были пренебрежимо малы. С другой стороны, точное определение космологических параметров из наблюдаемых данных ближайшего будущего требует более глубокого теоретического понимания СО. В частности, хорошей моделью для СО является приближение Зельдовича [62] в лагранжевой теории возмущений [63, 64]. Не очевидно, однако, как систематически учесть поправки за рамками данного приближения в лагранжевом подходе [65]. Альтернативным подходом является рассмотрение задачи в переменных эйлеровой гидродинамики, выделение усиленных инфракрасных вкладов и их дальнейшее пересуммирование [47–49].

Цель и задачи диссертационной работы.

Данная диссертационная работа имеет две основных цели: с одной стороны, – это изучение наблюдательных следствий моделей квантовой гравитации в космологии; с другой

– разработка адекватных методов учета нелинейного сгущения тёмной материи актуальных для описания формирования структур. Для достижения поставленных целей требуется решить следующие задачи:

1. Изучить феноменологические следствия квадратичной гравитации в космологии и сопоставить их с данными о наблюдаемой Вселенной.
2. Изучить следствия нарушения Лоренцевой симметрии в секторах гравитации, инфлатона и тёмной материи. Поставить ограничения на соответствующие параметры исходя из последних данных о микроволновом излучении и крупномасштабной структуре Вселенной.
3. Разработать новый аналитический подход для учета нелинейного сгущения материи, который позволит избежать недостатков стандартных методов.

Научная новизна и практическая значимость.

В диссертации исследована эволюция Вселенной в модели квадратичной гравитации. Изучен режим, в котором взаимодействие духа и частиц Стандартной модели подавлено, что имеет место если дух легче 10 МэВ. В этой ситуации духи производятся исключительно благодаря гравитационным эффектам на инфляционной стадии. Показано, что данная модель не может описывать наблюдаемую Вселенную. Это ставит ограничения на параметры теории и указывает на то, что пренебречь рождением духа невозможно. Таким образом, для построения реалистичных феноменологических моделей в рамках квадратичной гравитации с необходимостью требуется предварительно решить проблему нарушения унитарности.

Предложена модель инфляции с нарушенной ЛИ. В рамках этой модели удалось осуществить ультрафиолетовое пополнение *духовой инфляции* [66] — популярной низкоэнергетической теории для описания эффектов нарушения ЛИ на инфляционной стадии. Таким образом, изучение этих эффектов было поставлено на твердую теоретическую основу. Показано, что предсказания модели можно будет протестировать с помощью наблюдательных данных уже в ближайшем будущем.

Исследованы ограничения на нарушение ЛИ в ГМ и гравитации, следующие из космологических наблюдений. Выявлены и исследованы интересные с наблюдательной точки зрения эффекты, которые затем были ограничены с использованием данных спутника «Планк» по реликтовому излучению и обзора крупномасштабной структуры Вселенной «ВигглЗ» (WiggleZ). Таким образом были получены сильнейшие на данный момент космологические ограничения на параметры нарушения ЛИ в гравитации. Кроме того, впервые были получены ограничения на нарушение ЛИ в ГМ.

Предложен новый подход для описания формирования крупномасштабной структуры Вселенной в нелинейном режиме. Данный подход основан на изучении зависящей от времени функции распределения космологических полей, позволяющей вычислить их корреляторы на фиксированных красных смещениях. В предложенном подходе, названном *теория возмущений на временных расслоениях* (ТВВР), удалось естественным образом разделить временную эволюцию и статистическое усреднение, что позволило избежать нелокальности во времени, присутствующей в стандартных подходах.

Метод ТВВР применён для точного описания нелинейных эффектов длинноволновых возмущений, которые влияют на сахаровские осцилляции, присутствующие в распределении материи на больших расстояниях. В рамках ТВВР это осуществляется посредством систематического инфракрасного пересуммирования, имеющего простое диаграммное представление. Показано, что корреляционная функция материи, вычисленная в рамках данного метода, хорошо согласуется с данными численного моделирования на масштабах сахаровских осцилляций. Получена надежная оценка смещения пика этих осцилляций в координатном пространстве.

Апробация результатов.

Основные результаты диссертации доложены на конференциях: «Ломоносов–2012» (МГУ, 9-13 апреля 2012), «Прогресс в старых и новых вопросах космологии» (Авиньон, Франция, 14-18 апреля 2014), «Зельдович–100» (ИКИ РАН, Москва, 16-20 июня 2014), «КОСМО–2015» (Варшава, Польша, 7-11 сентября 2015), «Техасский симпозиум по релятивистской астрофизике» (Женева, Швейцария, 13-18 декабря 2015), «Морион Космология 2016» (Ла Тюиль, Италия, 19-26 марта 2016), «Современная космология и гравитационно-волновая астрономия» (Москва, ГАИШ, 16-18 ноября 2016), «Швейцарские космологические встречи» (Базель, Швейцария, 6-7 февраля 2017), на международных семинарах: «Кварки-2012» (Ярославль, 4-10 июня 2012), «Кварки-2014» (Суздаль, 2-8 июня 2014), «Кварки-2016» (Пушкин, 29 мая-4 июня 2016), на международных школах: «Зимняя школа ИТЭФ» (Отрадное, 14-21 февраля 2012), «4-я Бюраканская летняя школа» (Армения, 14-28 сентября 2012), «6-я школа по космологии в Пассо-Тонале» (Италия, 9-12 декабря 2012), «За рамками Эйнштейновской теории гравитации» (о. Парос, Греция, 23-28 сентября 2013), на семинарах в ГАИШ МГУ (Москва, 25 сентября 2012, 15 марта 2016), ИЯИ РАН (Москва, 19 мая 2015, 17 марта 2016, 21 ноября 2016, 18 сентября 2017), университете Брюсселя (Бельгия, 5 сентября 2014), Женевском университете (Швейцария, 20 ноября 2015), ЦЕРНе (Женева, Швейцария, 10 февраля 2016), университете Гейдельберга (Германия, 25 октября 2016), университете Осло (Норвегия, 3 ноября 2016), университете Утрехта (Нидерланды, 19 января 2017).

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 8 печатных работах в изданиях, входящих в список ВАК [67–74].

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, 7 глав основного текста, заключения, библиографии и двух приложений. Общий объем диссертации 173 страницы, включая 20 рисунков. Библиография включает 163 наименования на 12 страницах.

Глава 1

Космология с легким «духом»

Квадратичная гравитация – исторически первая перенормируемая модель гравитации, которая, однако, как было упомянуто во Введении, обладает одним существенным недостатком. Требование квантовой устойчивости вакуума модели приводит к появлению степеней свободы с отрицательной нормой, *духов*, которые нарушают унитарность теории. В данной главе мы не пытаемся решить эту проблему, но принимаем относительно неё агностическую точку зрения. В данный момент не существует самосогласованной общепринятой интерпретации неунитарных процессов, однако, квадратичная гравитация может иметь предсказательную силу независимо от какой – либо интерпретации этих процессов если их вероятность крайне мала в течение жизни Вселенной. В данном случае нарушение унитарности будет подавлено и квадратичная гравитация станет приемлемой, по крайней мере, с феноменологической точки зрения. Как будет показано ниже, масса духового поля при этом должна быть меньше 10 МэВ, в связи с чем в дальнейшем рассматриваемая модель будет именоваться «квадратичной гравитацией с легким духом».

В данной главе изучаются производство и эволюция первичных возмущений в модели квадратичной гравитации для области параметров, реализующей сценарий с подавлением неунитарных процессов. Будет показано, что на фоне инфляционного пространства де Ситтера поле духа приобретает тахионную массу в конформной ньютоновской калибровке, что приводит к росту соответствующих возмущений за хаббловским горизонтом в процессе инфляции. Будет показано, что данная неустойчивость является калибровочным артефактом, т.к. в калибровке однородного инфлатона загоризонтный рост возмущений отсутствует.

Будет показано, что в течение инфляции в рассматриваемой модели производятся два типа скалярных возмущений: обычная адиабатическая мода, чей спектр мощности совпадает с соответствующим выражением для случая обычной инфляции с одним скалярным полем, и скалярная часть вектора сдвига метрики, связанная с духовой степенью свободы. В процессе дальнейшей эволюции плотность энергии этой моды становится доминирующей во Вселенной вскоре после того, как параметр Хаббла уменьшится до значения массы духового поля. Данная ситуация отчасти напоминает проблему «легких модулей» [75], однако, в рассматриваемой модели ситуация оказывается более серьезной, что в конечном счете указывает на неприемлемость квадратичной гравитации с легким духом для описания реальной

Вселенной.

1.1. Описание модели

Квадратичная гравитация – перенормируемая теория гравитации, действие которой включает инварианты, квадратичные по скаляру кривизны, тензору кривизны и тензору Риччи. Благодаря тождеству Гаусса – Бонне, только два из этих инвариантов являются независимыми в четырех измерениях, и для удобства в качестве линейно – независимых инвариантов мы выберем квадраты скаляра кривизны и тензора Вейля. Рассматриваемое действие имеет вид

$$S = \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(-R + \frac{1}{6\mu^2} R^2 - \frac{1}{2m^2} C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} \right), \quad (1.1)$$

где R – скаляр кривизны, $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ – тензор Вейля и M_P – «урезанная» масса Планка.¹

На фоне плоского пространства – времени спектр данной теории состоит из безмассового безследово – поперечного возмущения спина 2 (гравитон), частицы спина 0 и массы μ (названной скаляроном в [17]), и частицы со спином 2 и массой m , которая обладает «неправильным» знаком кинетического слагаемого. В дальнейшем, при квантовании этой степени свободы мы будем использовать соглашение об отрицательной норме, которое приводит к потере унитарности, но гарантирует положительную энергию состояний и устойчивость относительно распада вакуума. В данной работе мы предполагаем, что массы духа и скалярона на фоне плоского пространства не являются тахионными,

$$m^2 > 0 \quad \text{и} \quad \mu^2 > 0. \quad (1.2)$$

Хотя условие $\mu^2 > 0$ отвечает области параметров модели, несовместимой с асимптотической свободой [12, 13], случай $\mu^2 < 0$ неприемлем феноменологически, т.к. соответствующая космологическая эволюция ведет либо к коллапсу, либо к сингулярности типа «большой разрыв» [76–78].

Для дальнейшего рассмотрения удобно перейти в эйнштейновскую систему отсчета посредством конформного преобразования [79]. Напомним, что тензор Вейля является ин-

¹ Единицы измерения: $M_P = 1/\sqrt{8\pi G} \simeq 2.4 \times 10^{18}$ ГэВ, $c = 1$. Соглашения: (+ – – –); $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \dots$; $R_{\nu\sigma} = R^\mu{}_{\nu\mu\sigma}$; $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$; $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$. $C_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{2}(g_{\mu\rho} G_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} G_{\nu\rho} - g_{\nu\rho} G_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma} G_{\mu\rho}) - \frac{R}{3}(g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho})$. Греческие индексы пробегают значения от 0 до 3; латинские индексы – от 1 до 3.

вариантом конформных преобразований. Это приводит к следующему действию:

$$\begin{aligned}
S &= S_{GR} + S_{\Phi} + S_{\text{Weyl}} \\
&= -\frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R + \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\partial_{\mu}\Phi \partial^{\mu}\Phi - 2V(\Phi)) \\
&\quad - \frac{M_P^2}{4m^2} \int d^4x \sqrt{-g} C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma},
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где $V(\Phi)$ – потенциал Старобинского

$$V(\Phi) = \frac{3}{4} \mu^2 M_P^2 \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Phi}{M_P}} \right)^2. \tag{1.4}$$

Хотя модель Старобинского [17] является наиболее естественной для реализации инфляции в квадратичной гравитации, в дальнейшем анализе мы будем полагать, что $V(\Phi)$ – произвольный перенормируемый потенциал, допускающий режим «медленного скатывания». В таком рассмотрении дальнейшие результаты будут более модельно–независимыми и применимыми, в частности, к инфляционным моделям в рамках α -гравитации, предложенным в [12, 80]. Поле Φ в дальнейшем будет называться инфлатоном.

Вариации действия (1.3) по метрике и Φ приводят к системе из модифицированных уравнений Эйнштейна и Клейна – Гордона – Фока,

$$\begin{aligned}
\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}\Phi + V_{,\Phi}(\Phi) &= 0, \\
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \frac{1}{m^2}B_{\mu\nu} &= \frac{1}{M_P^2}T_{\mu\nu}, \\
\text{где } B_{\mu\nu} &\equiv \left(2\nabla^{\alpha}\nabla^{\beta} + R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R \right) C_{\mu\alpha\nu\beta}, \\
T_{\mu\nu} &= \partial_{\mu}\Phi\partial_{\nu}\Phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2}(\partial_{\mu}\Phi)^2 - V(\Phi) \right),
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где ∇_{μ} – ковариантная производная.

Наличие состояний с отрицательной нормой приводит к процессам с формально отрицательными ширинами и сечениями. Интерпретация данных процессов до сих пор является открытым вопросом, в частности, отрицательные ширины распадов могут означать нарушение причинности [81], причем даже унитарность может быть восстановлена в рамках подобной интерпретации. Неясно однако, как применить данные аргументы в более общем случае и дать объяснение неунитарным процессам в космологии. С другой стороны, можно принять обычную вероятностную интерпретацию, из которой следует, что процессы с отрицательными вероятностями соответствуют неустойчивостям. В рамках такой интерпретации распад духа соответствует экспоненциальному росту его плотности энергии, что следует из

уравнения Больцмана,

$$\frac{dn_{gh}}{dt} + 3Hn_{gh} = |\Gamma|n_{gh}, \quad (1.6)$$

где H – параметр Хаббла, n_{gh} – концентрация духов, и Γ – отрицательная ширина распада духов.

Поля скалярона и духа являются компонентам метрики, поэтому взаимодействуют с полями материи универсальным образом (см., к примеру, [82]). Как следствие, выражение для ширины распада духов аналогично, с точностью до численного множителя, соответствующему выражению для скалярона [83], но со знаком «минус», происходящим из соглашения об отрицательной норме,

$$\Gamma \sim -\frac{m^3}{M_P^2}. \quad (1.7)$$

Выбрав массу духовой частицы достаточно малой, можно добиться того, чтобы подобные процессы были подавлены. Требуя, чтобы характерное время распада духа было больше, чем время жизни Вселенной, получаем консервативное ограничение

$$m \lesssim 10 \text{ МэВ}. \quad (1.8)$$

В то же время гравитационные эксперименты на коротких масштабах накладывают на массу духа ограничение сверху. В ньютоновском пределе действие (1.1) приводит к обычному выражению для ньютоновского гравитационного потенциала плюс поправки, подавленные юкавскими экспонентами [7]. Экспериментальные ограничения на эти поправки [84, 85] вкупе с (1.8), приводят к следующему двойному ограничению на массу духа:

$$10^{-1} \text{ эВ} \lesssim m \lesssim 10 \text{ МэВ}. \quad (1.9)$$

Подытоживая, перечислим различные режимы квадратичной гравитации в зависимости от массы духа m и её соотношения с параметром Хаббла во время инфляции H_{inf} ,

- $m > H_{inf}$ («тяжелый дух»). Возмущения духа не производятся на инфляции и не имеют какого – либо эффекта в космологии. Отметим, что в модели α -гравитации масса духа должна быть меньше 3×10^{10} ГэВ для естественности («натуральности») малого масштаба электрослабых взаимодействий [12]. Так как в простейших инфляционных сценариях $H_{inf} \gtrsim 10^{13}$ ГэВ, достижение натуральности в рамках α -гравитации с тяжелым духом кажется проблематичным.²

² Среди всех инфляционных сценариев, рассмотренных в [80], наименьшим энергетическим масштабом обладает модификация инфляции Старобинского, $H_{inf} \sim 10^{13}$ ГэВ.

- $10 \text{ МэВ} < m \ll H_{inf}$ («дух с промежуточным масштабом масс»). Флуктуации поля духов возбуждаются на стадии инфляции. Для данного диапазона масс неунитарные процессы (распад духа) имеют место после инфляции и приемлемость теории зависит от их интерпретации. Так как самосогласованной интерпретации в данный момент не существует, феноменологические следствия достаточно спекулятивны.
- $0.1 \text{ эВ} \lesssim m \lesssim 10 \text{ МэВ}$ («легкий дух»).

Распад духа подавлен и лабораторные ограничения удовлетворены. Квадратичная гравитация может быть феноменологически жизнеспособна и её предсказания не зависят от конкретной интерпретации неунитарных процессов. Мы сосредоточимся на этом режиме и изучим предсказания теории как на стадии инфляции (в разделе 1.2), так и на поздних временах (в разделе 1.3).

1.2. Инфляционный режим

Рассмотрим рождение космологических возмущений на стадии инфляции. Так как тензор Вейля равен нулю для однородных и изотропных метрик, однородная («фоновая») инфляционная динамика в рассматриваемой модели тождественна обычной инфляции с одним скалярным полем. Подставляя однородный и изотропный анзац для метрики и инфлатона,

$$\begin{aligned} ds^2 &= a(\tau)^2(d\tau^2 - \mathbf{dx}^2), \\ \phi &= \Phi(\tau), \end{aligned} \tag{1.10}$$

в уравнение (1.5), мы получаем стандартные уравнения для фоновых переменных:

$$\begin{aligned} 3M_P^2 \mathcal{H}^2 &= \frac{\Phi'^2}{2} + a^2(\tau)V, \\ 3M_P^2 \mathcal{H}' &= -\Phi'^2 + a^2(\tau)V, \\ \Phi'' + 2\mathcal{H}\Phi' + a^2 V_{,\Phi} &= 0, \end{aligned} \tag{1.11}$$

где штрихи обозначают частные производные по конформному времени, $' \equiv \partial/\partial\tau$ и $\mathcal{H} \equiv a'/a$ – конформный параметр Хаббла. Мы также будем использовать величины, выраженные в терминах космического времени $t = \int a(\tau)d\tau$, и обозначать производные по нему точками, $H \equiv \dot{a}/a$.

Ускоренное расширение Вселенной имеет место пока параметры медленного скатыва-

ния малы. Последние определены стандартным образом :

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &\equiv \frac{M_P^2}{2} \left(\frac{V_{,\Phi}}{V} \right)^2 = \frac{\Phi'^2}{2\mathcal{H}^2 M_P^2}, \\ \epsilon_2 &\equiv \frac{M_P^2 V_{,\Phi\Phi}}{V}.\end{aligned}\tag{1.12}$$

В формальном пределе $V \rightarrow \text{const}$ (эквивалентно, $\Phi' \rightarrow 0$), параметры медленного скатывания зануляются и фоновое решение сводится к точному пространству де Ситтера, характеризующемуся масштабным фактором

$$a(\tau) = -1/(H\tau),\tag{1.13}$$

с $H = M_P^{-1} \sqrt{V/3} = \text{const}$.

В дальнейшем мы рассмотрим скалярные возмущения в конформной ньютоновой калибровке,

$$\begin{aligned}ds^2 &= a(\tau)^2 \left[(1 + 2\phi(\tau, \mathbf{x})) d\tau^2 - (1 - 2\psi(\tau, \mathbf{x})) \delta_{ij} dx^i dx^j \right], \\ \phi &= \Phi(\tau) + \varphi(\tau, \mathbf{x}).\end{aligned}\tag{1.14}$$

Раскладывая действие (1.3) до квадратичного порядка по возмущениям,³ получаем

$$S_{\text{Weyl}}^{(2)} = -\frac{M_P^2}{3m^2} \int d^4x [\Delta(\psi + \phi)]^2,\tag{1.15a}$$

$$S_{GR}^{(2)} = \frac{M_P^2}{2} \int d^4x a^2 \left[-6\psi'^2 - 12\mathcal{H} \phi \psi' + 4\psi \Delta\phi - 2\psi \Delta\psi - 2(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2) \phi^2 \right],\tag{1.15b}$$

$$S_{\phi}^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^4x a^2 \left(\varphi'^2 + \varphi \Delta\varphi - a^2 V_{,\Phi\Phi} \varphi^2 - 6(\Phi' \varphi' - V_{,\Phi} \varphi) \psi - 2(\Phi' \varphi' + a^2 V_{,\Phi} \varphi) \phi \right),\tag{1.15c}$$

где $\Delta \equiv \partial^i \partial_i$ обозначает пространственный лапласиан.

В дальнейшем анализе мы будем придерживаться следующей стратегии. Сперва мы рассмотрим предельный случай точного пространства де Ситтера, мотивированный малостью параметров медленного скатывания. В этом пределе возмущения инфлатона «отщепляются» от возмущений метрики, так что инфлатон и дух ведут себя как свободные поля во внешнем гравитационном поле. На следующем шаге мы рассмотрим малые, но конечные параметры медленного скатывания и вычислим поправки, возникающие за счет «смешивания» инфлатона и метрики. Начиная с этого момента, везде где не может возникнуть путаница, мы будем называть духом только *скалярную* компоненту соответствующего массивного поля спина 2.

³ Здесь мы пренебрегаем членами, исчезающими на фоновых уравнениях движения (1.11).

1.2.1. Предел точного пространства де Ситтера

В рассматриваемом пределе квадратичное действие для флуктуаций инфлатона имеет стандартный вид:

$$S_\phi^{(2)} = \frac{1}{2} \int d\tau d^3x a^2 \left[(\dot{\phi}')^2 - (\partial_i \phi)^2 \right]. \quad (1.16)$$

Инфлатон квантуется обычным образом,

$$\varphi(\mathbf{x}, \tau) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\varphi_{\mathbf{k}}(\tau) a_{\mathbf{k}} + \varphi_{\mathbf{k}}^*(\tau) a_{-\mathbf{k}}^+) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad (1.17)$$

где операторы рождения – уничтожения удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям:

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{q}}^+] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q}). \quad (1.18)$$

Функции мод $\varphi_{\mathbf{k}}$ – положительно - частотные решения уравнения

$$\varphi_{\mathbf{k}}'' + 2\mathcal{H}\varphi_{\mathbf{k}}' + k^2\varphi_{\mathbf{k}} = 0. \quad (1.19)$$

Они также имеют стандартный вид:

$$\varphi_{\mathbf{k}}^{(dS)} \equiv \frac{H}{\sqrt{2k}} |\tau| \left(1 - \frac{i}{k\tau} \right) e^{-ik\tau}. \quad (1.20)$$

Возмущения духа

Теперь рассмотрим скалярные компоненты метрики. Поле ϕ входящее в (1.15a) и (1.15b) – не динамическое, так как на него действует всего одна производная по времени. Варьируя действия (1.15a) и (1.15b) по ϕ и производя Фурье – разложение $\phi, \psi \propto e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$, мы находим следующее условие связи:

$$-\frac{2}{3m^2 a^2} k^4 (\phi + \psi) - 6\mathcal{H}\psi' - 2k^2\psi - 2(2\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}')\phi = 0. \quad (1.21)$$

Можно увидеть появление нового зависящего от времени масштаба $k_{gh}(\tau) \equiv k^2/(a(\tau)m)$, который также зависит от волнового числа Фурье – гармоники. Естественно назвать этот масштаб «духовым горизонтом». Чтобы понять его роль, рассмотрим динамику Фурье – моды с конформным импульсом k (см. Рис. 1.1). Эволюция этой моды начинается глубоко под хаббловским горизонтом, когда духовый горизонт параметрически меньше $2\pi/k$. Иными словами, мода k «лежит» вне духового горизонта. В этом режиме крайний левый член в (1.21) является лидирующим. Так как этот член берет своё начало из квадрата тензора Вейля в действии, логично назвать этот режим «вейлевским доминированием».

При выходе за обычный горизонт, $\mathcal{H} = k$, мода с k остаётся за духовым горизонтом. В процессе расширения Вселенной духовый горизонт увеличивается и в определенный момент становится больше обычного горизонта, после этого динамика возмущений метрики, с формальной точки зрения, доминирована эйнштейновским членом.

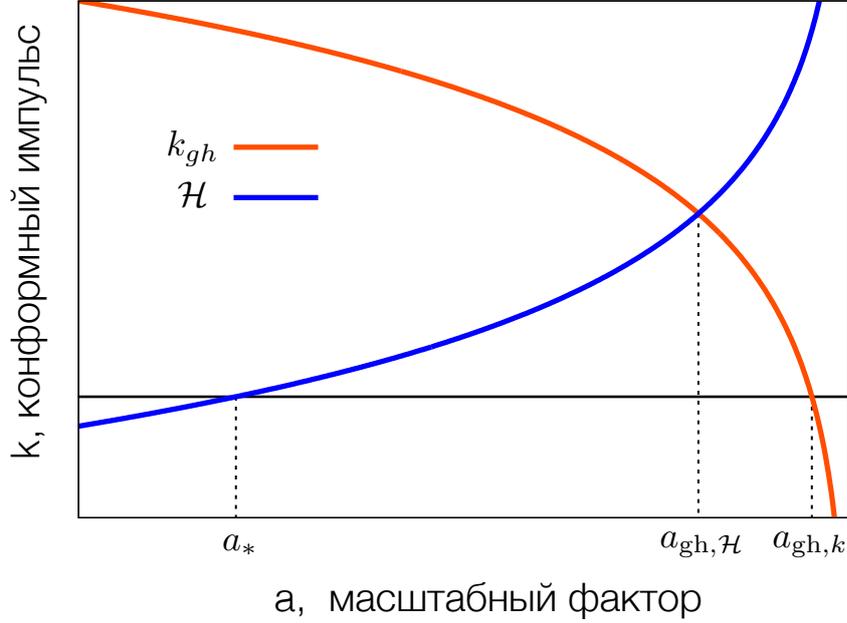


Рис. 1.1. Зависимость от времени динамических масштабов, определяющих эволюцию возмущений метрики: конформный импульс k (горизонтальная черта), конформный параметр Хаббла \mathcal{H} (синяя линия) и духовый горизонт $k_{gh} = k^2/(ma(\tau))$ (оранжевая линия). Для остальных обозначений см. основной текст.

Для характерных значений массы духа, рассматриваемых в этой работе, духовый горизонт становится равен обычному горизонту примерно после ~ 15 е-фолдингов с момента выхода за хаббловский горизонт,

$$\ln \frac{a_{gh,\mathcal{H}}}{a_*} = \ln \sqrt{\frac{H}{m}} \simeq 17 \times \ln \left(\left[\frac{H}{10^{13} \text{ ГэВ}} \right] \left[\frac{10 \text{ МэВ}}{m} \right] \right), \quad (1.22)$$

где $a_{gh,\mathcal{H}}$ - масштабный фактор при котором хаббловский горизонт становится равен духовому горизонту, и a_* - масштабный фактор на момент пересечения горизонта. В конечном итоге Фурье мода k «входит под духовый горизонт», т.е. его размер становится больше, чем $2\pi/k$. Это происходит примерно через ~ 30 е-фолдингов после «пересечения» обычного горизонта,

$$\ln \frac{a_{gh,k}}{a_*} = \ln \frac{H}{m} \simeq 34 \times \ln \left(\left[\frac{H}{10^{13} \text{ ГэВ}} \right] \left[\frac{10 \text{ МэВ}}{m} \right] \right), \quad (1.23)$$

где $a_{gh,k}$ – масштабный фактор на момент пересечения духового горизонта. Рассмотрим выделенные динамические режимы по – отдельности.

Режим доминирования Вейлевского слагаемого, $k_{gh} \gg \mathcal{H}, k$. Решение уравнения (1.21) в лидирующем порядке по $\mathcal{H}/k_{gh}, k/k_{gh}$ дано выражением

$$\phi = -\psi, \quad (1.24)$$

которое после подстановки в уравнения (1.15a), (1.15b), и последующей канонической нормировки $\hat{\psi} \equiv M_P \sqrt{6} \psi$, приводит к следующему квадратичному действию для поля ψ :

$$S_{\hat{\psi}}^{(2)} \Big|_{k, \mathcal{H} \ll k_{gh}} = \frac{1}{2} \int d^4x a^2 \left[-\hat{\psi}'^2 + (\partial_i \hat{\psi})^2 - \frac{4}{3} (2\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}') \hat{\psi}^2 \right]. \quad (1.25)$$

Отсюда следует, что скалярная часть поля духа приобретает тахионную массу на фоне пространства де Ситтера. Чтобы проквантовать дух мы вводим Фурье – гармоника аналогично (1.17)

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}, \tau) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\hat{\psi}_{\mathbf{k}}(\tau) b_{\mathbf{k}} + \hat{\psi}_{\mathbf{k}}^*(\tau) b_{-\mathbf{k}}^+) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \quad (1.26)$$

с операторами рождения – уничтожения, удовлетворяющими коммутационным соотношениям ⁴

$$[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{q}}^+] = -(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q}). \quad (1.27)$$

Стоит отметить, что эти операторы коммутируют с теми, что были введены в (1.17),

$$[a_{\mathbf{k}}^+, b_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{q}}^+] = 0. \quad (1.28)$$

Функции мод $\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}$ являются решениями уравнения (1.25),

$$\hat{\psi}_{\mathbf{k}}'' + 2\mathcal{H}\hat{\psi}_{\mathbf{k}}' + k^2\hat{\psi}_{\mathbf{k}} - 4\mathcal{H}^2\hat{\psi}_{\mathbf{k}} = 0, \quad (1.29)$$

где мы использовали тождество $\mathcal{H}' = \mathcal{H}^2$ верное для пространства де Ситтера. Положительночастотное решение уравнения (1.29), удовлетворяющее начальным условиям Банча – Дэвиса, имеет вид

$$\hat{\psi}_{\mathbf{k}} = \frac{H}{\sqrt{2k}} |\tau| \left(1 - \frac{3i}{k\tau} - \frac{3}{(k\tau)^2} \right) e^{-ik\tau}. \quad (1.30)$$

Из данного выражения следует, что тахионная масса духа приводит к загоризонтной неустойчивости, растущей как масштабный фактор. Данная неустойчивость указывает на нарушение условия применимости теории возмущений в ньютоновой калибровке и должна приводить также и к неустойчивости возмущений инфлатона, которые «смешиваются» с

⁴ Мы предполагаем, что $b_{\mathbf{k}}$ – оператор уничтожения вакуума Банча – Дэвиса, т.е. $b_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0$.

возмущениями метрики из – за отличия фоновой метрики от метрики точного пространства де Ситтера.

Режим доминирования Эйнштейновского слагаемого, $\mathcal{H} \gg k_{gh}$. В данном случае Вейлевский член пренебрежимо мал и решение уравнения (1.21) в первом неисчезающем порядке по k_{gh}/\mathcal{H} имеет вид

$$\phi = -\frac{\psi'}{\mathcal{H}} - \frac{k^2\psi}{3\mathcal{H}^2} + \frac{k_{gh}^2(\tau)}{9\mathcal{H}^2} \left(\frac{\psi'}{\mathcal{H}} + \frac{k^2\psi}{3\mathcal{H}^2} - \psi \right). \quad (1.31)$$

Переходя в координатное пространство и подставляя данное решение в действия (1.15a), (1.15b) получаем

$$S_\psi^{(2)} \Big|_{\mathcal{H} \gg k_{gh}} = - \int d^3x d\tau \frac{M_P^2 \Delta^2}{3m^2} \left[\frac{\psi'}{\mathcal{H}} - \frac{\Delta\psi}{3\mathcal{H}^2} - \psi \right]^2. \quad (1.32)$$

Данное действие приводит к следующим уравнениям движения в загоризонтном пределе (где можно пренебречь лапласианами),

$$\psi'' + \frac{2}{\tau}\psi' = 0. \quad (1.33)$$

Это уравнение имеет растущее решение,

$$\Phi \propto \tau^{-1} \sim a(\tau), \quad (1.34)$$

которое согласуется с лидирующим загоризонтным поведением (1.30). Таким образом, произведя сшивку решений (1.30) и (1.34), нетрудно убедиться, что функции мод ψ не меняются при пересечении духового горизонта. Подстановка решения (1.34) в уравнение (1.31) приводит, в главном порядке по k^2/\mathcal{H}^2 , к выражению

$$\psi = -\phi. \quad (1.35)$$

Примечательно, что решения (1.30) и (1.24) не меняются когда вейлевский член становится подавлен по сравнению с эйнштейновским. Образно выражаясь, возмущения духа «не чувствуют», что эйнштейновский член становится лидирующим слагаемым в действии. Данное свойство не случайно, так как условие (1.35) отражает тот факт, что скалярные возмущения на фоне точного пространства де Ситтера являются конформно – инвариантными (для таких мод вейлевский член зануляется (1.15a)). Эта мода была впервые найдена в [86].

Резюмируя, подчеркнем, что условие связи (1.24) и решение для функций мод поля духа (1.30) справедливы (в главном порядке) в течение всего периода инфляции несмотря на то, что члены, обуславливающие динамику возмущений метрики, меняются в процессе эволюции.

1.2.2. За рамками предела точного пространства де Ситтера

В данном разделе будут изучены поправки возникающие за счет смешивания между возмущениями духа и инфлатона, имеющего место вследствие медленного скатывания фонового поля инфлатона. В согласии с нашей стратегией, выражение для возмущений метрики, полученное в предыдущем разделе, будет использовано как источник в неоднородном уравнении для поля инфлатона, получающегося из (1.15с),

$$\varphi_{\mathbf{k}}'' + 2\mathcal{H}\varphi_{\mathbf{k}}' + k^2\varphi_{\mathbf{k}} = 2\Phi'\psi_{\mathbf{k}}' + 2a^2V_{,\Phi}\psi_{\mathbf{k}}. \quad (1.36)$$

Поле ψ дано выражением (1.30). Оно имеет следующую асимптотику за горизонтом:

$$\psi_{\mathbf{k}} \Big|_{\tau \rightarrow -0} = -\frac{3H^2}{2\sqrt{3} \cdot k k^2 M_P} a(\tau) e^{-ik\tau} \equiv C_{\mathbf{k}} a(\tau), \quad (1.37)$$

где для удобства мы вернулись к безразмерным переменным и явно выделили зависимость от времени. Уравнение (1.36) с источником (1.37) имеет следующее решение:

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \varphi_{\mathbf{k}}^{(dS)} - \frac{2(\Phi'' + \mathcal{H}\Phi')}{3\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}'} C_{\mathbf{k}} a(\tau). \quad (1.38)$$

Используя условия $\ddot{\phi} \approx 0$, $\mathcal{H}^2 \approx \mathcal{H}'$ справедливые в приближении медленного скатывания, уравнение (1.38) может быть переписано как

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \varphi_{\mathbf{k}}^{(dS)} - \frac{\Phi'}{\mathcal{H}} C_{\mathbf{k}} a(\tau). \quad (1.39)$$

Закключаем, что как возмущения духа, так и возмущения инфлатона растут за горизонтом в конформной ньютоновской калибровке. Этот рост, однако, можно интерпретировать как калибровочный артефакт, так как неустойчивости отсутствуют в калибровке однородного инфлатона. Помимо этого, как будет показано ниже, все калибровочно – инвариантные величины, вычисленные с использованием ньютоновской калибровки, являются конечными.

Калибровка однородного инфлатона

В данной калибровке (называемой также калибровкой сопутствующего расслоения) метрика имеет три скалярных моды:

$$g_{00} = a^2(1 + 2A), \quad g_{0i} = a^2\partial_i B, \quad g_{ij} = -a^2\delta_{ij}(1 + 2\zeta). \quad (1.40)$$

Калибровочно – инвариантная величина ζ , определяемая как возмущение числа e – фолдингов на гиперповерхностях однородного поля инфлатона, может быть получена из переменных ньютоновской калибровки,

$$\zeta = -\phi - \frac{\mathcal{H}}{\Phi'}\varphi. \quad (1.41)$$

Можно определить функции мод ζ аналогично (1.17) и вычислить их используя функции мод для φ и Φ (уравнения (1.29) и (1.39)),

$$\zeta_{\mathbf{k}} = -\psi_{\mathbf{k}} - \frac{\mathcal{H}}{\Phi'}\varphi_{\mathbf{k}} = -\frac{\mathcal{H}}{\Phi'}\varphi_{\mathbf{k}}^{(dS)} = -\frac{H}{\dot{\Phi}}\varphi_{\mathbf{k}}^{(dS)}, \quad (1.42)$$

где $\varphi_{\mathbf{k}}^{(dS)}$ дано в уравнении (1.20). Видно, что растущие за горизонтом вклады в точности сокращают друг друга в (1.42), так что выражение для инвариантного скалярного возмущения ζ совпадает с соответствующим выражением для случая инфляции с одним полем. Следовательно, оно должно быть постоянным за горизонтом аналогично случаю обычной гравитации, [87, 88]. Отметим, что сохранение ζ в квадратичной гравитации было впервые доказано в работе [89].

Другим нетривиальным скалярным возмущением в калибровке однородного инфлатона является продольная часть B вектора сдвига g_{0i} , см. (1.40). Соответствующие функции мод могут быть получены из возмущений инфлатона в ньютоновской калибровке с помощью соотношений

$$B_{\mathbf{k}} = \frac{\varphi_{\mathbf{k}}}{\Phi'} = \zeta_{\mathbf{k}}\tau + \frac{C_{\mathbf{k}}}{H}, \quad (1.43)$$

где в последнем равенстве мы использовали уравнения (1.39) и (1.42). Первое слагаемое в правой части уравнения (1.43) (адиабатическая мода) зануляется в пределе $\tau \rightarrow 0$. Второе слагаемое произведено возмущениями духа и в пределе $\tau \rightarrow 0$ выходит на константу,

$$B_{0,\mathbf{k}} \equiv \frac{C_{\mathbf{k}}}{H} = -\frac{\sqrt{3}}{2k^{5/2}} \frac{H}{M_P}. \quad (1.44)$$

Третье скалярное возмущение в калибровке однородного инфлатона, функция хода A , зануляется за горизонтом,

$$A = \phi - \mathcal{H}B - B' = \zeta - B' = 0, \quad (1.45)$$

где были использованы уравнения (1.24), (1.42) и (1.43).

Таким образом мы установили, что инфляционные возмущения в рассматриваемой модели испытывают загоризонтный рост в конформной ньютоновской калибровке. Этот рост, однако, является нефизическим калибровочным артефактом, так как все возмущения ограничены по величине и сохраняются за горизонтом в калибровке сопутствующего расслоения. Этот факт предлагает две возможности для дальнейшего действия:

1) продолжать работать в ньютоновской калибровке и игнорировать то, что растущие функции мод формально нарушают условие применимости теории возмущений. Данный

факт не должен пугать, так как растущие моды в конечном счете должны сократиться в калибровочно-инвариантных величинах.

2) работать в калибровке сопутствующего расслоения (однородного инфлатона).

Материал изложенный в данной диссертации будет следовать первому пути. В оригинальной работе автора [67] анализ также был выполнен и в рамках второго метода, и было показано, что результаты обоих подходов совпадают.

1.2.3. Наблюдательные предсказания

Спектр мощности адиабатических возмущений дан стандартной формулой,

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \lim_{\tau \rightarrow -0} |\zeta_{\mathbf{k}}(\tau)|^2 = \frac{H^4}{4\pi^2 \dot{\Phi}^2} \Big|_{aH=k}, \quad (1.46)$$

где были использованы (1.42), (1.20), и явно подчеркнуто, что спектр мощности должен быть фиксирован при пересечении горизонта.

Что касается скалярной моды постоянной кривизны B , её спектр мощности дан выражением

$$\langle |B(\tau, \mathbf{x})|^2 \rangle \xrightarrow{\tau \rightarrow -0} \langle |B_0(\mathbf{x})|^2 \rangle = \int \frac{dk}{k} \frac{\mathcal{P}_B(k)}{k^2}, \quad (1.47)$$

где $\mathcal{P}_B(k)$ - спектр мощности вектора сдвига (градиента B), который весьма похож на спектр мощности тензорных мод в хаотической инфляции на одном поле,

$$\mathcal{P}_B(k) = \frac{k^5}{2\pi^2} |B_{0,\mathbf{k}}|^2 = \frac{3H^2}{8\pi^2 M_P^2} \Big|_{aH=k}. \quad (1.48)$$

Заметим, что амплитуда (1.47) квадратично расходится для возмущений с большими длинами волн. Это наблюдение не должно вызывать беспокойство, так как в рассматриваемой задаче существует естественный масштаб обрезания, определенный хаббловским горизонтом. Моды с длинами волн больше горизонта не могут быть наблюдаемы инструментально, так как их эффект всегда может быть устранен калибровочным преобразованием. Таким образом, они не вносят вклада в локальную плотность энергии. Ситуация здесь аналогична первичным гравитационным волнам, хотя их амплитуда расходится только логарифмически для спектра мощности близкого к масштабнo-инвариантному [90–92].

Чтобы исследовать корреляцию между модами B и ζ , мы выразим их через поле инфлатона φ и ньютоновский гравитационный потенциал Φ аналогично (1.42) и (1.43). Используя (1.26), (1.17) и (1.28), находим, что корреляция между двумя модами исчезает на загоризонтных масштабах,

$$\langle B(\tau, \mathbf{x}) \zeta(\tau, \mathbf{x}) \rangle = -\frac{\mathcal{H}}{\Phi'^2} \langle |\varphi(\tau, \mathbf{x})|^2 \rangle = \tau \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_\zeta \xrightarrow{\tau \rightarrow -0} 0. \quad (1.49)$$

Спектр мощности тензорных мод был вычислен в работах [93–95],

$$\mathcal{P}_h = \frac{2}{\pi^2} \frac{H^2}{M_P^2} \frac{1}{1 + 2\frac{H^2}{m^2}} \Big|_{aH=k} \simeq \frac{1}{\pi^2} \frac{m^2}{M_P^2} \Big|_{aH=k}. \quad (1.50)$$

Значения духовых масс из диапазона (1.9) приводят к ничтожно малому скалярно - тензорному отношению

$$r = \frac{\mathcal{P}_h}{\mathcal{P}_\zeta} = 7 \times 10^{-34} \left[\frac{m}{10 \text{ MeV}} \right]^2 \left[\frac{10^{-10}}{\mathcal{P}_\zeta} \right]. \quad (1.51)$$

Для объяснения этого результата заметим, что предел $m \rightarrow 0$ соответствует чистой конформной гравитации, в которой пространство де Ситтера эквивалентно плоскому пространству, в котором квантовые гравитационные возмущения не усиливаются [86]. Спектр векторных мод был вычислен в работе [94] и дается тем же соотношением (1.50), так что он также исчезающе мал в рассматриваемом пределе.

Подытоживая, выделим, что рассматриваемая модель предсказывает такую же амплитуду адиабатических возмущений, как обычная инфляция, наличие скалярных возмущений духа и исчезающе малые амплитуды векторных и тензорных возмущений.

1.3. После инфляции: проблема космологических духов

Постинфляционный разогрев происходит в течение осцилляций поля инфлатона, которые приводят к рождению легких частиц, что также можно рассматривать как распад инфлатона. В рассматриваемой модели поле духа слишком легкое, чтобы распадаться, и поэтому разогрев происходит полностью аналогично разогреву в модели с одиночным скалярным полем. Начиная с данного момента, мы будем обозначать хаббловский параметр на инфляции, фигурировавший в предыдущем разделе, как H_{inf} , тем временем как H будет использоваться для обозначения хаббловского параметра на горячей стадии.

В процессе расширения Вселенной хаббловский параметр уменьшается и в определенный момент становится равным духовой массе. Оценим температуру Вселенной в этот момент,

$$\begin{aligned} H &= 1.66 \sqrt{g_*} \frac{T_m^2}{M_P} = m, \Rightarrow \\ T_m &= \sqrt{\frac{m M_P}{1.66 \sqrt{g_*}}} = 3.8 \left[\frac{m}{10^{-1} \text{ эВ}} \right]^{1/2} \left[\frac{100}{g_*} \right]^{1/4} \text{ ТэВ}, \end{aligned} \quad (1.52)$$

где g_* - эффективное количество релятивистских степеней свободы.⁵

⁵ Напомним, что для Стандартной модели физики частиц $g_* = 106.75$ при температуре $T > 200$ ГэВ.

Можно показать, что возмущение ζ сохраняется за горизонтом после инфляции и становится источником адиабатической моды аналогично случаю стандартной космологии. Что касается неадиабатической моды B , она является постоянной на загоризонтных масштабах до тех пор, пока справедливо $m < H$. В режиме $m > H$ данная мода начинает осциллировать. Так как дух не может распасться, энергия осцилляций не может быть потрачена на рождение частиц и поэтому плотность энергии духа возрастает и начинает доминировать во Вселенной. Оценим, когда это происходит.

Как мы видели в предыдущем разделе, канонически нормированное поле духа дано, с точностью до константы, выражением для ньютоновского гравитационного потенциала ψ . В общем случае это поле выражается через B и ζ как

$$-\psi = \zeta + \mathcal{H}B, \quad (1.53)$$

Таким образом, ψ имеет два вклада: адиабатическую моду, связанную с ζ , и моду постоянной кривизны, производимую сохраняющимся возмущением B . Рассмотрим неадиабатический вклад в ψ . За горизонтом перед началом осцилляций поле духа дано выражением

$$\psi_{\text{gh}} = -\mathcal{H}B_0. \quad (1.54)$$

Плотность энергии духа равна⁶

$$\rho_{\text{gh}} = m^2 \langle \hat{\psi}_{\text{gh}}^2(t, \mathbf{x}) \rangle, \quad (1.55)$$

где $\hat{\psi}_{\text{gh}} = \sqrt{6}M_P\psi_{\text{gh}}$. Перед началом осцилляций имеем,

$$\psi_{\text{gh}}|_{m=H} = -a(t_m)H(t_m)B_0, \quad (1.56)$$

где t_m обозначает момент начала осцилляций, $m = H(t_m)$. После того, как хаббловский масштаб стал меньше массы духа, поле духа дано стандартным выражением $\psi \simeq \text{const} \times \cos(mt + \alpha_0)/a^{3/2}(t)$ (см. например [92]), где α_0 - некоторая фаза. Сшивая это решение с (1.56), получаем

$$\psi_{\text{gh}} = -a(t_m)mB_0 \left(\frac{a(t_m)}{a(t)} \right)^{3/2} \cos(mt + \alpha_0). \quad (1.57)$$

Подставляя (1.57) в (1.55) имеем,

$$\begin{aligned} \rho_{\text{gh}} &= 6M_P^2 m^4 a^2(t_m) \langle B_0^2 \rangle \left(\frac{a(t_m)}{a(t)} \right)^3 \cos^2(mt + \alpha_0), \\ &= \frac{6M_P^2 m^4 a^5(t_m) \cos^2(mt + \alpha_0)}{a(t)^3} \int \frac{dk}{k} \frac{\mathcal{P}_B}{k^2}, \end{aligned} \quad (1.58)$$

⁶ Напомним, что мы придерживаемся правила квантования при котором поле духа имеет положительную плотность энергии.

где мы использовали (1.47), и интеграл берется по конформным импульсам. Этот интеграл насыщается на инфракрасном масштабе, определяемом хаббловским параметром,

$$k_{min} = \mathcal{H}(\tau) = aH. \quad (1.59)$$

Пренебрегая наклоном первичного спектра \mathcal{P}_B , мы получаем следующее выражение для локальной плотности энергии духа под горизонтом

$$\begin{aligned} \rho_{gh} &\simeq \frac{3M_P^2 m^4 a^5(t_m)}{2a(t)^3} \frac{1}{a(t)^2 H(t)^2} \mathcal{P}_B \\ &= \frac{3M_P^2 m^4}{2H^2(t)} \left(\frac{T(t)}{T_m} \right)^5 \mathcal{P}_B, \end{aligned} \quad (1.60)$$

где мы усреднили по быстрым осцилляциям и выразили масштабный фактор через температуру Вселенной T .

Чтобы найти температуру T_{gh} , при которой духи «перезакрывают» Вселенную, мы приравниваем плотность энергии (1.60) к плотности энергии фона $3H^2 M_P^2$ и используем выражение для хаббловского параметра на стадии доминирования излучения (см. (1.52)), что приводит к

$$T_{gh} = [\mathcal{P}_B/2]^{1/3} (M_P^* m)^{1/2} \simeq 260 \left[\frac{H_{inf}}{10^{13} \text{ ГэВ}} \right]^{2/3} \left[\frac{m}{10^{-1} \text{ эВ}} \right]^{1/2} \left[\frac{100}{g_*} \right]^{1/4} \text{ МэВ}. \quad (1.61)$$

Таким образом, духи начинают доминировать во Вселенной до начала первичного нуклеосинтеза (температура ~ 1 МэВ). Предполагая, что духи эффективно устойчивы, стадии доминирования духов можно избежать только для масс намного меньше 10^{-1} эВ, которые исключены лабораторными ограничениями, обсужденными в разделе 1.1. Заключаем, что наличие устойчивого духа несовместимо с наблюдаемой картиной Вселенной.⁷

Отметим, что полученный результат отличается от обычной проблемы космологических легких модулей, в которой «перезакрывания» Вселенной можно избежать для разумных значений массы поля и инфляционного параметра Хаббла. Чтобы продемонстрировать это утверждение, рассмотрим свободное скалярное поле s с массой m_s гораздо меньше хаббловского параметра на инфляции. Флуктуации этого поля $\delta s \sim H_{inf}$ сохраняются за горизонтом и соответствующий спектр мощности дан выражением

$$\mathcal{P}_s = \frac{H_{inf}^2}{(2\pi)^2}. \quad (1.62)$$

⁷ Нужно отметить, что доминирование духа можно избежать в моделях инфляции, происходящей при низких энергиях. Варьируя H_{inf} можно показать, что духи не будут доминировать, если инфляционный параметр Хаббла $H_{inf} \lesssim 1$ МэВ. Такой сценарий, однако, требует неестественно плоского потенциала инфлатона, и поэтому он не будет рассмотрен в данной работе.

В данном случае вычисление плотности энергии скаляра, аналогичное произведенному выше, дает следующий относительный вклад в полную плотность энергии во Вселенной сейчас:

$$\begin{aligned}\Omega_s &= \frac{\rho_{s,0}}{3H_0^2 M_P^2} \simeq \frac{1}{3M_P^2} \left[\frac{m_s}{H_0} \right]^{1/2} \Omega_\gamma^{3/4} \int_{aH} \frac{dk}{k} \mathcal{P}_s \\ &\simeq 5 \times 10^{-3} \left[\frac{H_{inf}}{10^{11} \text{ ГэВ}} \right]^2 \left[\frac{m_s}{0.1 \text{ эВ}} \right]^{1/2} \left[\frac{N_e}{60} \right],\end{aligned}\tag{1.63}$$

где H_0 - параметр Хаббла, Ω_γ - относительный вклад излучения, $\rho_{s,0}$ - плотность энергии легкого скаляра, все в настоящее время; N_e - число е-фолдингов (мы предположили что спектр \mathcal{P}_s масштабно инвариантен).

1.4. Заключение к главе

В данном разделе мы изучали рождение и эволюцию космологических возмущений в квадратичной гравитации. Хорошо известно, что в зависимости от процедуры квантования, данная теория либо является неунитарной, либо испытывает неустойчивость Остроградского. Во втором случае теория паталогична как с квантовой, так и с классической точек зрения, в то время как первый случай всё же может феноменологически приемлемым, если неунитарные процессы подавлены.

Неунитарная квадратичная гравитации не может быть интерпретирована в рамках стандартной квантовой механики и поэтому не может быть рассмотрена как окончательная теория до тех пор, пока удовлетворительная интерпретация не найдена. Предсказания теории, однако, не будут зависеть от конкретной интерпретации если дух эффективно устойчив, т.е. частота неунитарных процессов пренебрежимо мала на протяжении жизни Вселенной. Было показано, что это имеет место, если масса духа меньше 10 МэВ. С другой стороны, масса духа ограничена снизу на уровне 0.1 эВ лабораторными тестами гравитации на малых масштабах. Номинально, эти ограничения оставляют 8 порядков значений масс духа, для которых квадратичная гравитация может быть феноменологически приемлемой.

В рамках рассматриваемой модели было показано, что в течение инфляции рождаются скалярные адиабатические возмущения кривизны (которые неотличимы от случая инфляции на одном поле), и скалярные возмущения духа, которые отождествлены с продольной компонентой вектора сдвига в калибровке сопутствующего расслоения. Амплитуды векторных и тензорных возмущения оказались значительно подавлены. Скалярная компонента духа сохраняется за горизонтом и её плотность энергии становится лидирующей во Вселенной сразу после того, как поле духа начинает осциллировать. Таким образом, проведенное

исследование показало, что модель с легким (устойчивым) духом не сопоставима с эволюцией нашей Вселенной. Полученный результат не зависит от какой-либо интерпретации неунитарных процессов.

Стадии духового доминирования можно избежать либо предположив, что дух всё - таки распадается, либо подобрав параметры так, чтобы он вообще не производился в течение инфляции. В первом случае жизнеспособность модели зависит от интерпретации неунитарных процессов с отрицательными вероятностями. Что касается второй возможности, для её реализации в случае простейших потенциалов инфлатона масса духа должна превышать 10^{13} ГэВ, что нарушает ограничение $m \lesssim 10^{10}$ ГэВ накладываемое требованием естественности низкого масштаба электрослабых взаимодействий в α -гравитации [12]. Таким образом, проведенный анализ указывает на необходимость достаточно экзотического инфляционного сценария в α -гравитации для того, чтобы низкий масштаб электрослабых взаимодействий был натуральным.

Глава 2

Теория гравитации с нарушением Лоренцевой симметрии

В общем случае нарушение лоренцевой симметрии в гравитационном секторе описывается в рамках Эйнштейн-эфир гравитации [26, 27]. В дополнение к метрике $g_{\mu\nu}$ такая теория включает динамическое времени-подобное векторное поле u_μ единичной длины,

$$u_\mu u^\mu = 1 . \quad (2.1)$$

Единичное по определению векторное поле не может исчезнуть во всём пространстве. Таким образом, оно задает выделенную систему отсчета и нарушает локальную Лоренц - инвариантность в ОТО (группу $SO(1, 3)$) до подгруппы пространственных вращения $SO(3)$ вокруг вектора u_μ . Подобно некоей вездесущей жидкости, рассматриваемое векторное поле определяет конгруэнцию времени-подобных кривых во всем пространстве, и поэтому было названо *эфир*. Динамика эфира описывается следующим действием

$$S_{[\text{ОТО}]} + S_{[u]} = -\frac{M_0^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (R + K^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho} \nabla_\mu u^\sigma \nabla_\nu u^\rho + l(u_\mu u^\mu - 1)) , \quad (2.2)$$

$$K^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho} = c_1 g^{\mu\nu} g_{\sigma\rho} + c_2 \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu + c_3 \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu + c_4 u^\mu u^\nu g_{\sigma\rho} , \quad (2.3)$$

в котором отметим присутствующий явно лагранжев множитель, накладывающий условие (2.1). Связь параметра M_0 с массой Планка в ньютоновском приближении дана соотношением

$$M_P^2 = M_0^2 \left(1 - \frac{c_1 + c_4}{2} \right) . \quad (2.4)$$

Эйнштейн-эфир гравитация является наиболее общей эффективной теорией, описывающей эффекты нарушения симметрии относительно лоренцевых бустов в гравитации. С точки зрения ультрафиолетового поведения, более перспективным выглядит вариант Эйнштейн-эфир гравитации, в котором эфир ограничен до продольной компоненты, названной *хронон* [96]

$$u_\mu \equiv \frac{\partial_\mu \sigma}{\sqrt{g^{\lambda\nu} \partial_\lambda \sigma \partial_\nu \sigma}} . \quad (2.5)$$

В этом случае единичная нормировка эфира следует автоматически и, кроме того, имеется дополнительная симметрия:

$$\sigma \mapsto \tilde{\sigma}(\sigma) , \quad (2.6)$$

где $\tilde{\sigma}(\sigma)$ - произвольная дифференцируемая функция. Предполагается, что σ имеет времениподобный градиент в любой точке пространства - времени. Таким образом, данное поле

описывает выделенное расслоения пространственно - подобных поверхностей, по сути, выделенное время, в честь чего и было названо хронон (от греческого «*Χρονοζ*» - «время»). Действие хронометрической гравитации получается из (2.2) после учета того, что вихревая компонента эфира равна нулю. Это обстоятельство позволяет выразить линейно зависимый оператор с коэффициентом c_1 через операторы c_3 и c_4 . Действие хронона, таким образом, зависит только от трех свободных параметров:

$$\alpha \equiv c_1 + c_4, \quad \beta \equiv c_1 + c_3, \quad \lambda \equiv c_2. \quad (2.7)$$

Как показано в [23, 24, 96], действие (2.2) естественным образом возникает при низких энергиях из гравитации Хоржавы-Лифшица, т.е. хронометрическая теория имеет известное ультрафиолетовое продолжение в контексте модели перенормируемой гравитации [18]. Эйнштейн – эфир и хронометрическая гравитации являются эффективными теориями поля с масштабом обрезания [97]

$$\Lambda_{\text{cutoff}} = M_0 \sqrt{\alpha}, \quad (2.8)$$

что всего на несколько порядков меньше массы Планка, если параметры α, β, λ не слишком малы.

Параметры α, β, λ (в дальнейшем будем считать, что эти параметры одного порядка и часто писать просто α имея ввиду весь набор α, β, λ) характеризуют величину Лоренц - нарушения (ЛН) в гравитации и, как мы вскоре увидим, должны быть малы, чтобы удовлетворять различным экспериментальным ограничениям,

$$\alpha \ll 1. \quad (2.9)$$

Читателя не должно смущать то, что мы описываем отклонение от Лоренц - инвариантности в рамках общековариантного действия (2.2). В некотором смысле, данная картина аналогична спонтанному нарушению симметрии, хотя эта аналогия и не является полной.¹

Подчеркнем, что главное различие между хронометрической и Эйнштейн-эфир теориями состоит в числе степеней свобод: в первой нет векторных мод, тем временем как скалярный и тензорный сектора обеих теорий практически² эквивалентны. Однако, как было показано в [74, 100], векторные моды не влияют ни на однородное расширение Вселенной,

¹ Соотношение (2.1) полностью исключает какие-либо Лоренц-инвариантные (ЛИ) вакуумы. Попытка сделать длину вектора u_μ динамической ведет к появлению фазы с восстановленной лоренцевой симметрией, в которой присутствуют «духи» [98].

² Единственное различие - присутствие мгновенной моды в случае хронометрической гравитации [99], которая, однако, не влияет на локальную физику, рассматриваемую в данной работе.

ни на линейную эволюцию скалярных космологических возмущений для набора параметров, исключающих неустойчивости. Помимо этого, в следующей главе будет представлена модель, в которой векторные возмущения не производятся на стадии инфляции вовсе.

2.1. Наблюдательные ограничения на параметры нарушения Лоренц—инвариантности в гравитации

Можно показать, что параметры Лоренц - нарушающей (ЛН) гравитации c_i могут быть выбраны так, чтобы возмущения всех секторов были устойчивы и имели положительную энергию, [24, 27]. Чтобы избежать потерь энергии космическими лучами на излучение черенковских гравитонов и скалярных хрононов [98], необходимо, чтобы скорости распространения тензорной (c_t) и скалярной (c_χ) мод были больше скорости космических лучей, которая близка к единице, т.е.

$$c_t^2 = \frac{1}{1-\beta} \geq 1, \quad c_\chi^2 = \frac{\beta+\lambda}{\alpha} \geq 1. \quad (2.10)$$

Все вместе данные ограничения дают условия

$$0 < \alpha < 2, \quad \beta + \lambda \geq \alpha, \quad \beta \geq 0. \quad (2.11)$$

Феноменологические следствия теорий с действием (2.2) были хорошо изучены [96, 101]. Высокая точность проверки Лоренц-инвариантности в секторе Стандартной модели запрещает прямое взаимодействие полей Стандартной модели с эфиром, т.е. в соответствующем лагранжиане может присутствовать только взаимодействие этих полей с метрикой $g_{\mu\nu}$. Однако, эфир может воздействовать на гравитационное поле, создаваемое материей. На ньютоновском уровне такое воздействие ведет к ненаблюдаемой перенормировке гравитационной постоянной, которая становится равной [24, 102],

$$G_N \equiv \frac{1}{8\pi M_0^2} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{-1}. \quad (2.12)$$

Для изучения отклонений от Лоренц-инвариантности в гравитации в рамках тестов в Солнечной системе принято описывать их с помощью параметров параметризованного постньютоновского формализма (ППН-параметров) α_1^{PPN} и α_2^{PPN} . Значения этих параметров для хронометрической модели были вычислены в [96, 101],

$$\begin{aligned} \alpha_1^{PPN} &= -4(\alpha - 2\beta), \\ \alpha_2^{PPN} &= \frac{(\alpha - 2\beta)(\alpha - \lambda - 3\beta)}{2(\lambda + \beta)}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Наблюдения в Солнечной системе дают ограничения [103]

$$|\alpha_1^{PPN}| \lesssim 10^{-4}, \quad |\alpha_2^{PPN}| \lesssim 4 \cdot 10^{-7}. \quad (2.14)$$

Эти ограничения тривиально выполняются в ОТО, где $\alpha_1^{PPN} = \alpha_2^{PPN} = 0$. Для теорий с ЛН они в общем случае ведут к условию³

$$|\alpha, \beta, \lambda| \lesssim 10^{-7}. \quad (2.15)$$

При столь малых значениях ЛН параметров рассчитывать на интересные следствия в космологии не приходится. Ограничения из Солнечной системы, однако, возможно смягчить для специального набора параметров, который зануляет соответствующие ППН параметры. В хронометрической теории это достигается с помощью всего одного условия (см. 2.13)

$$\alpha = 2\beta. \quad (2.16)$$

В случае Эйнштейн - эфир гравитации комбинация которая зануляет ППН - параметры другая (это обусловлено вкладом векторных степеней свободы) и в общем случае необходимо удовлетворить двум условиям [105],

$$\begin{aligned} c_1 c_4 + c_3^2 &= 0, \\ 2c_1 + 3c_2 + c_3 + c_4 &= 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Первое условие квадратично по ЛН параметрам и в силу их малости удовлетворено с необходимой точностью для значений $c_i \sim 10^{-3}$. Что касается второго условия, то в терминах параметров хронометрической теории оно принимает вид

$$\alpha + \beta + 3\lambda = 0. \quad (2.18)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать, в основном, скалярный и тензорный сектора, поэтому набора параметров α, β, λ будет достаточно для изучения как Эйнштейн - эфир, так и хронометрической модели.

После наложения условий (2.16) и (2.18) остается еще два свободных параметра ЛН в скалярном секторе и один - в векторном. Эти параметры можно ограничить из космологических или астрофизических наблюдений, в частности, из первичного нуклеосинтеза

³ Существует еще одно жесткое ограничение на параметры Лоренц - нарушения, следующее из ограничений на параметр $\hat{\alpha}_2^{PPN}$, - обобщение α_2^{PPN} в пределе сильного поля. Этот параметр определяется с помощью измерения кривой излучения одиночных пульсаров [104], что приводит к условию $|\alpha, \beta, \lambda| \lesssim 10^{-9}$.

[106], излучения гравитационных волн в пульсарах [101, 107], и данных космологических экспериментов SPT, WMAP 7 и WiggleZ [108] следует

$$|\beta, \lambda| \lesssim 10^{-2}. \quad (2.19)$$

В дальнейшем мы постулируем условия (2.16) и (2.18) при поиске разрешенного пространства параметров. В разделе 5.2 мы увидим, что полученные космологические ограничения сопоставимы с (2.19), но не столь сильны как (2.15), что оправдывает сделанный выбор.

Параметр β , контролирующий скорость распространения гравитационных волн (см. (2.10)), можно также ограничить напрямую из наблюдения гравитационных волн экспериментом LIGO [109]. Деля расстояние между двумя установками в Ханфорде и Ливингстоне на измеренную задержку сигнала, можно получить независимое ограничение $c_t \leq 1.7$. В комбинации с черенковским ограничением имеем следующее двустороннее модельно – независимое ограничение на скорость распространения тензорных возмущений:

$$1 \leq c_t \leq 1.7. \quad (2.20)$$

В контексте рассматриваемом ЛН гравитации это ограничение транслируется в

$$0 < \beta \leq 0.6. \quad (2.21)$$

Данное ограничение слабее чем те, что были обсуждены выше, но является прямым, надежным и не зависящим от астрофизических или космологических вырождений и систематических погрешностей.

В последующих разделах будут подробно изучены космологические эффекты в моделях с нарушением лоренцевой симметрии в секторах гравитации, инфлатона и темной материи. Это позволит, в частности, улучшить перечисленные выше ограничения на ЛН в гравитации и поставить первые прямые ограничения на ЛН в темной материи.

2.2. Заключение к главе

В этой главе был представлен теоретический фундамент для описания эффектов нарушения лоренцевой симметрии в гравитации. Были обсуждены две модели, Эйнштейн – эфир гравитация и хронометрическая гравитация, которые описывают нарушение лоренцевых бустов с помощью введения времени–подобного вектора эфира, задающего выделенную систему отсчета. Описаны ограничения, полученные на параметры рассматриваемых модели из тестов в Солнечной системе, наблюдений двойных систем и космологии. Было

показано, что из наблюдений гравитационных волн интерферометром LIGO можно поставить прямое, надежное и модельно – независимое ограничение на скорость распространения тензорных возмущений. Отметим, что в главе 5 этой работы космологические ограничения будут значительно улучшены по сравнению с теми, что обсуждались в данной главе.

Глава 3

Ультрафиолетовое пополнение духовой инфляции

Нарушение Лоренцевой симметрии в гравитации могло быть существенным на стадии инфляционного расширения, которая происходила при энергиях, близких к планковским. Давно известна интересная альтернатива популярному сценарию с медленным скатыванием, предполагающая нарушение Лоренц-инвариантности (ЛИ). Это модель духовой инфляции [66], возникшая из низкоэнергетической модификации гравитации – т.н. духового конденсата [110]. Есть два варианта этой модели: обычная духовая инфляция и духовая инфляция с наклоном. В первой теории духовое скалярное поле «конденсируется» возле фонового значения скорости $\langle \dot{\Phi} \rangle = M^2$; его возмущения имеют квадратичное дисперсионное соотношение $\omega \sim k^2/M$ и производятся с плоским спектром, что противоречит наблюдательным данным спутника «Планк» [3]. Последний недостаток был исправлен в т.н. духовой инфляции с наклоном [111], где возмущения духового поля имеют линейное дисперсионное соотношение $\omega = \delta k$ и скорость $\delta \ll 1$ определяет наклон спектра первичных возмущений. Духовая инфляция имеет нетривиальные предсказания: отсутствие гравитационных волн и сильная негауссовость определенной формы.

Духовая инфляция была изначально сконструирована как эффективная теория поля, в предположении, что существует её обобщение в рамках более фундаментальной ультрафиолетово – полной теории. Будет показано, что Эйнштейн - эфир гравитация способна предоставить требуемое ультрафиолетовое пополнение для духовой инфляции вплоть до энергий, близких к планковским. Будет предложена инфляционную модель, в которой инфлатон Φ взаимодействует с эфиром и «конденсируется» возле фонового значения постоянной скорости $\langle \dot{\Phi} \rangle = \mu^2$. При этом на уровне линейных возмущений появляется новый динамический масштаб k_c . Возмущения с физическими длинами волн больше чем k_c^{-1} описываются в рамках эффективной теории поля, которая воспроизводит пределы обычной или наклонной духовой инфляции в зависимости от параметров модели. В первом случае возмущения инфлатона имеют нерелятивистское дисперсионное уравнение $\omega \sim k^2/k_c$, где слабая зависимость k_c от значений поля инфлатона дает вклад в наклон спектра возмущений. Второй случай полностью эквивалентен духовой инфляции с наклоном: моды имеют дисперсионное уравнение $\omega = \delta k$, и наклон спектра пропорционален δ .

Существуют интересные различия между нашей моделью и стандартной духовой ин-

фляцией. В духовой инфляции имеется, по сути, три энергетических масштаба. Во-первых, это масштаб конденсата $\langle \dot{\Phi} \rangle = M^2$, который также определяет силу самодействия инфлатона и негауссовость первичных возмущений; во-вторых, это фоновая плотность энергии во время инфляции, $\rho_{inf}^{1/4}$; и в-третьих, это масштаб подавления импульсов в квадратичном дисперсионном соотношении M' . В стандартной описании духовой инфляции [110] (как и в более общем построении эффективной теории инфляции [112]) предполагается, что $\rho_{inf}^{1/4} \gg M \sim M'$. В предложенной нами модели все три обсуждаемых масштаба можно вычислить явно, и требование того, чтобы эффективное описание также распространялось на фоновую динамику, накладывает условие $M \gg M'$, при том что параметр $\rho_{inf}^{1/4}$ естественным образом может быть порядка M . Как результат этой иерархии, амплитуда негауссовости в предложенной модели оказывается ниже, чем в исходной версии духовой инфляции.

3.1. Инфляция с быстрым скатыванием

Отметим, что современные ограничения на параметры α, β, λ , обсуждавшиеся в главе 2, вообще говоря, не применимы к инфляционной стадии. Мы будем предполагать, однако, справедливость условия $\alpha \ll 1$.

Чтобы описать первичное ускоренное расширение Вселенной, мы добавим к системе (2.2) скалярное поле Φ -инфлатон. Данное поле может быть рассмотрено как псевдо-голдстоуновский бозон спонтанно нарушенной приближенной симметрии сдвига

$$\Phi \rightarrow \Phi + \text{const} . \quad (3.1)$$

Предположим сначала, что эта симметрия точная. Тогда наиболее общее действие инфлатона с операторами размерности не больше 4 обладающее этой симметрией имеет вид:

$$S_{[\Phi]} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \frac{\mathcal{K}}{2} (u^\mu \partial_\mu \Phi)^2 - \mu^2 u^\nu \partial_\nu \Phi - V \right] , \quad (3.2)$$

где V, κ, μ^2 - постоянные параметры. Так как данное действие не включает irrelevantных операторов, масштаб обрезания полной теории включающей действие (2.2) остаётся равен (2.8). Отметим, что параметр μ естественным образом защищен от больших квантовых поправок так как его малость является технически естественной, т.е. при исчезновении соответствующего оператора восстанавливается дискретная симметрия $\Phi \rightarrow -\Phi$.

На фоне плоского пространства-времени с $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$ второй член в (3.2) лишь изменяет скорость распространения возмущений инфлатона,

$$c_\Phi^2 = \frac{1}{1 + \kappa} ,$$

качественно не влияя при этом на физику. Скорость звука инфлатона будет качественно влиять на наши результаты только если она очень мала (или очень велика), что требует условия $\mathcal{K} \gg 1$ ($\mathcal{K} \ll 1$), которое выглядит неестественным с точки зрения эффективной теории поля. В дальнейшем для простоты изложения положим $c_\Phi = 1$ ($\mathcal{K} = 0$).

Действие, аналогичное (3.2) с $V = 0$ и $\mu^2 = \text{const}$, восстанавливающими точную симметрию относительно сдвига поля на постоянное значение было использовано для описания современного ускоренного расширения Вселенной [113]. На уровне однородной космологии такая модель неотличима от космологической постоянной и имеет точное решение в виде пространства де Ситтера. Последнее вкупе с точной симметрией инфлатона относительно сдвига на константу не согласуется с тем, что инфляция должна закончиться в определенной точке пространства полей. Это приводит к необходимости предположить то, что данная симметрия слабо нарушена во время инфляции. В дальнейшем, в добавок к нетривиальному потенциалу, мы будем также полагать, что μ^2 зависит от поля инфлатона,

$$\mu \rightarrow \mu(\Phi). \quad (3.3)$$

Единственным требуемым условием будет то, что V и μ^2 слабо меняются на протяжении инфляционной стадии. Используя пространственно-однородный анзац для интересующих нас полей,

$$ds^2 = N(t)^2 dt^2 - a(t)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.4a)$$

$$u_\mu = (N(t), 0, 0, 0), \quad \Phi = \Phi(t), \quad (3.4b)$$

получаем полное действие

$$\begin{aligned} & S_{[\text{OTO}]} + S_{[u]} + S_{[\Phi]} \\ &= -\frac{M_0^2}{2}(6 + 3\beta + 9\lambda) \int d^4x \frac{\dot{a}^2 a}{N} + \int d^4x \left(\frac{a^3}{2N} \dot{\Phi}^2 - \mu^2(\Phi) a^3 \dot{\Phi} - a^3 V(\Phi) N \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Варьируя это действие по N и Φ , и полагая после этого $N = 1$, получаем следующие уравнения движения:

$$\ddot{\Phi} + 3H(\dot{\Phi} - \mu^2) + V_{,\Phi} = 0, \quad (3.6a)$$

$$H^2 = \frac{1}{3M_0^2(1 + \beta/2 + 3\lambda/2)} \left(\frac{\dot{\Phi}^2}{2} + V \right). \quad (3.6b)$$

Можно выделить следующие инфляционные режимы:

1. Инфляция с быстрым скатыванием. Если мы предположим, что потенциал инфлатона и параметр его взаимодействия с хрононом постоянны,

$$V = \text{const}, \quad \mu^2 = \text{const}, \quad (3.7)$$

то уравнение (3.6a) имеет устойчивое решение, при котором инфлатон Φ «быстро катится» со скоростью $\dot{\Phi} = \mu^2$ по плоскому потенциалу. Рассматривая малое однородное возмущение над этим решением и выражая его с помощью ур-я (3.6a)

$$\dot{\Phi} = \mu^2(1 + \delta^2), \quad (3.8)$$

где

$$\delta^2 \equiv \frac{\dot{\Phi}^{(1)}}{\mu^2} \simeq -\frac{V_{,\Phi} + (\mu^2)_{,\Phi}\mu^2}{3H\mu^2} \ll 1, \quad (3.9)$$

мы заключаем, что режим быстрого скатывания имеет место при условии

$$\begin{aligned} H &\gg \frac{\dot{\mu}}{\mu}, \\ \mu^2 H &\gg V_{,\Phi}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Данные неравенства имеют четких физический смысл: первое означает, что вариации параметров модели малы в течение инфляционной стадии, второе - что вклад градиента потенциала в силу, действующую на инфлатон, пренебрежимо мал по сравнению с вкладом от взаимодействия эфира и инфлатона.

1.(a) Кинетическая инфляция. Интересный предел режима быстрого скатывания возникает, если потенциал отсутствует или пренебрежимо мал по сравнению с кинетическим слагаемым

$$\mu^4 \gg V. \quad (3.11)$$

В этом случае ур-е Фридмана (3.6b) дает в лидирующем порядке очень простое соотношение между хаббловским параметром и скоростью инфлатона,

$$6M_0^2 H^2 \approx \mu^4. \quad (3.12)$$

2. Инфляция с медленным скатыванием. Данный режим имеет место если $V \gg \dot{\Phi}^2$ и (см. 3.8)

$$\mu^2 \ll \dot{\Phi}^{(1)} \simeq \frac{V_{,\Phi}}{3H}. \quad (3.13)$$

Очевидно, что при этом симметрия сдвига инфлатона сильно нарушена во время инфляционной стадии. Режим медленного скатывания в рамках Эйнштейн–эфир гравитации был изучен в [114, 115]; в частности, было показано, что возмущения либо испытывают тахионную неустойчивость, либо эффект взаимодействия инфлатона с эфиром пренебрежимо мал.

В данной работе мы сконцентрируем внимание на случае инфляции с быстрым скатыванием, в котором инфлатон не имеет тахионной неустойчивости, обладая при этом приближенной симметрией сдвига (3.1). В отличие от Духовой инфляции и хронон-инфляции [116] мы не рассматриваем предел точного решения де Ситтера $\dot{H} \rightarrow 0$, а предполагаем \dot{H} конечным. Дифференцируя по времени уравнение (3.6b) и используя (3.8), имеем в главном порядке,

$$\dot{H} = \frac{\dot{\Phi}}{6M_0^2 H} ((\mu^2)_{,\Phi} \mu^2 + V') = \frac{\mu^2 \dot{\Phi}^{(1)}}{2M_0^2}. \quad (3.14)$$

Вводя параметр замедления ϵ_1 обычным образом,

$$-\epsilon_1 \equiv \frac{\dot{H}}{H^2} \simeq \frac{\mu^2 \dot{\Phi}^{(1)}}{2M_0^2 H^2} = \frac{3\dot{\Phi}^{(1)}}{\mu^2}, \quad (3.15)$$

мы видим, что условие применимости режима быстрого скатывания $\dot{\Phi}^{(1)} \ll \mu^2$ транслируется в $\epsilon_1 \ll 1$.

3.2. Линейные возмущения

Рассмотрим сначала тензорные возмущения. Для Эйнштейн-эфир гравитации их производство и динамика уже были изучены в работе [100], где было показано, что их спектр мощности отличается от ОТО лишь за счет отклонения скорости распространения c_t от единицы,

$$\mathcal{P}_h = \frac{2}{c_t} \frac{H^2}{\pi^2 M_0^2}, \quad \text{где} \quad c_t^2 = \frac{1}{1 - \beta}, \quad (3.16)$$

и k - конформный импульс.

В анализе скалярных и векторных мод мы будем использовать предел отщепления гравитации,

$$M_0 \rightarrow \infty, \quad \alpha \rightarrow 0, \quad \alpha M_0^2, \mu^2 = \text{фиксированы}. \quad (3.17)$$

Логика в использовании такого предела состоит в том, что ожидаемые эффекты обратного воздействия метрики будут порядка $\alpha \ll 1$ и, следовательно, пренебрежимо малыми для динамики скалярных полей. Мы предполагаем что α, β, λ являются самыми малыми параметрами модели. Справедливость режима отщепления гравитации и основные результаты этого раздела были проверены непосредственным вычислением в ζ -калибровке, представленным в приложении А оригинальной работы автора [73].

Запишем поля эфира и инфлатона в калибровке однородного расширения (где метрика однородна и изотропна),

$$\Phi = \bar{\Phi}(t) + \pi(t, \mathbf{x}), \quad u_\mu = \bar{u}_\mu + v_\mu(t, \mathbf{x}), \quad (3.18)$$

и разложим действия (2.2,3.2) до квадратичного порядка по полям

$$[S_{[u]} + S_{[\Phi]}]^{(2)} = \int d^4x a^3 \left[M_0^2(c_1 + c_4) \frac{\dot{v}^2}{2a^2} - \frac{M_0^2 c_1}{2a^4} (\partial_i v_k)^2 - M_0^2(c_2 + c_3) \frac{(\partial_i v_i)^2}{2a^4} \right. \\ \left. + \frac{a^2 \dot{\pi}^2}{2} - \frac{(\partial_i \pi)^2}{2a^2} + (\mu^2 - \dot{\Phi}) \frac{\partial_i \pi v_i}{a^2} - (\mu^2 - \dot{\Phi}) \dot{\Phi} \frac{v_i^2}{2a^2} \right], \quad (3.19)$$

Выводя это действие мы сделали несколько упрощений: во - первых, мы пренебрегли разложением в ряд Тейлора функций $V(\Phi)$ и $\mu(\Phi)$. Эти поправки дали бы эффективную массу полю π , но благодаря условиям (3.10) она всё равно была бы много меньше хаббловского параметра. Помимо этого, мы пренебрегли членами типа

$$\alpha M_0^2 H^2 v_i^2 / a^2, \quad (3.20)$$

которые пренебрежимо малы если справедливо

$$H^2 \ll \frac{\mu^4}{M_0^2 \alpha}. \quad (3.21)$$

Для кинетической инфляции это условие удовлетворено автоматически. В дальнейшем мы будем предполагать, что это условие верно и при наличии нетривиального потенциала. Далее, мы раскладываем вектор эфира на продольную и поперечную компоненты,

$$v_i = v_i^{(t)} + \partial_i \chi, \quad \partial_i v_i^{(t)} = 0. \quad (3.22)$$

Уравнение движения для поперечной компоненты имеет вид

$$\ddot{v}_i^{(t)} + H \dot{v}_i^{(t)} - \frac{c_1}{c_1 + c_4} \frac{\Delta v_i^{(t)}}{a^2} + \frac{\mu^4}{M_0^2(c_1 + c_4)} v_i^{(t)} = 0. \quad (3.23)$$

Последнее слагаемое дает массу векторным возмущениям, которая, согласно (3.21), гораздо больше, чем хаббловский параметр. Это означает, что продольные векторные моды эфира не рождаются на стадии инфляции, так что для целей данной, а также и последующих глав, Эйнштейн - эфир теория эквивалента хронометрической теории.

Рассмотрим теперь скалярные возмущения. Поле хронона (продольную часть эфира) можно записать как

$$\sigma = t + \chi, \quad (3.24)$$

что даёт следующие уравнения движения

$$\ddot{\chi} + H \dot{\chi} - c_\chi^2 \frac{\Delta \chi}{a^2} + \frac{\mu^2 - \dot{\Phi}}{M_0^2 \alpha} (\dot{\Phi} \chi - \pi) = 0, \quad (3.25a)$$

$$\ddot{\pi} + 3H \dot{\pi} - \frac{\Delta \pi}{a^2} + (\mu^2 - \dot{\Phi}) \frac{\Delta \chi}{a^2} = 0, \quad (3.25b)$$

Глядя на выражение в круглых скобках в ур-и (3.25b), можно заметить появление тахионной неустойчивости [115]: в режиме медленного скатывания $\dot{\Phi}^{(1)} \gg \mu^2$, следовательно, хронон приобретает массовое слагаемое с отрицательным знаком.

На первом шаге мы изучим общее поведение подгоризонтных мод в рассматриваемой модели и опустим члены, содержащие H . Производя Фурье-разложение

$$\chi_k \propto e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad \pi_k \propto e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},$$

мы находим следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{c_{\chi}^2 + 1}{2} \left[\frac{k^2}{a^2} + k_c^2 \pm \sqrt{\left(\frac{k^2}{a^2} + k_c^2 \right)^2 - \frac{4c_{\chi}^2}{(c_{\chi}^2 + 1)^2} \frac{k^4}{a^4} - \frac{4\delta^2 k_c^2}{c_{\chi}^2 + 1} \frac{k^2}{a^2}} \right], \quad (3.26)$$

где

$$k_c^2 \equiv \frac{\mu^4}{M_0^2(c_{\chi}^2 + 1)\alpha}. \quad (3.27)$$

Для больших волновых чисел $k \gg ak_c$ данное дисперсионное соотношение сводится к линейным

$$\omega_+^2 = c_{\chi}^2 (k/a)^2, \quad \omega_-^2 = (k/a)^2. \quad (3.28)$$

Для малых значений волновых чисел $aH \ll k \ll ak_c$ имеем:

$$\omega_+^2 = (c_{\chi}^2 + 1)k_c^2 + (c_{\chi}^2 + 1 - 2\delta^2)(k/a)^2, \quad (3.29)$$

$$\omega_-^2 = \delta^2 (k/a)^2 + \frac{c_{\chi}^2}{c_{\chi}^2 + 1} \frac{(k/a)^4}{k_c^2}, \quad (3.30)$$

где δ определена в (3.9). Из ур-я (3.30) видно, что одна ветвь возмущений становится массивной с массой k_c параметрически большей, чем хаббловский темп, и поэтому она может быть «отынтегрирована» из действия (3.19). Эффективно, мы имеем дело с инфляцией на одном поле и поэтому рождаемые возмущения должны быть адиабатическими аналогично стандартному режиму медленного скатывания [115]. Отметим, что член с линейным дисперсионным соотношением подавлен параметром δ^2 и в пределе точной симметрии сдвига он пропадает вовсе, а инфлатон приобретает чисто квадратичное, нерелятивистское дисперсионное соотношение. Заметим также, что в предложенной модели нарушено обычно накладываемое на духовый конденсат условие того, что массовый параметр присутствующий в дисперсионном соотношении совпадает с масштабом конденсата. В нашем случае

$$k_c \sim \frac{\dot{\Phi}}{M_0\sqrt{\alpha}}. \quad (3.31)$$

Применимость эффективной теории требует, чтобы $\sqrt{\dot{\Phi}}$ был меньше масштаба обрезания (2.8), что приводит к иерархии

$$k_c \ll \sqrt{\dot{\Phi}} \simeq \mu^2. \quad (3.32)$$

Отметим, что эта иерархия естественным образом возникает при желании описать как фоновую динамику, так и возмущения над ней в рамках самосогласованной эффективной теории поля.

Пренебрегая кинетическим членом в (3.25a), имеем следующее решение в нулевом порядке по $(k^2/a^2 k_c^2)$:

$$\chi = \pi/\dot{\Phi}. \quad (3.33)$$

Подставляя его обратно в действие (3.19), находим следующее эффективное действие для безмассовых возмущений :

$$S_{[\pi]}^{(2)} = \int d^4x \frac{a^3}{2} \left[\dot{\pi}^2 - \delta^2 \frac{(\partial_i \pi)^2}{a^2} - \frac{c_\chi^2}{c_\chi^2 + 1} \frac{(\Delta \pi)^2}{k_c^2 a^4} \right], \quad (3.34)$$

Легко убедиться, что данное действие воспроизводит дисперсионное соотношение (3.30). Разумно разделить дальнейший анализ на две ветви. Первая ветвь описывает ситуацию, при которой возмущения имеют квадратичное дисперсионное уравнение (3.30), а вторая – линейное.

3.2.1. Квадратичное дисперсионное уравнение

Изучим случай, где инфлатон имеет квадратичное дисперсионное уравнение (3.30), что справедливо если

$$\delta^2 \ll H/k_c. \quad (3.35)$$

Варьируя действие (3.34) и переходя в Фурье пространство, имеем

$$\ddot{\pi}_{\mathbf{k}} + 3H\dot{\pi}_{\mathbf{k}} + \frac{c_\chi^2}{c_\chi^2 + 1} \frac{k^4}{k_c^2 a^4} \pi_{\mathbf{k}} = 0. \quad (3.36)$$

Квантуем моды посредством разложения

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\pi_{\mathbf{k}}(t) a_{\mathbf{k}} + \pi_{\mathbf{k}}^*(t) a_{-\mathbf{k}}^+) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad (3.37)$$

где операторы рождения – уничтожения удовлетворяют

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{q}}^+] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}).$$

Функции мод $\pi_{\mathbf{k}}(t)$ – положительно – частотные решения уравнения (3.36),

$$\pi_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} H |\tau|^{3/2} H_{3/4}^{(1)} \left(\frac{c_\chi H}{2(c_\chi^2 + 1)^{1/2} k_c} k^2 \tau^2 \right), \quad (3.38)$$

где $H_{3/4}^{(1)}$ – функция Ханкеля. Решение в терминах функции Ханкеля может быть разложено на линейную комбинацию двух функций Бесселя, $H^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x)$, одна из которых ($Y_{3/4}(x)$) доминирует в загоризонтном пределе ($k\tau \rightarrow 0$). Используя асимптотику для $Y_{3/4}(x)$, мы получаем

$$\pi_{\mathbf{k}}(k\tau \rightarrow 0) = \frac{i\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1/4)} \left(\frac{k_c}{H c_\chi} \right)^{3/4} k^{-3/2} \tau^{-1}. \quad (3.39)$$

Таким образом, спектр поля π после «заморозки» за горизонтом имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \pi_{\mathbf{k}_1} \pi_{\mathbf{k}_2} \rangle &= (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_\pi, \\ \mathcal{P}_\pi &= \frac{k^3}{2\pi^2} |\pi_{\mathbf{k}}|^2 \Big|_{k\tau \rightarrow 0} = \frac{(H k_c^3)^{1/2}}{\pi c_\chi^{3/2} \Gamma^2(1/4)}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Чтобы перевести результат в термины возмущений плотности, мы вычисляем калибровочно–инвариантную величину ζ [87], которая определяется как пространственная кривизна гиперповерхности однородной плотности инфлатона через её расстояние δt до гиперповерхности однородного расширения¹

$$\zeta = H \delta t = -\frac{H}{\dot{\Phi}} \pi. \quad (3.41)$$

Эта калибровочно–инвариантная величина сохраняется за горизонтом, в том числе, на нелинейном уровне [88]. Учитывая (3.41), мы находим следующий спектр возмущений кривизны

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \frac{1}{\pi(\Gamma(1/4))^2} \cdot \frac{1}{c_\chi^{3/2}} \cdot \frac{H^{5/2}}{\mu M_0^{3/2} \alpha^{3/4}} \Big|_{a^2 H = \frac{c_\chi M_0 \sqrt{\alpha}}{\mu^2} k^2}, \quad (3.42)$$

где явно подчеркнута, что спектр мощности должен быть вычислен в момент выхода мод за горизонт. Малые отклонения от $\mu^2, H = \text{const}$ дают спектру возмущений наклон при пересечении горизонта $a_* \sqrt{H_* k_c} = k$:

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \log \mathcal{P}_\zeta}{d \log k} = -\frac{\mu^2 \mu'}{H \mu} - \frac{5\mu^4}{4M_0^2 H^2} \delta^2. \quad (3.43)$$

Используя формулу (3.16), находим скалярно–тензорное отношение в рассматриваемой модели

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_t}{\mathcal{P}_\zeta} = \frac{2(\Gamma(1/4))^2}{\pi} \cdot \frac{c_\chi^{3/2} \mu}{M_0^{1/2} H^{1/2}} \cdot \alpha^{3/4}, \quad (3.44)$$

где мы пренебрегли отличием c_t от единицы для того, чтобы сконцентрировать внимание на других параметрах модели.

¹ Более формальная процедура решения уравнений связи представлена в приложении А работы [73].

3.2.2. Линейное дисперсионное уравнение

Рассмотрим теперь предел, в котором инфлатон имеет линейное дисперсионное уравнение, который имеет место если

$$\delta^2 \gg H/k_c. \quad (3.45)$$

Из (3.34,3.37) находим уравнение движения

$$\ddot{\pi} + 3H\dot{\pi} + \frac{k^2\delta^2}{a^2}\pi = 0, \quad (3.46)$$

чье решение с начальными вакуумными условиями Банча-Дэвиса имеет вид

$$\pi_{\mathbf{k}} = \frac{H}{\sqrt{2k\delta}}|\tau|\left(1 - \frac{i}{k\tau\delta}\right)e^{-ik\tau\delta}, \quad (3.47)$$

и дает спектр мощности ζ (см. (3.41)) в форме

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{H^4}{\mu^4\delta^3} \Big|_{aH=k\delta}. \quad (3.48)$$

Наклон спектра при пересечении горизонта ($\delta k = a_* H_*$) дан выражением

$$n_s - 1 = -\frac{4\mu^2}{H} \frac{\mu'}{\mu} - \frac{2\mu^4}{M_0^2 H^2} \delta^2 - \frac{3\dot{\delta}}{H\delta}, \quad (3.49)$$

а скалярно - тензорное отношение

$$r = \frac{8\mu^4}{M_0^2 H^2} \cdot \delta^3, \quad (3.50)$$

где мы положили $c_t = 1$ в формуле (3.16).

3.3. Биспектр

Одним из наиболее интересных предсказаний духовой инфляции является сильная негауссовость особой формы. В данном разделе мы покажем, что наша модель воспроизводит эту особенность. Перейдем к лагранжиану возмущений третьего порядка в пределе отщепления гравитации и пренебрежем членами $\sim (\mu^2)_{,\Phi}, (\mu^2)_{,\Phi\Phi}, V_{,\Phi}, V_{,\Phi\Phi}, V_{,\Phi\Phi\Phi}$. Лагранжиан третьего порядка для хронона χ в Фурье-пространстве может быть схематически записан как

$$\mathcal{L}_{[u]}^{(3)} \sim M^2 \alpha \chi^3 \times [\omega^3 k^2, \quad \omega k^4, \quad H^2 \omega k^2, \quad H \omega^2 k^2].$$

Сравним его с кубичными лагранжианом инфлатона,

$$S_{[\Phi]}^{(3)} = \int d^4x a \mu^2 \left[\frac{1}{2} \dot{\pi} (\partial_i \chi)^2 + \dot{\chi} \partial_i \chi \partial_i \pi - \dot{\Phi} \dot{\chi} (\partial_i \chi)^2 \right]. \quad (3.51)$$

Используя $\pi = \chi \dot{\Theta}$ (3.33) для случая $\omega \sim k^2/k_c$, имеем при пересечении горизонта

$$\mathcal{L}_{[u]}^{(3)} \sim \chi^3 \alpha M_0^2 k_c^2 H^3, \quad \chi^3 M_0^2 \alpha H^4 k_c \quad \text{против} \quad \mathcal{L}_{[\Phi]}^{(3)} \sim \chi^3 k_c^3 H^2 M_0^2 \alpha$$

Если $k_c \gg H$, то легко увидеть, что лидирующий вклад в кубичное взаимодействие дает член $S_{[\Phi]}^{(3)}$. В случае линейного дисперсионного уравнения $\omega = \delta k$ мы имеем

$$\mathcal{L}_{[u]}^{(3)} \sim \chi^3 \frac{H^5 M_0^2 \alpha}{\delta^4} \quad \text{против} \quad \mathcal{L}_{[\Phi]}^{(3)} \sim \chi^3 \frac{k_c^2 H^3 M_0^2 \alpha}{\delta^2}.$$

В предположении $\alpha \ll \delta^2$, вклад (3.51) снова доминирует. Таким образом, $\mathcal{L}_{[u]}^{(3)}$ не может дать серьезного вклада в Лагранжиан взаимодействия в обоих частых случаях теории. Подставляя $\chi = \pi/\dot{\Phi}$ в (3.51), получаем член взаимодействия вида:

$$S_{[\Phi], \text{эффект}}^{(3)} = - \int d^3 x dt \frac{a}{2\mu^2} [\dot{\pi}(\partial_i \pi)^2] = - \int d^3 x d\tau \frac{a}{2\mu^2} [\pi'(\partial_i \pi)^2], \quad (3.52)$$

который аналогично члену взаимодействия духовой инфляции [66]. Отметим что в (3.52) мы для удобства перешли в конформное время $d\tau = dt/a$. Оценим теперь амплитуду негауссовости сравнивая лагранжиан взаимодействия инфлатона с его кинетическим членом (3.34) при пересечении горизонта $\omega \sim H$,

$$\frac{\mathcal{L}_{[\pi]}^{(3)}}{\mathcal{L}_{[\pi]}^{(2)}} \sim \frac{\omega(k/a)^2 \pi^3 / \mu^2}{\omega^2 \pi^2} \sim \frac{(k/a)^2}{\mu^2 H} \pi. \quad (3.53)$$

где мы использовали соотношение (3.41) вместе с выражениями для спектров мощности (3.42, 3.48). Амплитуда трехточечной корреляционной функции в Фурье-пространстве (биспектра) характеризуется скалярной безразмерной величиной f_{NL} , которая может быть оценена как (более строгое определение дано ниже)

$$|f_{NL}| \sim \frac{1}{\zeta} \frac{\mathcal{L}_{[\pi]}^{(3)}}{\mathcal{L}_{[\pi]}^{(2)}} \sim \frac{(k/a)^2}{H^2} \Big|_{\text{выход за горизонт}}. \quad (3.54)$$

В зависимости от дисперсионного соотношения получаем

$$|f_{NL}| \sim \begin{cases} k_c/H & \text{если } \delta^2 \ll H/k_c \\ 1/\delta^2 & \text{если } \delta^2 \gg H/k_c \end{cases} \quad (3.55)$$

В обоих случаях негауссовость параметрически усилена, $|f_{NL}| \gg 1$. Отметим, что в случае квадратичного дисперсионного уравнения оценка для размера негауссовости меньше, чем в стандартной духовой инфляции из-за нетривиальной иерархии (3.32) между масштабами

результатирующей эффективной теории инфлатона. Пренебрегая численными коэффициентами, получаем

$$|f_{NL}| \sim \begin{cases} \zeta^{-4/5} (k_c/\mu)^{8/5} & \text{если } \delta^2 \ll \zeta^{4/5} (\mu/k_c)^{8/5} \\ 1/\delta^2 & \text{если } \delta^2 \gg \zeta^{4/5} (\mu/k_c)^{8/5}, \end{cases} \quad (3.56)$$

откуда видно, что иерархия масштабов (3.32) приводит к подавлению негауссовости в случае квадратичного дисперсионного уравнения, в то время как формальный предел $\mu \rightarrow k_c$ восстанавливает предсказания стандартной духовой инфляции.

Чтобы получить точное выражение для биспектра, мы произведем все вычисления в терминах поля π , держа в уме то, что корреляционная функция поля π может быть легко выражена в терминах поля ζ после пересечения горизонта с помощью соотношения (3.41). Согласно формализму Келдыша–Швингера, трехточечный коррелятор дается выражением [117, 118]

$$\begin{aligned} \langle \pi(\mathbf{k}_1, t_f) \pi(\mathbf{k}_2, t_f) \pi(\mathbf{k}_3, t_f) \rangle &= i \int_{-\infty}^{t_f} dt d^3x \frac{-a(t)}{2\mu^2} \\ &\times \langle [\pi(\mathbf{k}_1, t_f) \pi(\mathbf{k}_2, t_f) \pi(\mathbf{k}_3, t_f), \dot{\pi}(\mathbf{x}, t) (\partial_i \pi(\mathbf{x}, t))^2] \rangle_0, \end{aligned} \quad (3.57)$$

где выражение в правой части должно быть усреднено по невозмущенному вакууму. Нам необходимо вычислить биспектр B_ζ , определенный как

$$\langle \zeta(\mathbf{k}_1) \zeta(\mathbf{k}_2) \zeta(\mathbf{k}_3) \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) B_\zeta(k_1, k_2, k_3), \quad (3.58)$$

где дельта-функция Дирака появляется вследствие трансляционной инвариантности, в то время как из симметрии относительно вращений следует, что B_ζ зависит только от 3-х абсолютных значений импульсов. Используя (3.37) и (3.57), после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} B_\zeta(k_1, k_2, k_3) &= i \frac{H^2}{\mu^8} (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3) \lim_{\tau_f \rightarrow 0^-} \pi_{\mathbf{k}_1}(\tau_f) \pi_{\mathbf{k}_2}(\tau_f) \pi_{\mathbf{k}_3}(\tau_f) \\ &\times \text{Re} \int_{-\infty}^{\tau_f} \frac{d\tau}{\tau} \frac{d\pi_{\mathbf{k}_1}^*(\tau)}{d\tau} \pi_{\mathbf{k}_2}^*(\tau) \pi_{\mathbf{k}_3}^*(\tau) + \text{перест.}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

где мы переключились на интегрирование по конформному времени и обозначили «перест.» члены, отличающиеся от выписанного перестановками импульсов. Конечный результат зависит от дисперсионного соотношения при выходе за горизонт.

В случае **квадратичного дисперсионного соотношения** имеем

$$B_\zeta(k_1, k_2, k_3) = -\frac{H^4}{M_0^4 c_\chi^4 \alpha^2} \cdot \frac{\pi^3}{16(\Gamma(1/4))^3} \frac{k_1(k_1^2 - k_2^2 - k_3^2)}{(k_1 k_2 k_3)^3} I\left(\frac{k_2}{k_1}, \frac{k_3}{k_1}\right) + \text{перест.}, \quad (3.60)$$

где

$$I(x_2, x_3) = \text{Re} \int_{-(1+i\epsilon)\infty}^0 \frac{dy}{y} \frac{dF(y)}{dy} F(x_2 y) F(x_3 y) \quad (3.61)$$

и

$$F(y) = (-y)^{3/2} H_{3/4}^{(1)}(y^2/2). \quad (3.62)$$

Отметим, что мы повернули контур интегрирования чуть ниже действительной оси чтобы добиться сходимости выписанного выше интеграла. Форма негауссовости, полученная численным интегрированием выражения (3.61) показана на Рис. 3.1 (слева) как функция двух отношений волновых чисел, $x_{2,3} = k_{2,3}/k_1$. Нетрудно заметить, что максимальная амплитуда достигается для равносторонней конфигурации $k_1 \sim k_2 \sim k_3$.

Чтобы получить амплитуду негауссовости вычисляем биспектр на равносторонней конфигурации и вводим параметр f_{NL} аналогично соглашению коллаборации спутника «Планк» [119]²

$$B_\zeta(k, k, k) = \frac{3}{5} \cdot 6 \cdot \left(\frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_\zeta(k) \right)^2 f_{NL}. \quad (3.63)$$

Сравнение с (3.60), (3.42) приводит к

$$f_{NL} = \frac{5\pi\Gamma(1/4)}{192} I(1, 1) \frac{\mu^2}{HM_0 c_\chi \sqrt{\alpha}} \approx -0.13 \frac{\mu^2}{HM_0 c_\chi \sqrt{\alpha}}. \quad (3.64)$$

Отметим, что f_{NL} является отрицательной и её абсолютная величина согласуется с оценкой (3.55), хотя численный коэффициент даёт дополнительное подавление на порядок. Амплитуда негауссовости зависит от соотношения между кинетическим членом и потенциалом в правой части уравнения Фридмана, которое является произвольным в общем сценарии с быстрым скатыванием. Наибольший уровень негауссовости достигается в пределе кинетической инфляции, который будет подробно изучен в следующей разделе.

В случае **линейного дисперсионного соотношения** получаем,

$$B_\zeta(k_1, k_2, k_3) = \frac{H^8}{\mu^8 \delta^8} \cdot \frac{1}{16} \frac{k_1^2(k_1^2 - k_2^2 - k_3^2)}{(k_1 k_2 k_3)^3} \frac{k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_3^2 + 3k_1 k_2 + 3k_1 k_3 + 6k_2 k_3}{(k_1 + k_2 + k_3)^3} + \text{перест.} \quad (3.65)$$

Зависимость от импульса может быть представлена в форме

$$B_\zeta(k_1, k_2, k_3) \propto \frac{\sum_a k_a^6 + \sum_{a \neq b} (3k_a^5 k_b - k_a^4 k_b^2 - 3k_a^3 k_b^3) + \sum_{a \neq b \neq c} (3k_a^4 k_b k_c - 9k_a^3 k_b^2 k_c - 2k_a^2 k_b^2 k_c^2)}{(k_1 k_2 k_3)^3 (k_1 + k_2 + k_3)^3}, \quad (3.66)$$

² В чем можно убедиться посредством подстановки $\Phi_{\text{Planck}} = 3\zeta/5$, $P_{\Phi_{\text{Planck}}} = 2\pi^2 \mathcal{P}_{\Phi_{\text{Planck}}}/k^3$.

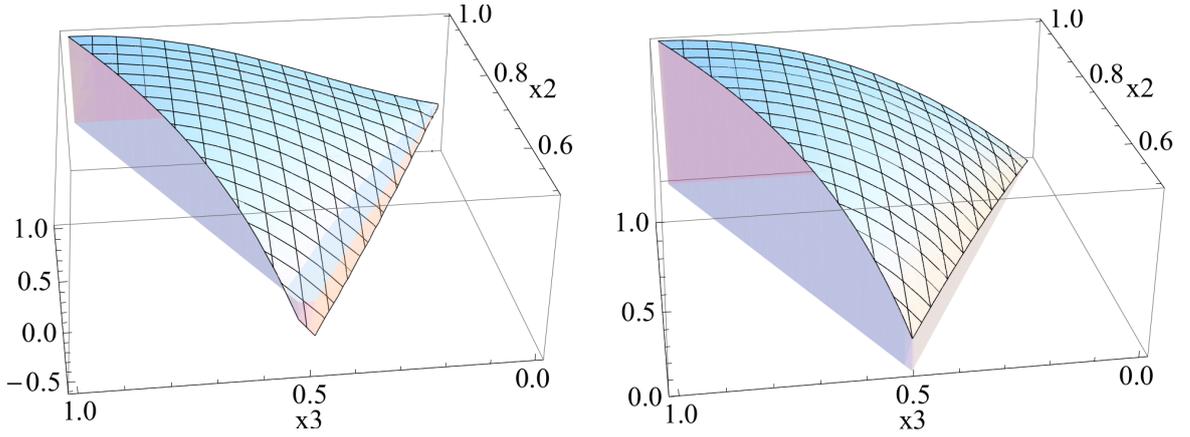


Рис. 3.1. Формы биспектров $B(1, x_2, x_3)x_2^2x_3^2$ для случаев квадратичного (левый рисунок, 3.60) и линейного (правая рисунок, 3.65) дисперсионных соотношений. Функции нормированы на единицу для равносторонней конфигурации волновых векторов $x_3 = x_2 = 1$ и построены только для неэквивалентных конфигураций импульсов $1 - x_2 \leq x_3 \leq x_2$.

которая является одним из шаблонов негауссовости, используемым для анализа данных спутника «Планк» [119], известным под именем «EFT1». Форма (3.65) построена на Рис. 3.1 (справа). Она весьма близка к предыдущей форме, но имеются и заметные отличия. Из ур-й (3.65), (3.48) получаем

$$f_{NL} = -\frac{85}{324} \cdot \frac{1}{\delta^2} \approx -\frac{0.26}{\delta^2}. \quad (3.67)$$

Видно, что f_{NL} по величине совпадает с оценкой (3.55). Отметим, что амплитуда определяется единственным параметром δ^2 .

Прежде чем закончить этот раздел, заметим, что в обоих случаях (3.65, 3.60) 3-х точечная функция в пределе вырожденной конфигурации волновых векторов $k_3 \ll k_1, k_2$ зависит от наименьшего вектора как $\propto 1/k_3$, аналогично равносторонней форме и в противоположность поведению $\propto 1/k_3^3$ локальной негауссовости в этом пределе. Слабая расходимость на вырожденной конфигурации $k_3 \rightarrow 0$ транслируется в слабую масштабную зависимость гипотетической негауссовой модификации статистического смещения масс гало [120]. Для равносторонней негауссовости смещение не зависит от наименьшего импульса в пределе $k_3 \rightarrow 0$ (в отличие от k_3^{-2} -расходимости для локальной негауссовости) что делает эффект недоступным для планируемых наблюдений³ [122–125].

³ Помимо смещения масс гало есть еще одна наблюдаемая, очень чувствительная к негауссовости в вырожденном пределе, а именно, μ -искажение микроволнового излучения [121]. Однако неясно, можно ли использовать её в ближайшем будущем для улучшения ограничений на негауссовость для форм, отличных от локальной.

3.4. Кинетическая инфляция

В отсутствие потенциала соотношение между скоростью инфлатона μ^2 и хаббловским темпом H (3.12) существенно упрощает все формулы, полученные в предыдущих разделах для общего случая. Наше главное предположение $k_c \gg H$ автоматически выполняется в рассматриваемом пределе, при этом отношение этих масштабов является наибольшим,

$$\frac{k_c}{H} = \frac{\mu^2}{\sqrt{\alpha} M_0 H} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\alpha}} \gg 1. \quad (3.68)$$

Условие (3.35) транслируется в

$$\delta^2 \ll \sqrt{\alpha}. \quad (3.69)$$

Получаем следующие выражения для основных наблюдаемых,

$$\left. \begin{array}{l} \text{квадратичная} \\ \text{дисперсия} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathcal{P}_\zeta = 2.6 \cdot 10^{-3} \frac{1}{c_\chi^{3/2}} \frac{\mu^4}{M_0^4 \alpha^{3/4}}, \quad (3.70a) \\ n_s - 1 = -6 \delta^2, \quad (3.70b) \\ r = 13 c_\chi^{3/2} \alpha^{3/4}, \quad (3.70c) \\ f_{NL} = -\frac{0.32}{c_\chi \sqrt{\alpha}}. \quad (3.70d) \end{array}$$

В противоположном случае,

$$\delta^2 \gg \sqrt{\alpha}, \quad (3.71)$$

соответствующему линейному дисперсионному уравнению, имеем

$$\left. \begin{array}{l} \text{линейная} \\ \text{дисперсия} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathcal{P}_\zeta = 0.7 \cdot 10^{-3} \frac{\mu^4}{M_0^4} \frac{1}{\delta^3}, \quad (3.72a) \\ n_s - 1 = -6 \delta^2 - \frac{3\dot{\delta}}{H\delta}, \quad (3.72b) \\ r = 48 \delta^3, \quad (3.72c) \\ f_{NL} = -\frac{0.26}{\delta^2}. \quad (3.72d) \end{array}$$

Эти выражения следует сравнить со значениями лучшего фита космологических параметров приведенного в статьях коллаборации «Планк» за 2015 год [38, 126, 127],

$$\ln(10^{10} \mathcal{P}_\zeta) \Big|_{k=0.05 \text{ Мпс}^{-1}} = 3.094 \pm 0.034 \quad (68\% \text{ CL}), \quad (3.73a)$$

$$n_s = 0.9645 \pm 0.0049 \quad (68\% \text{ CL}), \quad (3.73b)$$

$$r < 0.11 \quad (95\% \text{ CL}) \quad (3.73c)$$

и ограничениями на две интересующие нас формы негауссовости: «духовая инфляция» (ghost inflation) и «EFT1» в обозначениях [119],

$$f_{NL}^{\text{ghost}} = -27 \pm 50 \quad (68\% \text{ CL}) , \quad (3.74a)$$

$$f_{NL}^{\text{EFT1}} = 12 \pm 39 \quad (68\% \text{ CL}) . \quad (3.74b)$$

Проанализируем сначала случай **квадратичного дисперсионного соотношения**. Из (3.70b), (3.73b) находим,

$$\delta^2 \approx 6.6 \cdot 10^{-3} . \quad (3.75)$$

Затем, уравнение (3.69) дает нам следующее условие применимости рассматриваемого режима,

$$\alpha \gg 4.4 \cdot 10^{-5} . \quad (3.76)$$

С другой стороны, ограничение сверху на α следует из ограничения на скалярно-тензорное отношение (3.73c),

$$\alpha < 1.7 \cdot 10^{-3} c_\chi^{-2} . \quad (3.77)$$

Предполагая $c_\chi \sim 1$ заключаем, что модель с квадратичным дисперсионным соотношением разрешена в достаточно узком диапазоне значений параметра $\alpha \sim 10^{-4}$. Для амплитуды негауссовости получаем

$$f_{NL} = -\frac{32}{c_\chi} \left(\frac{10^{-4}}{\alpha} \right)^{1/2} , \quad (3.78)$$

что находится в пределах разрешенной области (3.74a). Из (3.70a), (3.73a) получаем масштаб инфляции

$$\mu \approx 5.4 \cdot 10^{-3} c_\chi^{3/8} \left(\frac{\alpha}{10^{-4}} \right)^{3/16} M_0 , \quad (3.79)$$

который является достаточно высоким, в отличие от первоначальной модели духового конденсата [66], что объясняет тенденцию к значительному скалярно - тензорному соотношению.

В случае

$$\alpha \ll 4.4 \cdot 10^{-5} \quad (3.80)$$

мы находимся в режиме **линейного дисперсионного соотношения**. В данном случае наклон спектра имеет дополнительную поправку, связанную с зависимостью δ от времени, что делает невозможным её точное определение. Несмотря на это, без какой-либо точной подстройки (3.72b) указывает на значения

$$\delta^2 \lesssim 6.6 \cdot 10^{-3} . \quad (3.81)$$

В этом случае значение скалярно—тензорного отношения

$$r = 0.026 \left(\frac{\delta^2}{6.6 \cdot 10^{-3}} \right)^{3/2} \quad (3.82)$$

находится вне чувствительности «Планка», но может быть доступно для спутников следующего поколения [128]. Предсказанный уровень негауссовости

$$f_{NL} = -39 \left(\frac{6.6 \cdot 10^{-3}}{\delta^2} \right), \quad (3.83)$$

находится на границе разрешенной области (3.74b).⁴ Для масштаба инфляции находим

$$\mu \approx 6.4 \cdot 10^{-3} \left(\frac{\delta^2}{6.6 \cdot 10^{-3}} \right)^{3/8} M_0. \quad (3.84)$$

Прежде чем завершить этот раздел, мы должны проверить, что масштаб инфляции приходится на энергии ниже масштаба обрезания рассматриваемой эффективной теории (2.8), так что наша модель находится в пределах применимости описания в рамках эффективной теории поля (ЭТП). Подставляя численные значения в (3.79) находим, что для квадратичного дисперсионного уравнения это требование удовлетворено. Что касается линейного дисперсионного уравнения, то для применимости ЭТП необходимо

$$4 \cdot 10^{-5} \left(\frac{\delta^2}{6.6 \cdot 10^{-3}} \right)^{3/4} \lesssim \alpha, \quad (3.85)$$

что противоречит (3.80). Мы обязаны признать, что предел кинетической инфляции с чисто линейным дисперсионным соотношением несопоставим с эффективно-полевым описанием. При $\alpha \sim 5 \cdot 10^{-5}$ оба члена в дисперсионном уравнении (3.30) одинаково важны, так что все уравнения начиная с (3.34) должны быть решены численно для определения функций мод. Можно ожидать, что предсказания для космологических наблюдаемых будут интерполировать между формулами (3.70) и (3.72). Форма биспектра будет представлять собой смесь из форм изображенных на Рис. 3.1.

Стоит отметить, что проблема масштаба инфляции близкого к масштабу обрезания появляется только в пределе кинетической инфляции, и может быть легко устранена путем добавления ненулевого потенциала.

3.5. Заключение к главе

В данной главе была представлена модель, осуществляющая ультрафиолетовое пополнение модели духовой инфляции до масштабов энергий близких к массе Планка. Это было

⁴ Стоит заметить, что в (3.74b) приведены ограничения полученные при использовании маски SMICA, ограничения для других масок несколько отличаются.

достигнуто путем введения взаимодействия между инфлатоном и Лоренц – нарушающим векторным полем, описываемым в рамках Эйнштейн – эфир или хронометрической теорий гравитации. Масштаб обрезания предложенной модели совпадает с масштабом обрезания Эйнштейн – эфир теории и не связан с энергией духового конденсата – динамически приобретаемого вакуумного среднего скорости инфлатона. В хронометрической версии предложенной конструкции ультрафиолетовое пополнение может быть осуществлено и до бесконечно больших энергий в рамках гравитации Хоржавы—Лифшица.

Была изучена инфляционная динамика Вселенной и рождение первичных возмущений в предложенной модели. Последние описываются в рамках эффективной теории содержащей всего одну степень свободы и действием, совпадающим с эффективным действием духовой инфляции. Новизна предложенного подхода по сравнению с предыдущими работами по духовой инфляции состоит в том, что он позволяет не только изучать малые возмущения, но и описывать фоновую динамику. Было показано, что духовый конденсат дает положительный вклад в плотность энергии Вселенной, что делает инфляцию возможной даже при отсутствии какого – либо потенциала инфлатона вовсе. Этот режим был назван «кинетической инфляцией». В принципе, нетрудно описать окончание инфляции и постинфляционный разогрев в предложенной модели, который должен происходить за счет исчезновения потенциальной энергии инфлатона и духового конденсата. В рамках первоначальной модели духовой инфляции это было бы невозможно из-за неприменимости эффективно – полевого описания для данного процесса (масштаб обрезания уходил бы в ноль).

Были изучены свойства спектра мощности и биспектра первичных возмущений. В частности, показано, что в пределе кинетической инфляции модель предсказывает достаточно большое скалярно – тензорное отношение $r \simeq 0.02 \div 0.1$, что позволило поставить ограничения на параметры модели из наблюдательных данных спутника «Планк». Негауссовость возмущений имеет форму, близкую к равносторонней и имеет амплитуду $f_{NL} \sim -5 \div -40$. Можно ожидать, что негауссовость такой формы и амплитуды будет проверена экспериментально в ближайшем будущем [128–130].

Глава 4

Тёмная материя с нарушенной лоренцевой симметрией

В этой главе будут изучены феноменологические следствия нарушения лоренцевой симметрии в секторе тёмной материи. Будет показано, что неминимальное взаимодействие поля эфира с частицами тёмной материи должно приводить к нарушению принципа эквивалентности в пределах достаточно малых сгустков тёмной материи. В то же время, для достаточно больших гало будет выявлен «хамелеонный» механизм, выравнивающий гравитационную и инертную массы частиц темной материи. Как следствие этого, динамика гравитационного сгущивания приобретет нетривиальные свойства. Качественно изучены два наиболее важных эффекта: зависящее от масштаба усиление гравитационной неустойчивости и появление смещения между плотностями барионов и темной материи.

4.1. Лоренц-нарушение в тёмной материи: точечные частицы

В данном разделе мы рассмотрим эффекты взаимодействия тёмной материи с полем эфира на примере точечных частиц. Это исследование позволит нам лучше понять физику в ньютоновском пределе и рост джинсовской неустойчивости, которые качественно иллюстрируют основные особенности эволюции космологических возмущений. В присутствии эфира релятивистское действие для массивной точечной частицы может быть записано в виде

$$S_{pp} \equiv -m \int ds F(u_\mu v^\mu), \quad (4.1)$$

где

$$ds \equiv \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \quad (4.2)$$

есть длина траектории частицы, а её 4-скорость определена как

$$v^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds}. \quad (4.3)$$

F - произвольная положительная функция, нормированная на единицу, $F(1) = 1$; предел ОТО соответствует $F \equiv 1$. Как видно, частицы тёмной материи с данным действием не только нарушают принцип эквивалентности, но и не следуют геодезическим ни для какой метрики.

4.1.1. Ньютонов предел

В этой главе основное внимание будет уделено скалярным возмущениям, поэтому при рассмотрении эфира достаточно будет работать в рамках хронометрической гравитации. Мы будем предполагать, что темная материя является нерелятивистской в течение всех этапов космологической эволюции, доступных для наблюдений. Мы также будем считать, что фоновое направление эфира совпадает с системой отсчета, где реликтовое излучение приблизительно изотропно. Разложим действие (4.1) до второго порядка по 3-скорости частицы V^i , пространственной компоненты эфира u^i и до линейного порядка по гравитационному потенциалу ϕ .¹ Последний появляется в стандартном ньютоновском пределе для метрики

$$g_{00} = 1 + 2\phi, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = -\delta_{ij}(1 - 2\psi), \quad (4.4)$$

где мы пока пренебрегли космологическим расширением. Получаем:

$$S_{pp} = m \int dt \left[\frac{(V^i)^2}{2} - \phi - Y \frac{(u^i - V^i)^2}{2} \right], \quad (4.5)$$

где введено обозначение

$$Y \equiv F'(1) \quad (4.6)$$

и опущена постоянный вклад связанный с массой покоя. Рассмотрим сначала случай, где возмущения эфира пренебрежимо малы, $u^i = 0$. В этом пределе последний член в (4.5) перенормирует инертную массу частицы

$$m \mapsto m(1 - Y).$$

С другой стороны, гравитационная масса (источник для ϕ в (4.5)) остаётся равной m , очевидно, нарушая принцип эквивалентности. Для положительности кинетической энергии мы накладываем условия $m > 0$ и $Y < 1$.

Теперь перейдем к рассмотрению плотной среды, составленной из частиц темной материи. Введем плотность массы

$$\rho(\mathbf{x}, t) = m \sum_A \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A(t)), \quad (4.7)$$

где $\mathbf{x}_A(t)$ -траектория частицы номер A , и запишем действие (4.5) в форме

$$S_{pp} = \int d^4x \rho \left[\frac{(V^i)^2}{2} - \phi - Y \frac{(u^i - V^i)^2}{2} \right]. \quad (4.8)$$

¹ Мы считаем, что u^i одного порядка с V^i , что будет подтверждено вычислениями, приведенными ниже.

Отсюда видно, что внутри плотной среды возмущения эфира приобретают квадратичный потенциал с центральным значением, определяемым скоростью среды. Условием стабильности потенциала является $Y > 0$.

Легко догадаться, что благодаря этому потенциалу эфир стремится совпасть со скоростью среды. Как только «центрирование» произошло, последний член в (4.8) исчезает, восстанавливая обычное действие для гравитационно взаимодействующей жидкости. Другими словами, нарушение принципа эквивалентности будет экранировано внутри плотной среды, реализуя аналог «хамелеонного механизма» [131]. Наша догадка может быть легко подтверждена на качественном уровне. Добавим к (4.8) действие хронометрической гравитации в нерелятивистском пределе (2.2). Для простоты, в рамках этого раздела положим $\beta = \alpha$, $\lambda = 0$ и опишем результат в главном порядке по $\alpha \ll 1$. Имеем,

$$S_{[\text{отг}]} + S_{[u]} = \frac{M_0^2}{2} \int d^4x [4\phi\Delta\psi - 2\psi\Delta\psi + \alpha u^i \Delta u^i] . \quad (4.9)$$

Сделаем также предположение $\alpha \lesssim Y$. Это наиболее интересный режим с феноменологической точки зрения, так как мы не ожидаем получить в секторе темной материи ограничения сильнее, чем те, что уже имеются в гравитации.

Уравнения движения, получаемые из действий (4.8) и (4.9) гласят:²

$$(1 - Y) \dot{V}^i + \partial_i \phi + Y(\partial_t u^i + V^j \partial_j u^i - V^j \partial_i u^j + u^j \partial_i u^j) = 0 , \quad (4.10a)$$

$$\psi = \phi , \quad (4.10b)$$

$$2M_0^2 \Delta \phi = \rho , \quad (4.10c)$$

$$M_0^2 \alpha \Delta u^i = Y \rho (u^i - V^i) . \quad (4.10d)$$

Данная система замыкается добавлением уравнения непрерывности

$$\partial_t \rho + \partial_i (\rho V^i) = 0 . \quad (4.10e)$$

Рассмотрим сферическое гало темной материи радиуса R_h , постоянной плотности ρ_h , движущееся как одно целое со скоростью \mathbf{V}_h относительно выделенной космологической системы отсчета. Согласно (4.10d), возмущения эфира внутри гало приобретают эффективную массу

$$m_{\text{эф}}^2 = \frac{Y \rho}{M_0^2 \alpha} . \quad (4.11)$$

Предположим сначала, что гало небольшое,

$$R_h \ll m_{\text{эф}}^{-1} , \quad (4.12)$$

² В этой и только в этом подразделе точка обозначает полную (субстанциональную) производную по времени t .

так что масштаб взаимодействия эфира превосходит размер гало. Условие (4.12) эквивалентно

$$\phi_{h,s} \ll \alpha/Y, \quad (4.13)$$

где $\phi_{h,s} \sim \rho_h R_h^2 / M_0^2$ -гравитационный потенциал на поверхности гало. Тогда пренебрегаем членом u^i в правой части уравнения (4.10d) и получаем для поля эфира, создаваемого гало

$$u^i = -\frac{2YV_h^i}{\alpha} \phi_h(\mathbf{x}, t), \quad (4.14)$$

где мы выразили результат в терминах гравитационного потенциала гало

$$\phi_h(\mathbf{x}, t) = -\frac{\rho_h R_h^3}{6M_0^2 |\mathbf{x} - \mathbf{V}_h t|}. \quad (4.15)$$

Теперь изучим движение частицы темной материи в поле гало. Подставляя (4.14) в (4.10a), получаем для ускорения частицы

$$\dot{V}_{tp}^i = -\frac{\partial_i \phi_h}{1-Y} + \frac{2Y^2}{(1-Y)\alpha} \left[-V_{tp}^j V_h^j \partial_i \phi_h + V_h^i V_{tp}^j \partial_j \phi_h - V_h^i V_h^j \partial_j \phi_h \right]. \quad (4.16)$$

Очевидны два изменения по сравнению с ньютоновской физикой. Во-первых, гравитационное ускорение возле гало усилено фактором $1/(1-Y)$ из-за уменьшения инертной массы точечной частицы. Во-вторых, появляется новая сила, зависящая от скоростей (см. комбинацию в квадратных скобках). Данное дополнительное взаимодействие сравнимо с модификацией гравитационной силы только для достаточно быстрых частиц

$$|\mathbf{V}_{h,tp}| \gtrsim \sqrt{\frac{\alpha}{Y}}. \quad (4.17)$$

Мы увидим (см. (4.32)), что скорости линеаризованных космологических возмущений никогда не удовлетворяют условию (4.17), а значит силы, зависящие от скоростей не оставляют существенного отпечатка на эволюции крупномасштабной структуры Вселенной.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда размер гало больше, чем обратная эффективная масса эфира в среде,

$$R_h \gg m_{\text{eff}}^{-1}. \quad (4.18)$$

Это условие эквивалентно

$$\phi_{h,s} \gg \alpha/Y. \quad (4.19)$$

Благодаря экранировке, эфир оказывается «замороженным» в минимуме своего потенциала, $u^i = V_h^i$. Поле эфира вне гало равно

$$u^i = \frac{R_h V_h^i}{|\mathbf{x} - \mathbf{V}_h t|}. \quad (4.20)$$

Очевидно, это значение меньше, чем (4.14), при условии, что (4.19) выполняется. Поэтому зависящее от скорости дополнительное взаимодействие между пробной частицей и гало подавлено в этом случае. Отметим здесь сходство с хамелеонным механизмом [131], который экранирует «пятую силу» в некоторых скалярно-тензорных теориях гравитации.

В заключение, рассмотрим вместо пробной частицы другое большое гало, такое, что его гравитационный потенциал удовлетворяет (4.19). Обозначим его скорость \mathbf{V}_{h1} . Независимо от конфигурации эфира вне гало, внутри него эфир совпадет по величине и направлению с V_{h1}^i . Подставляя это значение в (4.10a), мы находим стандартное уравнение

$$\dot{V}_{h1}^i = -\partial_i \phi_h . \quad (4.21)$$

Закключаем, что для больших гало отличия от ОТО полностью экранированы.

4.1.2. Джинсовская неустойчивость

В данном подразделе мы проанализируем, как вышеописанная динамика Лоренц-нарушающей темной материи (в дальнейшем ЛНТМ) влияет на формирование джинсовской неустойчивости. Мы рассмотрим Вселенную, заполненную исключительно темной материей. Рассмотрим сферически-симметричный анзац для фоновых значений всех интересующих нас величин, которые будут обозначаться чертой. Решение уравнения (4.10) имеет вид

$$\bar{V}^i = \bar{u}^i = H(t) x^i , \quad \bar{\phi} = \frac{\bar{\rho}(t)}{12M_0^2} |\mathbf{x}|^2 , \quad (4.22)$$

где хаббловский параметр H и плотность $\bar{\rho}$ связаны соотношением

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{\bar{\rho}}{6M_0^2} , \quad (4.23a)$$

$$\dot{\bar{\rho}} + 3H\bar{\rho} = 0 . \quad (4.23b)$$

Написанные уравнения суть стандартные уравнения ОТО. В частности, вводя масштабный фактор

$$a(t) = \exp \left[\int^t H(t') dt' \right] \quad (4.24)$$

и интегрируя ур-е (4.23) мы получаем уравнение Фридмана

$$H^2 = \frac{\bar{\rho}}{3M_0^2} + \frac{\mathfrak{K}}{a^2} , \quad (4.25)$$

где $\bar{\rho} \propto a^{-3}$. Видно, что на уровне однородной изотропной космологии модель воспроизводит ОТО³. Положим в дальнейшем пространственную кривизну нулем $\mathfrak{K} = 0$.

На следующем шаге записываем уравнения для линейных возмущений

$$(1 - Y)(\partial_t V^i + Hx^j \partial_j V^i + HV^i) + \partial_i \phi + Y(\partial_t u^i + Hx^j \partial_j u^i + Hu^i) = 0, \quad (4.26a)$$

$$2M_0^2 \Delta \phi = \bar{\rho} \delta, \quad (4.26b)$$

$$M_0^2 \alpha \Delta u^i = Y \bar{\rho} (-V^i + u^i), \quad (4.26c)$$

$$\partial_t \delta + Hx^i \partial_i \delta + \partial_i V^i = 0, \quad (4.26d)$$

где для простоты мы обозначили возмущенные величины теми же буквами, что и полные значения и ввели контраст плотности $\delta = \delta\rho/\bar{\rho}$. Переходя в Фурье-представление

$$\delta \mapsto e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}/a(t)} \delta, \text{ и.т.д.}, \quad (4.27)$$

выбирая скалярную часть возмущений

$$V^i = ik_i v, \quad u^i = ik_i u, \quad (4.28)$$

и решая уравнения (4.26b), (4.26d) для ϕ и v мы получаем два уравнения

$$(1 - Y)(\partial_t^2 \delta + 2H\partial_t \delta) - \frac{3H^2}{2} \delta + Y \frac{k^2}{a} (\partial_t u + Hu) = 0, \quad (4.29a)$$

$$\left[\alpha M_0^2 \frac{k^2}{a^2} + Y \bar{\rho} \right] u = \frac{Y \bar{\rho} a}{k^2} \partial_t \delta. \quad (4.29b)$$

Заметим, что мы использовали уравнение Фридмана (4.25) чтобы выразить коэффициенты у второго члена в (4.29a) через параметр Хаббла.

Структура уравнения (4.29b) позволяет выделить два режима. Для коротковолновых мод

$$\frac{k^2}{a^2} \gg \frac{Y \bar{\rho}}{M_0^2 c_1}, \quad (4.30)$$

возмущение эфира равно

$$u = \frac{Y \bar{\rho} a^3}{M_0^2 \alpha k^4} \partial_t \delta. \quad (4.31)$$

Отметим, что неравенство (4.30) есть просто условие отсутствия экранировки (4.12) после замены размера гало на физическую длину волны a/k возмущения. После подстановки в (4.29a), эфир дает лишь пренебрежимо малую поправку, которая может быть воспринята

³ Как мы вскоре увидим в 4.2, на самом деле присутствует различие в перенормировке гравитационной постоянной постоянной, входящей в уравнение Фридмана, (см.(4.59)), которое имеет порядок α , превосходящий точность, используемую в данном разделе.

как взаимодействие, зависящее от скорости. Действительно, можно оценить скорость возмущения как (см (4.26d)),

$$|\mathbf{V}| \sim H\delta \frac{a}{k} \ll H\delta \sqrt{\frac{M_0^2 c_1}{Y\bar{\rho}}} \sim \delta \sqrt{\frac{\alpha}{Y}} \ll \sqrt{\frac{\alpha}{Y}}, \quad (4.32)$$

что ниже предела (4.17). Таким образом, для контраста плотности мы имеем

$$\partial_t^2 \delta + 2H\partial_t \delta - \frac{3H^2}{2(1-Y)} \delta = 0. \quad (4.33)$$

Растущее со временем решение имеет вид

$$\delta \propto t^\gamma, \quad \gamma = \frac{1}{6} \left[-1 + \sqrt{\frac{25-Y}{1-Y}} \right]. \quad (4.34)$$

Очевидно, что в случае $Y > 0$ моды растут быстрее, чем в ОТО, где $\gamma = 2/3$.

В режиме длинноволновых мод,

$$\frac{k^2}{a^2} \ll \frac{Y\bar{\rho}}{M_0^2 \alpha}, \quad (4.35)$$

эфир приобретает значение

$$u = \frac{a}{k^2} \partial_t \delta. \quad (4.36)$$

Соответствующий вклад в (4.29a) комбинируется с первым членом и восстанавливает стандартное уравнение для возмущений плотности в ОТО, как и ожидается в режиме экранировки

$$\partial_t^2 \delta + 2H\partial_t \delta - \frac{3H^2}{2} \delta = 0, \quad (4.37)$$

решение которого есть $\delta \propto t^{2/3}$.

Из вышеописанного возникает следующая картина. Для моды k эффекты нарушения лоренцевой симметрии экранированы до тех пор, пока выполнено неравенство (4.35) и мода ведет себя в точности как в ОТО. В процессе расширения Вселенной данное неравенство нарушается⁴ и мода выходит из режима экранировки, при этом её рост усиливается согласно (4.34). Физически, данное усиление происходит из-за возрастания гравитационного ускорения частиц темной материи в этом режиме, см. (4.16), которое, в свою очередь, происходит из-за уменьшения инертной массы. Мы увидим в разделе 4.3, что данная картина совпадает с полученной в рамках строгого анализа в соответствующем пределе (подгоризонтные моды, материально-доминированная стадия).

⁴ Напомним, что $\bar{\rho}$ убывает как a^{-3} т.е. правая часть уравнения (4.35) убывает быстрее, чем левая часть.

4.2. Лоренц-нарушение в тёмной материи: релятивистская жидкость

Чтобы изучить явления за рамками ньютоновского приближения мы будем использовать формализм, предложенный в работах [132, 133] и позволяющий описывать идеальные жидкости с произвольным уравнением состояния в рамках эффективного действия.

4.2.1. Эффективное действие для Лоренц-нарушающих жидкостей

В рамках лагранжева формализма, элементы идеальной жидкости описываются тремя скалярными полями $\varphi^I(x)$, $I = 1, 2, 3$. Поля φ^I можно интерпретировать как пространственные координаты в сопутствующей среде системе отсчета и принять $\phi(\mathbf{x}, t)^I = x^I$ в основном состоянии. Важным свойством идеальной жидкости является инвариантность её динамики относительно замен переменных, сохраняющих объем,

$$\varphi^I \mapsto \tilde{\varphi}^I(\varphi^J), \quad \det \frac{\partial \tilde{\varphi}^I}{\partial \varphi^J} = 1. \quad (4.38)$$

Скалярный объект с минимальным числом производных и симметрией (4.38), который может быть сконструирован из φ^I и метрики $g_{\mu\nu}$ —это

$$B \equiv -\det B^{IJ}, \quad (4.39)$$

где

$$B^{IJ} = g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi^I \partial_\nu \varphi^J. \quad (4.40)$$

Лагранжиан для идеальной жидкости тогда может быть представлен как произвольная функция этого скаляра,

$$S_{fluid} = - \int d^4x \sqrt{-g} f(B). \quad (4.41)$$

Чтобы получить связь со стандартными гидродинамическими характеристиками, рассмотрим вектор⁵

$$v^\mu \equiv - \frac{\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}}{6\sqrt{-gB}} \partial_\nu \varphi^I \partial_\sigma \varphi^J \partial_\rho \varphi^K \epsilon_{IJK}. \quad (4.42)$$

Этот вектор имеет единичную норму, времени-подобен и скалярные поля φ^I постоянны вдоль его направления

$$v^\mu \partial_\mu \varphi^I = 0, \quad I = 1, 2, 3. \quad (4.43)$$

⁵ Антисимметричный псевдотензор определен как $\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = -1$, $\epsilon_{123} = 1$.

Поэтому данный вектор можно отождествить со скоростью жидкости. В то же время из уравнения движения

$$\nabla_\mu(\sqrt{B}v^\mu) = 0, \quad (4.44)$$

закключаем, что величина \sqrt{B} может быть интерпретирована как сохраняющаяся концентрация n элементов жидкости. Тензор энергии-импульса (ТЭИ), следующий из действия (4.41) может быть записан в стандартной гидродинамической форме

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)v_\mu v_\nu - pg_{\mu\nu},$$

где плотность энергии и давление равны

$$\rho = f, \quad p = 2f'B - f. \quad (4.45)$$

ТЭИ сохраняется благодаря уравнениям движения для поля φ^I ,

$$\nabla_\mu(f'(B)BB_{IJ}\nabla^\mu\varphi^J) = 0. \quad (4.46)$$

Для холодной темной материи $p = 0$ в следствие чего f принимает вид

$$f_{dm} = m\sqrt{B} = mn, \quad (4.47)$$

где m есть масса частиц среды.

Легко сообразить, как обобщить действие (4.41) на случай эффектов нарушения лоренцевой симметрии. В присутствии эфира данное действие может зависеть от скалярного произведения $u_\mu v^\mu$,

$$\tilde{S}_{fluid} = - \int d^4x \sqrt{-g} \tilde{f}(B, u_\mu v^\mu). \quad (4.48)$$

В данной работе мы придерживаемся феноменологического подхода и рассматриваем произвольную функцию \tilde{f} , удовлетворяющую предположению о том, что лагранжиан пропорционален концентрации частиц,

$$\tilde{f}_{dm}(B, u_\mu v^\mu) = m\sqrt{B} F(u_\mu v^\mu), \quad (4.49)$$

где функция F подчиняется условию нормировки $F(1) = 1$. Данное условие справедливо, например, для темной материи, состоящей из разделенных в пространстве слабо-взаимодействующих частиц.

4.2.2. Уравнения движения

Уравнения движения для тёмной материи получаются варьированием (4.48) по φ^I . После свертки с $\partial_\sigma \varphi^I$ получаем

$$-\nabla_\mu \left[\rho_{[dm]} \left((F - (u_\lambda v^\lambda) F') v^\mu v_\sigma + F' v^\mu u_\sigma \right) \right] + \rho_{[dm]} F' v^\mu \nabla_\sigma u_\mu = 0, \quad (4.50)$$

где мы ввели

$$\rho_{[dm]} \equiv m \sqrt{B}. \quad (4.51)$$

Варьируя действие (2.2) по σ , получаем уравнение движения хронона в форме

$$\nabla_\rho \left[\frac{\mathcal{P}^{\rho\mu}}{\sqrt{\nabla^\lambda \sigma \nabla_\lambda \sigma}} \left(\nabla_\nu K^\nu_\mu - \alpha a_\nu \nabla_\mu u^\nu - \frac{\rho_{[dm]}}{M_0^2} F' v_\mu \right) \right] = 0, \quad (4.52)$$

где мы использовали обозначения

$$K^\mu{}_\sigma \equiv K^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho} \nabla_\nu u^\rho, \quad a_\mu \equiv u^\lambda \nabla_\lambda u_\mu, \quad (4.53)$$

а $\mathcal{P}^\nu_\mu \equiv \delta^\nu_\mu - u_\mu u^\nu$ — проектор на направление, ортогональное к u_μ . Полный ТЭИ системы хронон–тёмная матери равен⁶,

$$\begin{aligned} T_{[\sigma]\mu\nu} + T_{[dm]\mu\nu} = M_0^2 \left[2\nabla_\sigma K^\sigma_{(\mu} u_{\nu)} - \nabla_\lambda (K_{(\mu\nu)} u^\lambda) - \nabla_\sigma (K^\sigma_{(\mu} u_{\nu)}) + \nabla_\sigma (K_{(\mu}{}^\sigma u_{\nu)}) \right. \\ \left. + \alpha [a_\lambda a^\lambda u_\mu u_\nu - 2a^\lambda \nabla_{(\mu} u_\lambda u_{\nu)} + a_\mu a_\nu] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} K^\sigma{}_\lambda \nabla_\sigma u^\lambda - u_\mu u_\nu u^\lambda \nabla_\sigma K^\sigma{}_\lambda \right] \\ + \rho_{[dm]} \left((F - (u_\lambda v^\lambda) F') v_\mu v_\nu + (u_\lambda v^\lambda) F' u_\mu u_\nu \right), \end{aligned} \quad (4.54)$$

Первые три строчки в (4.54) соответствуют вкладу только от ТЭИ хронона, тем временем как последняя строчка представляет собой вклад ТМ и членов взаимодействия между хрононом и ТМ.

Помимо тёмной материи в данной секции мы включим в рассмотрение барионы⁷, излучение и обычную космологическую постоянную. Их ТЭИ равны

$$T_{[b]\mu\nu} = \rho_{[b]} v_{[b]\mu} v_{[b]\nu}, \quad T_{[\gamma]\mu\nu} = \rho_{[\gamma]} \left(\frac{4}{3} v_{[\gamma]\mu} v_{[\gamma]\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{3} \right), \quad T_{[\Lambda]\mu\nu} = \rho_{[\Lambda]} g_{\mu\nu}, \quad (4.55)$$

где $\rho_{[s]}$, $v_{[s]\mu}$ суть плотность и 4-скорость соответствующих компонент. Уравнения движения для этих компонент следуют из закона ковариантного сохранения ТЭИ и имеют стандартный вид. В рамках этого раздела мы не рассматриваем эффекты, связанные с нейтрино и

⁶ Индексы в круглых скобках симметризованы, $K_{(\mu\nu)} \equiv \frac{1}{2}(K_{\mu\nu} + K_{\nu\mu})$.

⁷ В космологической литературе «барионами» обозначают всю обычную материю, включающую, в частности, электроны.

обменом энергией между барионами и излучением. Более аккуратный численный анализ с учетом нейтрино и неидеальности барион–фотонной среды будет произведен численно в разделе 5.1.

4.2.3. Однородная космология

Подставим в выведенные в предыдущем подразделе уравнения однородный и изотропный анзац

$$ds^2 = a^2(\tau)(d\tau^2 - d\mathbf{x}^2), \quad u_0 = v_{[s]0} = a(\tau), \quad u_i = v_{[s]i} = 0, \quad \rho_{[s]} = \rho_{[s]}(\tau). \quad (4.56)$$

Легко проверить, что этот анзац тождественно удовлетворяет ур-ю (4.52) для хронона⁸. Подставляя (4.56) в (4.50), имеем

$$\rho_{[dm]} \propto a^{-3}, \quad (4.57)$$

т.е. плотность ТМ ведет себя так же, как в стандартной космологии. Используя (4.54), мы получаем уравнение Фридмана

$$\frac{a'^2}{a^4} = \frac{8\pi G_{cosm}}{3} (\rho_{[dm]} + \rho_{[b]} + \rho_{[\gamma]} + \rho_{[\Lambda]}). \quad (4.58)$$

Уравнение совпадает с тем, что мы имеем в ОТО, но с гравитационной постоянной, перенормированной из-за вклада хронона в ТЭИ в правой части уравнений Эйнштейна (см. [102]),

$$G_{cosm} = \frac{1}{8\pi M_0^2} \left[1 + \frac{\beta + 3\lambda}{2} \right]^{-1}. \quad (4.59)$$

Отметим, что G_{cosm} отличается от Ньютоновой гравитационной постоянной (2.12), измеряемой в локальных экспериментах. Эта разница была ограничена из данных SPT, WiggleZ и WMAP 7 в [108],

$$|G_{cosm}/G_N - 1| \lesssim 0.018. \quad (4.60)$$

В разделе 5.2 следующей главы это ограничение будет улучшено.

4.2.4. Линеаризованные уравнения на фоне метрики Фридмана

Рассмотрим теперь линейные возмущения над рассмотренным в предыдущей подсекции однородным решением. Начнем с возмущений метрики в конформной ньютоновской

⁸ Хронон может быть выбран равным любой непрерывной функции времени, например $\sigma = \tau$. Отметим, что в секции 3 мы использовали фоновое значение $\sigma = t$. При таком выборе фона возмущения хронона в текущей и в предыдущей секции связаны между собой соотношением $a\chi = \pi$.

калибровке

$$ds^2 = a(\tau)^2 [(1 + 2\phi)d\tau^2 - \delta_{ij}(1 - 2\psi)dx^i dx^j]. \quad (4.61)$$

Запишем возмущения хронона, скоростей и плотностей различных компонент

$$u_i = a \partial_i \chi, \quad v_{[s]i} = a \partial_i v_{[s]}, \quad u_0 = v_{[s]0} = a(1 + \phi), \quad \rho_{[s]} = \bar{\rho}_{[s]} + \delta\rho_{[s]}, \quad (4.62)$$

где $[s] = \{[dm], [b], [\gamma]\}$ и черта обозначает невозмущенные значения. Подставляя данные выражения в (4.54) и (4.55), мы получаем систему линеаризованных уравнений Эйнштейна,

$$\begin{aligned} 2\Delta\psi - 3\mathcal{H}(2 + \alpha\mathcal{B})\psi' - \alpha\Delta\phi + \alpha\Delta\chi' + \alpha\mathcal{H}(1 - \mathcal{B})\Delta\chi \\ - \frac{a^2}{M_0^2}(\delta\rho_{[dm]} + \delta\rho_{[b]} + \delta\rho_{[\gamma]} + 2\phi[\bar{\rho}_{[dm]} + \bar{\rho}_{[b]} + \bar{\rho}_{[\gamma]} + \rho_{[\Lambda]}) = 0, \end{aligned} \quad (4.63a)$$

$$\begin{aligned} \psi' + \mathcal{H}\phi + \frac{\alpha c_\chi^2 \Delta\chi}{2 + \alpha\mathcal{B}} \\ - \frac{a^2}{M_0^2(2 + \alpha\mathcal{B})} \left[\bar{\rho}_{[dm]}(Y\chi + (1 - Y)v_{[dm]}) + \bar{\rho}_{[b]}v_{[b]} + \frac{4}{3}\bar{\rho}_{[\gamma]}v_{[\gamma]} \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.63b)$$

$$\begin{aligned} \psi'' + \mathcal{H}(\phi' + 2\psi') + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi \\ + \frac{2\Delta(\phi - \psi) + \alpha\mathcal{B}\Delta(\chi' + 2\mathcal{H}\chi)}{3(2 + \alpha\mathcal{B})} - \frac{a^2\delta\rho_{[\gamma]}}{3(2 + \alpha\mathcal{B})M_0^2} = 0, \end{aligned} \quad (4.63c)$$

$$\phi - \psi - \beta(\chi' + 2\mathcal{H}\chi) = 0, \quad (4.63d)$$

где мы использовали обозначения (3.58) и определили

$$\mathcal{H} \equiv \frac{a'}{a}, \quad Y \equiv F'(1). \quad (4.64)$$

Запишем теперь линеаризованные уравнения движения хронона и темной материи

$$\begin{aligned} \chi'' + 2\mathcal{H}\chi' - c_\chi^2 \Delta\chi + \left[\mathcal{H}'(1 - \mathcal{B}) + \mathcal{H}^2(1 + \mathcal{B}) + \frac{Y\bar{\rho}_{[dm]}a^2}{\alpha M_0^2} \right] \chi \\ - \frac{Y\bar{\rho}_{[dm]}a^2}{\alpha M_0^2} v_{[dm]} - \phi' - \mathcal{H}(1 + \mathcal{B})\phi - \mathcal{B}\psi' = 0, \end{aligned} \quad (4.65a)$$

$$\delta\rho'_{[dm]} + 3\mathcal{H}\delta\rho_{[dm]} - \bar{\rho}_{[dm]}(\Delta v_{[dm]} + 3\psi') = 0, \quad (4.65b)$$

$$v'_{[dm]} + \mathcal{H}v_{[dm]} + \frac{Y}{1 - Y}(\chi' + \mathcal{H}\chi) - \frac{\phi}{1 - Y} = 0. \quad (4.65c)$$

Последнее уравнение может быть проинтегрировано,

$$v_{[dm]} = -\frac{Y}{1 - Y}\chi + \frac{1}{a(\tau)(1 - Y)} \int^\tau d\tau' a(\tau') \phi(\tau', \mathbf{x}). \quad (4.66)$$

Если гравитационные потенциалы известны, это выражение можно использовать чтобы исключить $v_{[dm]}$ из (4.65a) и получить уравнение только на χ . Как и в ньютоновском пределе,

мы видим, что ЛН в ТМ описывается только одним параметром, Y . Следуя рассуждениям, приведенным в разделе 4.1, мы будем предполагать $0 \leq Y < 1$.

Ковариантный закон сохранения тензора энергии-импульса для обычной материи и излучения дает стандартные уравнения:

$$\delta\rho'_{[b]} + 3\mathcal{H}\delta\rho_{[b]} - \bar{\rho}_{[b]}(\Delta v_{[b]} + 3\psi') = 0, \quad v'_{[b]} + \mathcal{H}v_{[b]} - \phi = 0, \quad (4.67a)$$

$$\delta\rho'_{[\gamma]} + 4\mathcal{H}\delta\rho_{[\gamma]} - \frac{4}{3}\bar{\rho}_{[\gamma]}(\Delta v_{[\gamma]} + 3\psi') = 0, \quad v'_{[\gamma]} - \frac{\delta\rho_{[\gamma]}}{4\bar{\rho}_{[\gamma]}} - \phi = 0. \quad (4.67b)$$

Выписанные в этом подразделе уравнения определяют эволюцию линейных возмущений в ранней Вселенной. Несмотря на то, что уравнения линейны, аналитически получить их общее решение невозможно, поэтому в следующем разделе мы найдем приближенные решения для некоторых важных частных случаев, что позволит нам качественно понять характерные эффекты в спектре мощности структур и анизотропии реликтового излучения.

4.3. Космологические возмущения: качественный анализ

Рассмотрим моду с конформным импульсом k . Как обычно, её эволюция зависит от соотношения между k и темпом расширения \mathcal{H} . Взаимодействие между ТМ и хрономом приводит к появлению нового динамического масштаба, определяющего эволюцию мод. Подставляя ур-е (4.66) в (4.65a), видим, что динамика моды зависит от соотношения между конформным импульсом k и

$$k_Y \equiv \left(\frac{Y\bar{\rho}_{[dm]}a^2}{\alpha c^2(1-Y)M_0^2} \right)^{1/2}. \quad (4.68)$$

Этот новый масштаб прямо связан с плотностью ТМ и определяет критический импульс, ниже которого эффекты ЛН экранированы (см. подраздел 4.1). Выделяя явную временную зависимость, удобно записать

$$k_Y = \frac{k_{Y,0}}{\sqrt{a(\tau)}}, \quad k_{Y,0} \equiv H_0 \left[\frac{3Y\Omega_{dm}}{(\beta + \lambda)(1-Y)} \left(1 + \frac{\alpha\mathcal{B}}{2} \right) \right]^{1/2}, \quad (4.69)$$

где H_0 , Ω_{dm} суть современная постоянная Хаббла и плотность ТМ. Текущее значение масштабного фактора нормировано на единицу, $a(\tau_0) = 1$. Отметим, что в предположении $\alpha \ll Y$ современный масштаб экранировки $k_{Y,0}$ параметрически больше, чем параметр Хаббла H_0 . Иерархия между k_Y и \mathcal{H} сохраняется в течение всей материально-доминированной стадии и большей части радиационно-доминированной, см Рис. 4.1. Таким образом, эволюция моды с данным значением импульса k может находиться в следующих режимах:

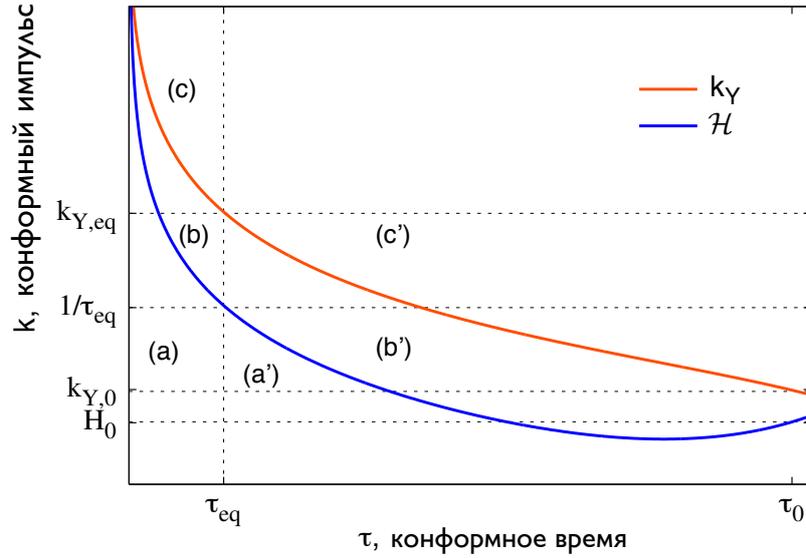


Рис. 4.1. Зависимость динамических масштабов, определяющих эволюцию космологических возмущений от времени. η_{eq} – время РД–МД перехода и η_0 -современное конформное время. Другие обозначения приведены в основном тексте.

- (a) загоризонтные моды, $k < \mathcal{H}$, радиационно-доминированная стадия ,
- (a') загоризонтные моды, $k < \mathcal{H}$, материально-доминированная стадия,
- (b) подгоризонтные моды с $\mathcal{H} < k < k_Y$, радиационно-доминированная стадия,
- (b') подгоризонтные моды с $\mathcal{H} < k < k_Y$, материально-доминированная стадия,
- (c) подгоризонтные моды с $\mathcal{H} < k_Y < k$, радиационно-доминированная стадия,
- (c') подгоризонтные моды с $\mathcal{H} < k_Y < k$, материально-доминированная стадия.

Эволюция космологических возмущений за горизонтом экранировки в режимах (a), (a'), (b), (c) была детально изучена в оригинальной работе автора [74]. В этих режимах в нулевом порядке по α решением уравнений (4.65) является адиабатическая мода

$$v_{[dm]} = \chi \cdot$$

Подстановка этого решения во все остальные уравнения восстанавливает результат ОТО, что согласуется с тем наблюдением, что все эффекты ЛН в темной материи экранированы при $k < k_Y$ (см. подраздел 4.1.2). В режиме (c) ($k > k_Y$ в эпоху преобладания излучения) незэкранированные эффекты ЛНТМ приводят лишь к перенормировке коэффициента в обычном логарифмическом росте контраста плотности ТМ, который дополнен слабыми затухающими осцилляциями.

Для формирования наблюдаемой анизотропии микроволнового излучения и роста структур решающее значение имеет поведение возмущений под горизонтом на материально-доминированной стадии, к описанию которого мы переходим в следующем подразделе.

Режимы (b') , (c') : $k > \mathcal{H}$ в материально-доминированную эпоху

Рассмотрим эволюцию подгоризонтных мод в материально-доминированной Вселенной, в которой масштабный фактор растет как

$$a(\tau) = A_m \tau^2, \quad A_m = (\Omega_{dm} + \Omega_b) H_0^2 / 4, \quad (4.70)$$

где Ω_b - современный вклад барионов в полную плотность Вселенной.

В пределе $\alpha, \beta, \lambda \rightarrow 0$ ньютонов потенциал постоянен, $\phi = \phi_{m,k}$, где индекс k обозначает зависимость моды от импульса. Предполагая, что поправки к гравитационным потенциалам будут порядка α , подставим это значение в ур-я (4.65), чтобы найти возмущения хронона и темной материи. Пренебрегая в (4.66) постоянной интегрирования, дающей только быстро спадающий вклад и подставляя окончательное выражение для скорости в (4.65a), получаем

$$\chi'' + \frac{4\chi'}{\tau} + \left[c_\chi^2 k^2 + \frac{c_\chi^2 k_{Y,0}^2}{A_m \tau^2} \right] \chi = \left[2(1 + \mathcal{B}) + \frac{c_\chi^2 k_{Y,0}^2}{3A_m} \right] \frac{\phi_{m,k}}{\tau}. \quad (4.71)$$

Для $k \ll k_{Y,0} / \sqrt{A_m} \tau$ (режим (b')), решение выглядит

$$\chi = \left[\frac{6A_m(1 + \mathcal{B}) + c_\chi^2 k_{Y,0}^2}{12A_m + 3k_{Y,0}^2 c_\chi^2} \right] \phi_{m,k} \tau + \chi_1^{(b')} \tau^{p_+} + \chi_2^{(b')} \tau^{p_-}, \quad p_\pm = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{k_{Y,0}^2 c_\chi^2}{A_m}}. \quad (4.72)$$

Из определений величин $k_{Y,0}$, A_m в (4.69), (4.70) следует, что $k_{Y,0}^2 / A_m \sim Y / \alpha$ параметрически больше единицы. Поэтому последние два члена описывают быстро спадающие осцилляции, оставляющие асимптотическое поведение

$$v_{[dm]} \approx \chi \approx \frac{\phi_{m,k}}{3} \tau. \quad (4.73)$$

Возмущения скорости имеют в точности ту же форму, что в ОТО, поэтому мы снова заключаем, что в рассматриваемом режиме эффекты ЛН полностью экранированы. Соответствующий контраст плотности находится из (4.65b) и даёт стандартный закон роста со временем

$$\delta_{[dm]} \approx -\frac{(k\tau)^2}{6} \phi_{m,k}. \quad (4.74)$$

Рассмотрим поправки к гравитационным потенциалам, создаваемые хрононом. Из ур-й (4.63c), (4.63d) мы имеем

$$\phi = \phi_{m,k} \left(1 + \frac{5}{84}(\beta + \lambda)(k\tau)^2 \right), \quad \psi = \phi_{m,k} \left(1 - \frac{5\beta}{3} + \frac{5}{84}(\beta + \lambda)(k\tau)^2 \right). \quad (4.75)$$

Как предполагалось, поправки к гравитационным потенциалам имеют порядок α . Мы видим, что поправки, хотя и малы, растут со временем. В конечном счете, когда k_Y уменьшается до k , они становятся порядка Y : это следует из оценки $(k_Y\tau)^2 \sim Y/\alpha$. Подавление параметрами α, β, λ исчезает, что сигнализирует о том, что в режиме (b') мы не можем действовать в рамках теории возмущений по этим параметрам аналогично только что рассмотренному случаю. Отметим, что адиабатическая мода (4.73) ведет к появлению постоянного анизотропного напряжения

$$\frac{\phi - \psi}{\phi} = \frac{5\beta}{3}. \quad (4.76)$$

В режиме (c') мы будем согласованно решать уравнения Эйнштейна и уравнения движения для хронона и ТМ. Можно заметить, что (4.63c), (4.63d), (4.65a), (4.65c) образуют полную систему уравнений для $\phi, \psi, \chi, v_{[dm]}$. При подстановке ожидаемого степенного поведения мы обнаруживаем растущую моду,

$$\psi = \phi = \tilde{\phi}_{m,k} \tau^{\varkappa}, \quad (4.77a)$$

$$\chi = \frac{k_{Y,0}^2 \tilde{\phi}_{m,k}}{k^2 A_m (\varkappa + 3)} \tau^{\varkappa-1}, \quad (4.77b)$$

$$v_{[dm]} = \frac{\tilde{\phi}_{m,k}}{(1 - Y)(\varkappa + 3)} \tau^{\varkappa+1}, \quad (4.77c)$$

где

$$\varkappa = -\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{6Y}{1 - Y} \frac{\Omega_{dm}}{\Omega_{dm} + \Omega_b}}, \quad (4.78)$$

и мы пренебрегли поправками порядка α, β, λ . Нормировка моды $\tilde{\phi}_{m,k}$ может быть определена путем сшивки (4.77) с решением перед пересечением горизонта экранировки (4.74) в момент когда $k = k_Y$. После подстановки (4.77c) в (4.65b) мы находим поведение контраста плотности ТМ,

$$\delta_{[dm]} = -\frac{k^2 \tilde{\phi}_{m,k}}{(1 - Y)(\varkappa + 3)(\varkappa + 2)} \tau^{\varkappa+2}. \quad (4.79)$$

Видно, что $\delta_{[dm]}$ растет быстрее, чем в ОТО, что должно вести к ускоренному росту структур. Показатель степени (4.79) совпадает с тем, что был получен в подразделе 4.1.2 (см ур-е. (4.34)), если мы пренебрежем вкладом барионов, т.е. положим $\Omega_b = 0$, и учтем соотношение между конформным и физическим временем, $\tau^3 \propto t$.

Интересно изучить возмущения барионной компоненты. Из (4.67a) мы находим,

$$\delta_{[b]} \equiv \frac{\delta\rho_{[b]}}{\bar{\rho}_{[b]}} = -\frac{k^2 \tilde{\phi}_{m,k}}{(\varkappa + 3)(\varkappa + 2)} \tau^{\varkappa+2}. \quad (4.80)$$

Поэтому контраст плотности барионов растет так же, как и контраст темной материи, но его полная амплитуда подавлена фактором, зависящим от Y ,

$$\frac{\delta_{[b]}}{\delta_{[dm]}} = 1 - Y. \quad (4.81)$$

Такое поведение имеет простое физическое объяснение: барионы не чувствуют усиления гравитационных потенциалов, испытываемого ТМ. Поэтому они не сразу «реагируют» на неоднородности гравитации и их возмущения плотности «отстают» от ТМ при падении в потенциальные ямы.

Анизотропное напряжение может быть найдено из (4.63d) и имеет вид

$$\frac{\phi - \psi}{\phi} = \beta \cdot \frac{k_{Y,0}^2}{A_m k^2 \tau^2}. \quad (4.82)$$

Отметим, что второй член в правой части всегда меньше единицы в рассматриваемом режиме, т.е. анизотропное напряжение всё еще подавлено β . Кроме того, оно затухает со временем как τ^{-2} .

4.3.1. Качественный анализ спектра мощности

Проведенный в предыдущем подразделе анализ позволяет нам качественно описать основные эффекты ЛН в ТМ, которые могут быть обнаружены в спектрах мощности возмущений ТМ и барионов.

Из рис. 4.1 мы видим, что моды с различными k испытывают разную последовательность динамических режимов.

- Моды с $k < k_{Y,0}$ всегда находятся за горизонтом экранировки, где эффекты ЛН подавлены. В этом диапазоне спектр мощности имеет такую же зависимость от импульса, как в Λ CDM-космологии.
- Моды с $k_{Y,0} < k < k_{Y,eq}$, где

$$k_{Y,eq} \equiv \frac{k_{Y,0}}{\sqrt{a(\tau_{eq})}} = k_{Y,0} \sqrt{\frac{\Omega_{dm} + \Omega_b}{\Omega_\gamma}}, \quad (4.83)$$

есть горизонт экранировки на момент РД-МД перехода, входят в не экранированный режим на материально-доминированной стадии. Обозначим момент пересечения горизонта экранировки как $\tau_Y(k)$,

$$\tau_Y(k) \equiv \frac{k_{Y,0}}{\sqrt{A_m k}}. \quad (4.84)$$

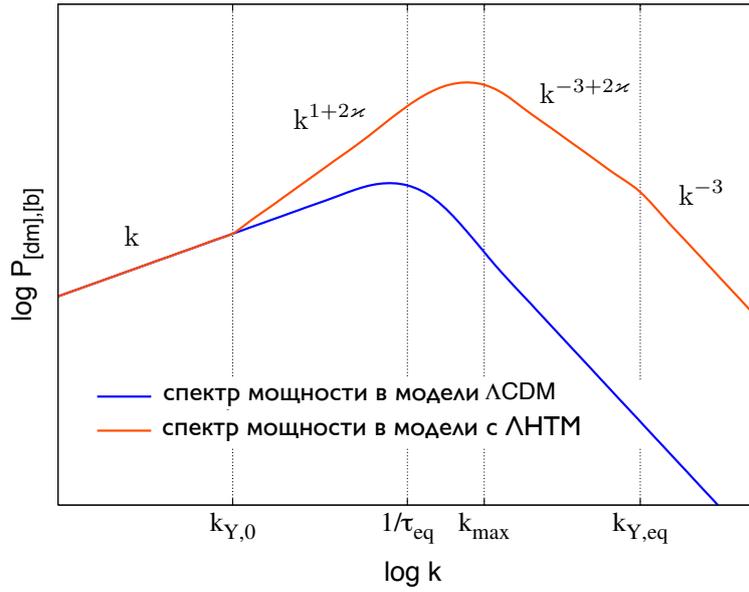


Рис. 4.2. Схематическое представление спектра мощности возмущений в модели ЛН темной материи (верхняя кривая) и спектра мощности в Λ CDM (нижняя кривая). Качественное поведение одинаково для темной материи и барионов. Величины $k_{Y,0}$, $k_{Y,eq}$, α определены в (4.69), (4.83), (4.78). Рисунок отвечает случаю $k_{Y,0} < 1/\tau_{eq}$.

Между τ_Y и τ_0 контраст плотности испытывает аномальный рост (4.79), (4.80), поэтому соответствующие моды усилены множителем $(\tau_0/\tau_Y)^\alpha$, что ведет к изменению формы спектра мощности на $\propto k^{2\alpha}$.

- Моды с $k > k_{Y,eq}$ выходят из режима экранировки на радиационно-доминированной стадии. Эффект ЛН для этих мод выражается в равномерном усилении множителем $(\tau_0/\tau_{eq})^\alpha$. Этот множитель не зависит от импульса моды, поэтому форма спектра остается такой же, как в Λ CDM.

Описанная картина проиллюстрирована на Рис. 4.2. Для простоты мы предположили плоский спектр начальных возмущений, пренебрегли логарифмическим ростом возмущений в течение радиационно-доминированной эпохи и эффектами космологической постоянной.

Отметим, что изменение в форме спектра мощности зависит только от параметра Y , описывающего ЛН в ТМ, тем временем как диапазон масштабов, в котором это изменение имеет место, определяется как Y , так и параметрами хронона α , β , λ .

Рис. 4.2 соответствует ситуации, когда отношение Y/α достаточно велико и $k_{Y,0}$ меньше, чем $1/\tau_{eq}$ и темп хаббловского расширения на момент перехода с радиационно на материально доминированную стадию. Последний определяет положение максимума спектра

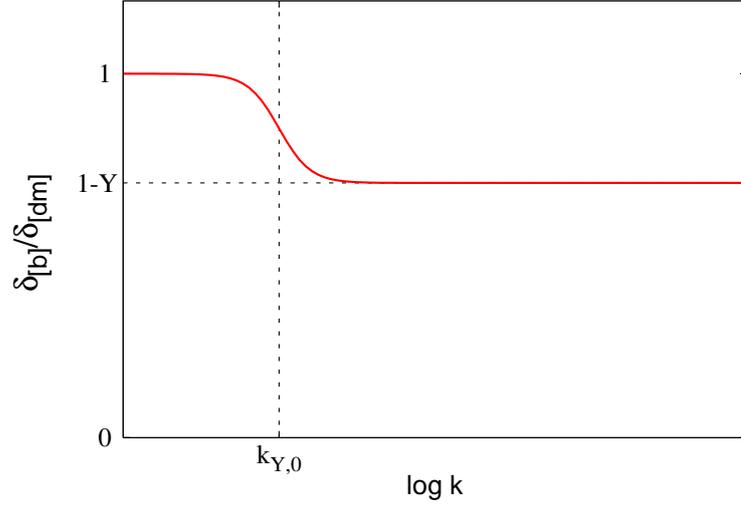


Рис. 4.3. Отношение контрастов плотностей барионов и ТМ (качественный рисунок).

мощности в стандартном случае Λ CDM. В этом случае изменение наклона спектра мощности приводит также к сдвигу положения его максимума. Действительно, в \log - \log -масштабе стандартный спектр Λ CDM в окрестности максимума может быть записан в виде параболы,

$$\log P^{\Lambda CDM} = A_1 - A_2(\log k \tau_{eq})^2 ,$$

где $A_{1,2}$ —некоторые постоянные. Вызванное ЛН дополнительное усиление добавляет к нему линейную поправку,

$$\log P = \log P^{\Lambda CDM} + 2\kappa \log k .$$

Дифференцируя данное выражение по k мы получаем новое положение максимума,

$$\log k_{max} = \log 1/\tau_{eq} + \kappa/A_2 . \quad (4.85)$$

Закключаем, что сдвиг линейно пропорционален κ .

Если же $k_{Y,0} > 1/\tau_{eq}$, что имеет место при сильной иерархии между параметрами Y и α , то положение максимума спектра мощности не меняется.

Второй качественный эффект ЛН в ТМ, - это смещение контраста плотности барионов относительно ТМ (4.81) для мод, испытывающих аномальный рост, т.е. для всех мод с волновыми числами больше, чем $k_{Y,0}$. Для меньших k контрасты плотности барионов и ДМ равны друг другу. Это приводит к появлению масштабной зависимости смещения, показанной на Рис. 4.3.

4.4. Заключение к главе

В данной главе была описана возможность проверки Лоренц – инвариантности темной материи с помощью космологических наблюдений. Предложенная модель основана на Эйнштейн-эфир/хронометрической гравитации, которая предоставляет эффективное описание нарушения лоренцевой симметрии в гравитации при низких энергиях. Это нарушение описывается с помощью единичного времениподобного вектора эфира, который взаимодействует с темной материей. Примечательно, что эффекты нарушения лоренцевой симметрии в темной материи в лидирующем порядке контролируются всего одним параметром, Y . Сначала был рассмотрен ньютонов предел, в рамках которого была качественно изучена физика предложенной модели. Затем было развито эффективное макроскопическое описание темной материи взаимодействующей с эфиром, которое на строгом уровне позволило вывести уравнения для космологических возмущений. В третьей части главы были качественно изучены основные космологические эффекты. На уровне однородной космологии модель предсказывает лишь ненаблюдаемое перешкалирование гравитационной постоянной в уравнении Фридмана. На уровне линейных возмущений были обнаружены зависящие от масштаба усиление роста структур и смещение между плотностями барионов и темной материи. В следующей главе предложенная модель будет детально исследована численно, что позволит в дальнейшем использовать найденные эффекты для ограничения значений параметров модели.

Глава 5

Наблюдательные ограничения на отклонение от Лоренцевой симметрии в гравитации и темной материи

В данной главе представлено детальное численное исследование эффектов, влияющих на формирование космологических наблюдаемых в теориях с нарушением Лоренцевой симметрии в гравитации и темной материи. Будут изучены три ключевые эффекта: перешкалировка вклада материи в уравнении Пуассона, появление дополнительного вклада в анизотропное натяжение и масштабно – зависимое усиление сгущивания темной материи. Данные эффекты оставляют весьма отличительные черты в спектрах мощности анизотропии температуры микроволнового реликтового излучения и плотности материи. Используя данные по флуктуациям температуры реликтового излучения спутника «Планк» и по распределению галактик глубокого обзора «Вигглз» (WiggleZ), были поставлены самые сильные ограничения на параметры Лоренц – нарушения (ЛН) в гравитации и темной материи. Примечательно, что прямые ограничения на отклонения от Лоренц – инвариантности (ЛИ) в секторе темной материи были поставлены впервые.

5.1. Наблюдательные эффекты: численный анализ

В данном разделе мы обсудим, к каким наблюдательным следствиям ведет модифицированная динамика космологических возмущений в модели с нарушением лоренцевой симметрии в гравитации и темной материи. Мы сосредоточим внимание на скалярном секторе. Как обсуждалось в главе 2, тензорные моды в случае нарушения ЛИ отличаются от стандартного случая только скоростью распространения, поэтому их динамика будет такой же, как в ОТО. Что касается векторных возмущений, то как обсуждалось в главе 2, их эффект пренебрежим в космологии для интересующей нас области параметров ЛН.

На качественном уровне можно выделить четыре основных эффекта, которые приводят к отличиям в эволюции космологических возмущений по сравнению с Λ CDM–случаем:

1. Измененная само-гравитация материи (перемасштабирование вклада материи в уравнении Пуассона).
2. Новый вклад (хронона) в анизотропное напряжение.

3. Нарушение принципа эквивалентности для частиц тёмной матери, приводящее к ускоренному росту их гравитационных потенциалов.
4. Появление масштабнo-зависимого смещения контраста плотности барионов относительно контраста плотности тёмной материи.

Первые два эффекта присущи любой теории гравитации с нарушенной лоренцевой симметрией, тем временем как третий и четвертый эффекты являются специфичными для моделей с ЛН в секторе тёмной материи. Последние два эффекта были детально изучены аналитически в разделе 4.3. Обсудим теперь, как первые два эффекта влияют на космологические возмущения.

Первый эффект может быть качественно понят из следующих соображений. Запишем уравнение Пуассона, т.е. (00)-уравнение Эйнштейна (4.63a) в подгоризонтном пределе в пренебрежении анизотропным напряжением и вкладом хронона,

$$k^2 \phi \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{a^2}{2M_0^2} \sum_{\text{материя}} \rho_n \delta_n.$$

Вводя зависящую от времени удельную плотность энергии компонент материи как

$$f_n \equiv \frac{8\pi G_{cos}}{3H^2} \rho_n,$$

переписываем уравнение Пуассона в виде

$$k^2 \phi = -4\pi G_N a^2 \sum_{\text{материя}} \rho_n \delta_n = -\frac{3}{2} \frac{G_N}{G_{cos}} \mathcal{H}^2 \sum_{\text{материя}} f_n \delta_n. \quad (5.1)$$

Если мы предположим, что однородная эволюция Вселенной совпадает со стандартной, т. е. что \mathcal{H} и f_n в точности те же, что в Λ CDM, то (5.1) указывает на то, что гравитационные потенциалы всех компонент материи будут изменены множителем G_N/G_{cos} . Если данные потенциалы подставить в стандартные уравнения движения, то они изменят закон роста возмущений плотности для всех компонент материи, входящих в правую часть (5.1). В частности, контраст плотности холодной материи будет расти на материально-доминированной стадии как

$$\delta \propto a^{\frac{1}{4}(1+\sqrt{1+24G_N/G_{cos}})}, \quad (5.2)$$

что впервые было получено в работе [134]. Отметим, что для малых значений параметров (α, β, λ) аномальный фактор роста пропорционален

$$\frac{G_N}{G_{cos}} - 1 = \frac{\Sigma}{2} + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (5.3)$$

где мы определили

$$\Sigma \equiv \alpha + \beta + 3\lambda. \quad (5.4)$$

При $\Sigma = 0$ эффект модифицированной само – гравитации подавлен. В хронометрической гравитации ППН–ограничения (2.16) совместны с $\Sigma \neq 0$ что может привести к существенным последствиям в динамике возмущений. В то же время в Эйнштейн–эфир гравитации имеет место вырождение по параметрам и при наложении ППН условия (2.18) Σ тождественно зануляется, так что усиления гравитации за счет ЛН не происходит.

Для описания второго эффекта запишем бесследовую часть (ij) –уравнения Эйнштейна (см. (4.63d)),

$$k^2(\phi - \psi) = -\frac{3a^2}{2M_0^2} \sum_{\text{материя}} (\rho_n + p_n)\sigma_n + \beta k^2(\chi' + 2\mathcal{H}\chi), \quad (5.5)$$

где σ_n –напряжение сдвига компонент материи (нейтрино и барион-фотонной плазмы). Дополнительный вклад хронона в анизотропное напряжение ведет к увеличению вязкости космологической среды и, следовательно, подавлению возмущений, известному как затухание Ландау. В рассматриваемой модели с ЛНТМ аналитические оценки раздела 4.3 говорят нам, что анизотропное напряжение быстро затухает под горизонтом экранировки (4.82), и является постоянным вне него (4.76). Данное поведение подтверждается численными расчетами, проведенными с использованием модифицированного Больцмановского кода CLASS, представленными на Рис. 5.1, где построен спектр относительного анизотропного напряжения при $z = 0$ для набора параметров модели *нарушения принципа эквивалентности тёмной материи* (НПЭТМ в дальнейшем) (см. таблицу 5.1).

Мы четко видим, что при малых длинах волн спектр является почти плоским и его амплитуда по порядку величины равна β . Плато распространяется до масштабов $k \approx k_{Y,0}$, для бóльших волновых чисел напряжение убывает как k^{-2} . Присутствие напряжения сдвига до достаточно больших импульсов является интересным наблюдательным следствием модели, так как в большинстве других моделей (в частности, в хронометрической гравитации при $Y = 0$) анизотропное напряжение быстро убывает под хаббловским горизонтом.

Чтобы проиллюстрировать, как выделенные эффекты влияют на наблюдаемые величины, мы изучим численно эволюцию возмущений с использованием модифицированного Больцмановского кода CLASS [135]. Влияние эффектов *усиленной само-гравитации* и *напряжения сдвига* на спектры мощности анизотропии реликтового излучения и возмущений плотности материи было подробно изучено в работе [108]. Так как эти эффекты имеют место также и в нашей модели, мы вкратце упомянем их основные проявления и сосредоточим

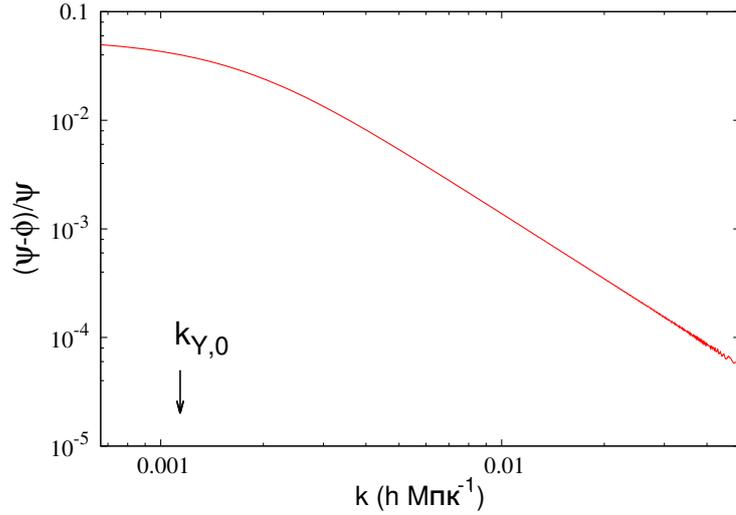


Рис. 5.1. Спектр относительного анизотропного напряжения в рассматриваемой модели для набора параметров модели *НПЭТМ* (см. таблицу 5.1).

внимание в основном на третьем эффекте, вызванном *нарушением ПЭ в ТМ*. Четвертый эффект (барионное смещение) не отражается непосредственно на спектре мощности материи и анизотропии микроволнового излучения. Мы выбрали три набора параметров (см. таблицу 5.1), при которых наиболее четко проявляются выделенные эффекты. Соответствующие данным параметрам модели в дальнейшем будем просто называть моделями *усиленной гравитации*, *сдвига* и *НПЭТМ*.

Модель	α	β	λ	Y	\varkappa	Σ	$k_{Y,0}$ (h Мпк ⁻¹)
<i>НПЭТМ</i>	0.005	0.025	-0.01	0.5	0.85	0	$1.14 \cdot 10^{-3}$
<i>Усиленная гравитация</i>	0.2	0	0.1	0	0	0.5	—
<i>Сдвиг</i>	0.05	0.25	-0.1	0	0	0	—

Таблица 5.1. Параметры для моделей *усиленной само-гравитации*, *сдвига* и *НПЭТМ*.

В модели *усиленной гравитации* эффекты *сдвига* и *НПЭТМ* выключены. В модели *сдвига* остальные два эффекта также выключены. Однако, оказалось невозможно подобрать параметры так, чтобы в модели *НПЭТМ* были выключены сразу оба эффекта ЛН в гравитации. Поэтому прежде всего мы изолировали *усиленную гравитацию*, которая «мимикрирует» под ускоренный рост возмущений ТМ. Эффект *сдвига* изолируется динамически, так как анизотропное напряжение затухает под горизонтом экранировки, где гравитацион-

ные потенциалы ТМ начинают расти ускоренно. Мы выбрали параметры модели *НПЭТП* так, чтобы анизотропное напряжение было минимальным при максимальной скорости звука хронона c_χ , которая определяет масштаб k_χ . Отметим, что параметры ЛН во всех трех моделях выбраны достаточно большими, чтобы наиболее явно проиллюстрировать интересующие нас эффекты. В дальнейшем мы увидим, что такие значения параметров исключены текущими космологическими наблюдениями, см. 5.2. Начальные значения для всех численных расчетов подобраны так, что начальный гравитационный потенциал ϕ для одних и тех же мод одинаков во всех моделях. Для обычных космологических параметров мы выбрали значения

$$n_s = 1, \quad h = 0.7, \quad \Omega_b = 0.05, \quad \Omega_{cdm} = 0.25, \quad A_s = 2.3 \times 10^{-9}.$$

В рамках численного кода современное ускоренное расширение Вселенной описывается космологической постоянной, а нейтрино выбраны безмассовыми.

5.1.1. Эффекты в микроволновом излучении

В этом подразделе мы изучим, как упомянутые выше эффекты влияют на форму спектра анизотропии реликтового излучения. Для изобразительных целей мы не учитывали вторичную ионизацию в численных вычислениях данного подраздела.

Обсудим сначала следствия усиленной само-гравитации и напряжения сдвига (см. Рис 5.2). В первой модели ускоренный рост возмущений плотности (5.2) вызывает существенное усиление интегрального эффекта Сакса-Вольфа (СВ) в промежутке $10 < l < 400$ и изменение обычного эффекта СВ на масштабах $l > 100$.

Изменения в эффекте СВ могут быть поняты из уравнения Пуассона (5.1) и уравнения движения барион–фотонной плазмы перед отщеплением фотонов. Последнее имеет следующий вид в приближении тесной связи [136],

$$\Theta_\gamma'' + \frac{R'_B}{1 + R_B} \Theta_\gamma' + k^2 c_s^2 \Theta_\gamma = -\frac{k^2}{3} \phi + \frac{R'_B}{1 + R_B} \psi' + \psi'', \quad (5.6)$$

где $\Theta_\gamma \equiv \delta_\gamma/4$ и $c_s \equiv (3(1 + R_B))^{-1/2}$ –скорость звука барион–фотонной плазмы в отсутствие гравитации. Согласно уравнению (5.1), первый член в правой части (5.6) содержит слагаемое, пропорциональное Θ_γ . Это слагаемое положительно и его значение больше, чем в Λ CDM при $\Sigma > 0$, так как возмущения плотности барион–фотонной плазмы испытывают усиление. Поэтому данное слагаемое эффективно уменьшает скорость звука в плазме, что ведет к смещению пиков акустических осцилляций. Из-за «соревнования» между эффективным уменьшением скорости звука и усилением гравитационных потенциалов ϕ в полном

вкладе СВ, первый и четные акустические пики оказываются подавлены, см. Рис. 5.2 слева, тогда как амплитуда нечетных пиков начиная с третьего практически не изменена.

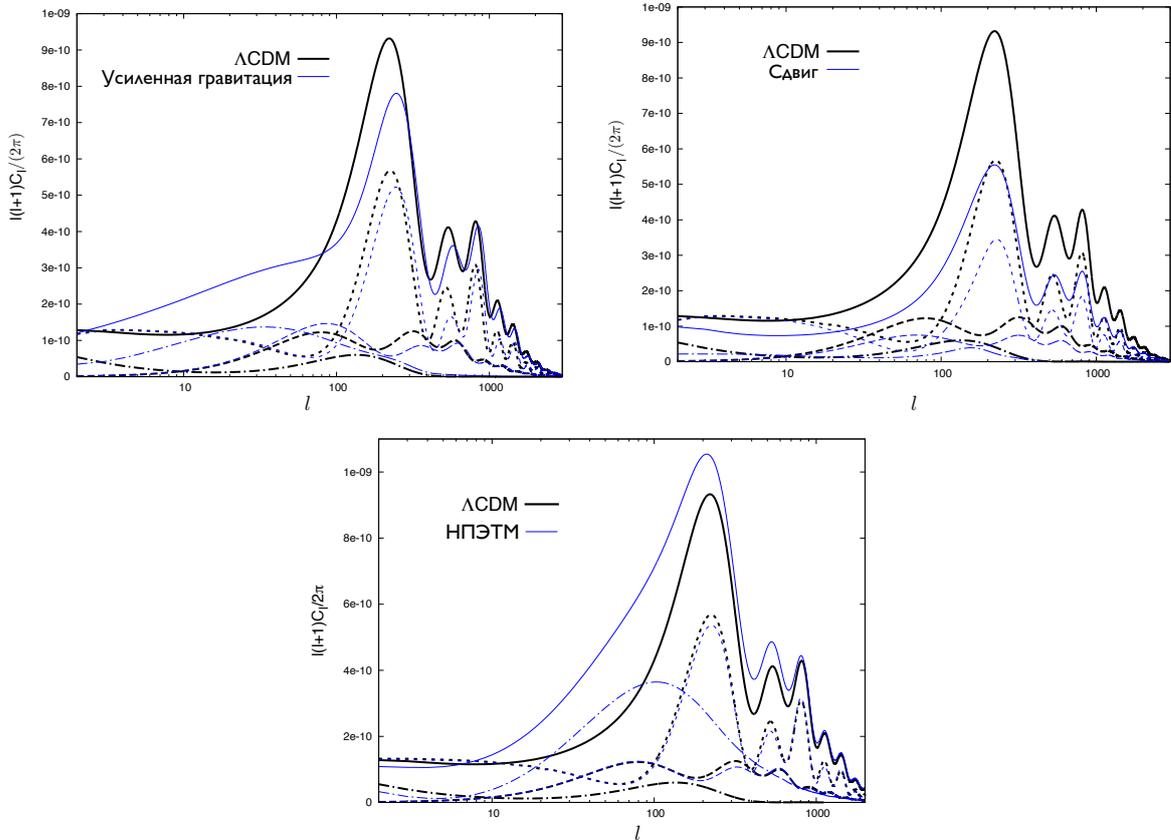


Рис. 5.2. Спектр анизотропии температуры (сплошная линия) и его разложение на вклады Сакса–Вольфа (пунктир), Доплера (штрих) и интегрального эффекта Сакса–Вольфа (штрих-пунктир) . Толстые черные линии соответствуют Λ CDM –модели, а синие - моделям *усиленной-гравитации* (слева сверху), *сдвига* (справа сверху) и *НПЭТМ* (нижний рисунок).

В модели *сдвига* анизотропное напряжение хронона ведет к сглаживанию флуктуаций метрики на масштабах меньше размера акустического горизонта, связанного со скоростью звука хронона. В модели *сдвига* поле χ является сверхсветовым $c_\chi = \sqrt{3}$ и, следовательно, подавление проявляется на масштабах больших, чем хаббловский горизонт. Амплитуда акустических осцилляций будет подавлена, так как её величина определяется значением гравитационных потенциалов при пересечении звукового горизонта, которые «замыты» в модели *сдвига*. По этой же причине подавлены и амплитуды интегрального эффекта СВ и эффекта Доплера. Итоговый результат: однородное ослабление амплитуды спектра мощности. Данное подавление можно частично компенсировать увеличением амплитуды A_s или уменьшением наклона $n_s - 1$ спектра начальных возмущений, поэтому ограничения на мо-

дель сдвига (т.е. параметр β) должны быть слабее, чем на модель *усиленной гравитации* (параметр Σ).

Перейдем теперь к случаю *НПЭТМ*. Нижняя часть Рис. 5.2 демонстрирует разложение спектра анизотропии на автокорреляционные вклады эффектов СВ, интегрального СВ и Доплера. Ускоренный рост потенциалов на материально-доминированной стадии вызывает существенный интегральный эффект Сакса-Вольфа в большом диапазоне мультиполей начиная с $l \sim k_{Y,0}\tau_0 \simeq 25$. На малых масштабах $l < 10$ поздний интегральный эффект СВ подавлен по амплитуде из-за ненулевого напряжения сдвига хронона, которое «замывает» гравитационные потенциалы в соответствующих модах на сверх – хаббловских масштабах. «Соревнование» между ускоренным ростом потенциалов тёмной материи и небольшим напряжением сдвига хронона для параметров модели *НПЭТМ* приводит к слабым изменениям в картине акустических пиков эффекта СВ. На очень малых масштабах $l > 1000$ спектр мощности подавлен из-за эффекта Силка. Отметим, что эффекты Доплера и Сакса - Вольфа в рассматриваемом случае практически не отличаются от стандартных, что согласуется с аргументами о гравитационном отщеплении тёмной материи при рекомбинации [137].

В моделях *усиленной гравитации* и *НПЭТМ* самым сильным наблюдательным следствием в реликтовом излучении является интегральный эффект Сакса-Вольфа. Однако в первом случае присутствует еще и смещение пиков, поэтому мы ожидаем ограничения из микроволнового излучения на эффекты *усиленной гравитации* сильнее, чем на *НПЭТМ*.

5.1.2. Эффекты в линейном спектре мощности материи

Другой наблюдаемой, отражающей поведение космологических возмущений в модели с ЛНТМ является спектр мощности флуктуаций плотности материи. Мы ограничим наше обсуждение масштабами $k \lesssim 0.1 h/\text{Мпк}$, которые находятся в режиме, близком к линейному.

В модели с нарушенной лоренцевой симметрией в гравитации прежде всего не очевидно, какое стоит взять определение для спектра мощности, так как в модели присутствуют дополнительные вклады в возмущение плотности и анизотропное напряжение. Здесь стоит обратиться к тому, какие именно величины используются в наблюдениях. Космологические наблюдения разделяются на два типа. Первый тип измеряет непосредственно гравитационные потенциалы (линзирование реликтового излучения, наблюдения космического анизотропного натяжения), там временем как второй тип изучает компактные объекты: галактики, гало, скопления галактик. На больших масштабах плотность этих объектов линейно связана с гравитационным полем. Именно данные таких наблюдений мы собираемся

использовать в текущей работе, поэтому разумно будет определить спектр мощности через уравнение Пуассона,

$$k^2 \phi = -4\pi G_N a^2 \delta\rho_{tot}.$$

Сравниваясь с уравнением (4.63а) мы видим, что вклады в полную плотность энергии обычных компонент имеют стандартный вид, тем временем как эффективная плотность хронона равна

$$\delta\rho_\chi = \frac{\alpha k^2 M_0^2}{a^2} (\dot{\chi} + \mathcal{H}(1 - \mathcal{B})\chi).$$

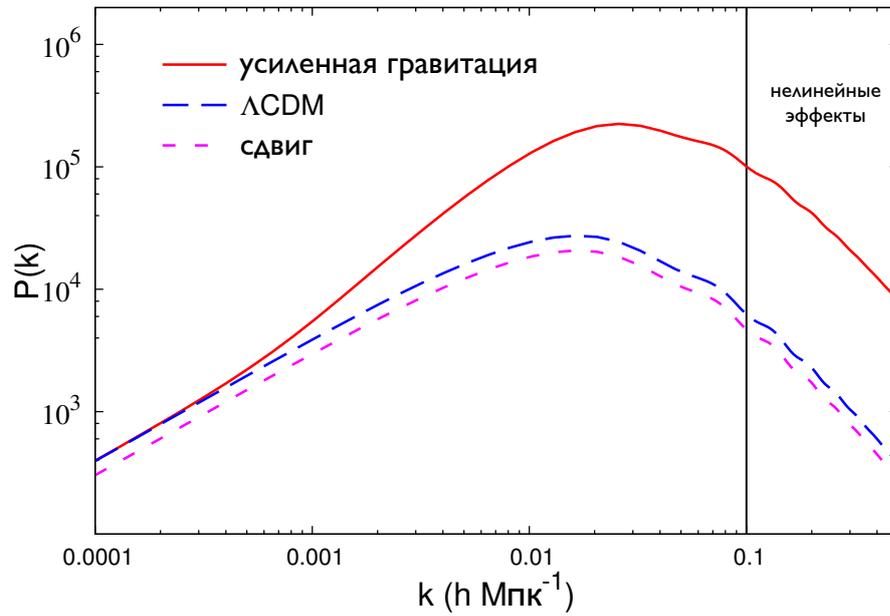


Рис. 5.3. Спектры мощности в моделях *усиленной гравитации*, *сдвига* и Λ CDM для красного смещения $z = 0$.

Чтобы получить спектр мощности контраста плотности мы должны поделить возмущение плотности $\delta\rho_{tot}$ на фоновое значение, определяемое однородными космологическими уравнениями. В случае ОТО нужно снова использовать ньютоновскую константу чтобы связать полную плотность с параметром Хаббла, определяющим геометрию пространства-времени. Но величина гравитационной постоянной, входящей в уравнения Фридмана в хронометрической гравитации отличается от ньютоновской. Поэтому плотность материи, найденная таким путем оказывается перемасштабированной по сравнению с ньютоновским значением,

$$\rho_{eff} = \frac{G_{cos}}{G_N} (\rho_{cdm} + \rho_b).$$

Поэтому мы приходим к следующему определению спектра мощности

$$P(k) \equiv \left(\frac{G_N}{G_{cos}} \right) \frac{\langle |\delta\rho_{tot}(\mathbf{k})|^2 \rangle}{(\rho_{cdm} + \rho_b)^2}.$$

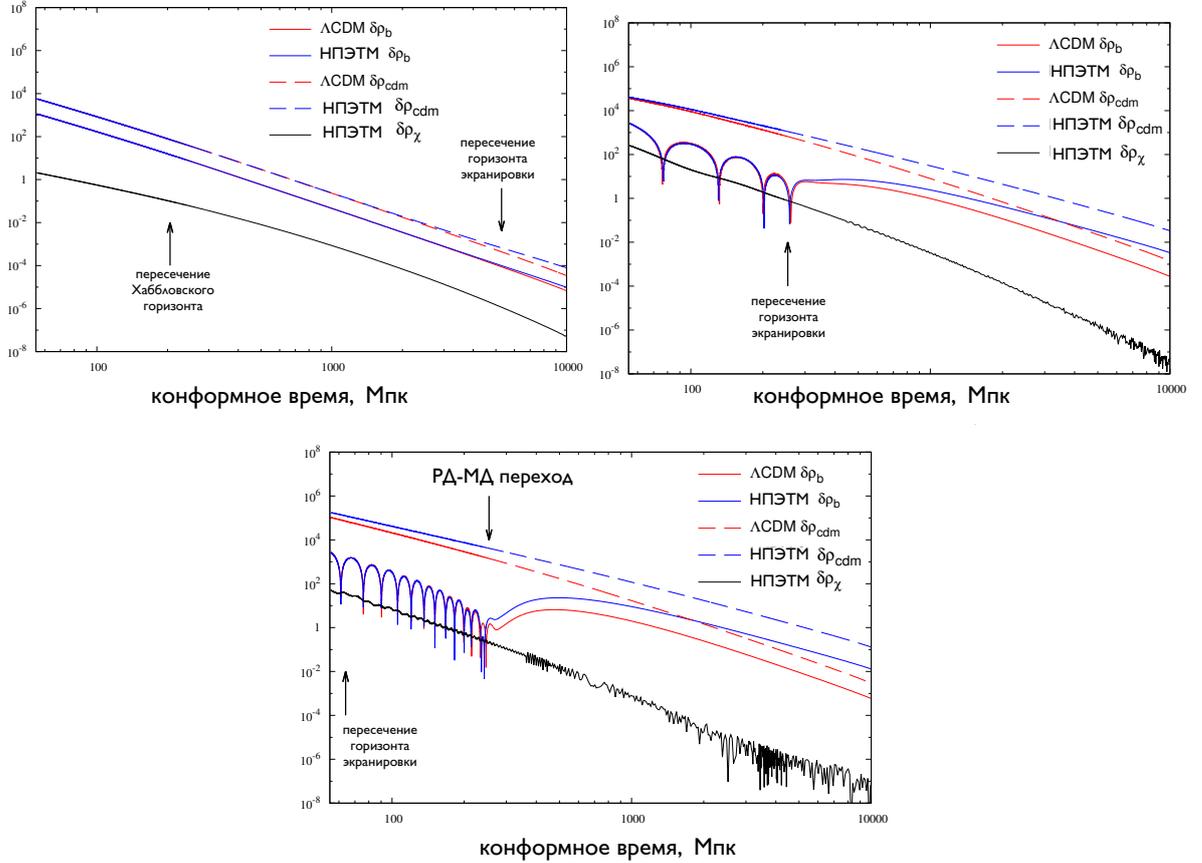


Рис. 5.4. Эволюция различных компонент ρ_i (в произвольных единицах) в ньютоновской калибровке для волновых чисел $k = 4.9 \times 10^{-3} \text{ Мпк}^{-1}$ (левая верхняя панель), $k = 0.1 \text{ Мпк}^{-1}$ (правая верхняя панель) и $k = 0.4 \text{ Мпк}^{-1}$ (нижняя панель). Синие линии относятся к величинам в модели с НПЭТМ, красные – в ΛCDM .

Рассмотрим сначала модели *усиленной гравитации* и *сдвига*. Их спектры мощности и спектр мощности в ΛCDM -модели построены на Рис. 5.3. В первом случае ускоренный рост возмущений плотности приводит к существенному масштабному-зависимому усилению спектра на масштабах меньше текущего Хаббловского радиуса ($k \lesssim 0.0003 h/\text{Мпк}$). Отметим также изменение позиции акустических осцилляций (см. подраздел 5.1.1) на малых масштабах. В модели *сдвига* в отсутствие Лоренц-нарушения в тёмной материи анизотропное напряжение быстро затухает сразу после пресечения хаббловского горизонта, делая применимым введенное выше определение спектра мощности. При пересечении горизонта амплитуды плотности оказываются «замыты», поэтому как и в реликтовом излучении, главный

эффект здесь—однородное ослабление спектра.

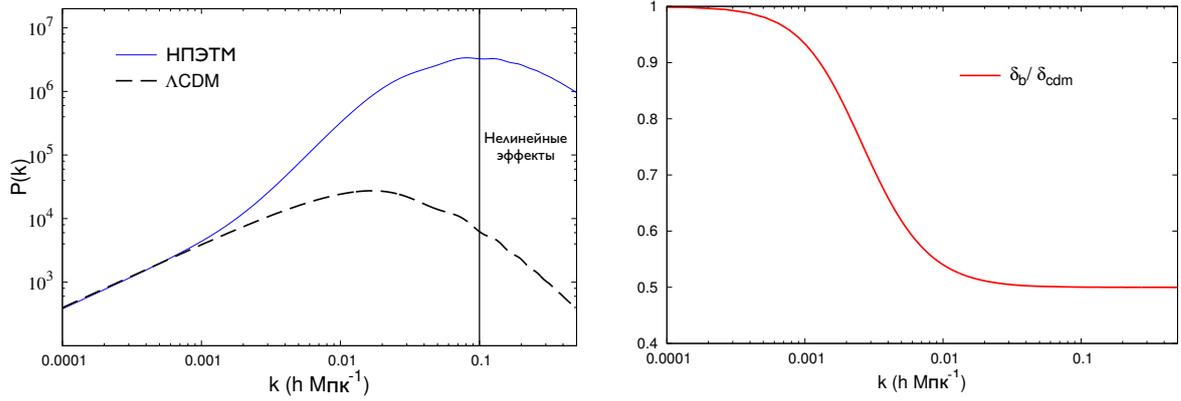


Рис. 5.5. Левый рисунок: линейный спектр мощности возмущений плотности материи для НПЭТМ (синяя сплошная линия) и Λ CDM (черная штриховая кривая)—моделей для $z = 0$. Правый рисунок: барионное смещение в модели с НПЭТМ.

Перейдем теперь к модели с НПЭТМ. Рис. 5.4 демонстрирует эволюцию различных компонент $\delta\rho_{tot}$ для трех значений волновых чисел. Во-первых, мы видим, что вклад хронона $\delta\rho_\chi$ мал по сравнению с современными вкладами барионов и тёмной материи. Во-вторых, возмущения тёмной материи в сценарии с НПЭТМ начинают расти существенно быстрее, чем в Λ CDM после пересечения горизонта экранировки. Возмущения плотности барионов после отщепления от фотонов также растут быстрее, «падая» в гравитационные потенциалы, созданные тёмной материей.

Ускоренный рост плотности под горизонтом экранировки транслируется в масштабное усиление спектра мощности материи, который представлен на Рис. 5.5. В диапазоне импульсов $k_{Y,0} < k < k_{Y,eq}$ ($10^{-3} h\text{Mpc}^{-1} < k < 6 \times 10^{-2} h\text{Mpc}^{-1}$ для выбранных параметров модели) спектр имеет измененный наклон, что ведет к его усилению и смещению положения максимума (см. раздел 4.3.1). Для коротких мод $k > k_{Y,eq} \approx 6 \times 10^{-2} h\text{Mpc}^{-1}$ спектр не меняет наклон, но испытывает однородное усиление по амплитуде. Другим потенциально наблюдаемым эффектом является барионное статистическое смещение, т.е. нетривиальное масштабное – зависимое отношение между контрастами плотности барионов и ТМ. Как видно слева на Рис.5.5, смещение появляется на масштабах $k = k_{Y,0} \approx 10^{-3} h\text{Mpc}^{-1}$ и остается постоянным и равным $(1 - Y)$ на меньших масштабах, что согласуется с результатами аналитического исследования предыдущей главы.

5.2. Сравнение с данными

В этом разделе мы сравним модель с нарушенной лоренцевой симметрией в тёмной материи и гравитации с текущими наблюдаемыми данными по анизотропии микроволнового излучения и крупномасштабной структуре Вселенной. Для этого при помощи кода `MontePython` [138] был проведен Монте – Карло анализ по схеме марковской цепи. Были использованы данные по флуктуациям температуры реликтового излучения спутника «Планк» [31] и данные обзора галактик «ВигглЗ» [139] по крупномасштабной структуре Вселенной.

Эйнштейн – эфир и хронометрическая модели гравитации исследованы по отдельности. В рамках каждой модели проанализированы случаи $Y \neq 0$ (есть ЛН в ТМ) и $Y = 0$ (ЛН только в гравитации). Для ненулевых Y при фитировании были использованы девять свободных космологических параметров, из которых шесть являются свободными параметрами минимальной Λ CDM и три параметра α , $c_\chi^2 = (\beta + \lambda)/\alpha$ и Y характеризуют ЛН в гравитации и ТМ. Третий свободный параметр скалярного сектора ЛН в гравитации был фиксирован так, чтобы удовлетворять ограничениям, следующим из динамики в Солнечной системе, обсужденным в главе 2. Для лучшей сходимости марковских цепей мы варьировали параметры α и c_χ^2 в логарифмическом масштабе. Плотности априорной вероятности распределения ЛН параметров были выбраны равномерными в диапазонах

$$0 \leq \log_{10} c_\chi^2, \quad 0 < Y < 1. \quad (5.7)$$

Подчеркнем, что ограничение снизу на c_χ^2 следует из черенковского ограничения $c_\chi^2 \geq 1$, обсужденного в главе 2. Верхнее ограничение на c_χ^2 не является необходимым, так как большие значения c_χ^2 находятся в сильном противоречии с данными. Для заданных значений $\log_{10} \alpha$ и $\log_{10} c_\chi^2$ значения параметров β, λ можно определить из уравнения (2.16) в случае хронометрической гравитации или (2.18) - в случае теории Эйнштейн – эфира. Эффекты ЛН в тёмной материи экранированы для волновых чисел меньше $k_{Y,0} \propto \sqrt{Y/(\alpha c_\chi^2)}$. Если $\alpha < 5 \cdot 10^{-6}$, то постановка ограничений станет невозможной, так как экранирование будет иметь место на всех «линейных» масштабах (больше ~ 10 мегапарсеков) даже при $Y \sim 1$. Поэтому, чтобы поставить ограничение на Y , мы используем следующий диапазон априорных значений α :

$$-4.7 < \log_{10} \alpha < 0.3, \quad (5.8)$$

что соответствует $2 \times 10^{-5} < \alpha < 2$.

Результаты, полученные для байесовских минимальных доверительных интервалов параметров фита представлены в первых двух строках Таблицы 5.2. Три параметра Лоренц -

	$100 \omega_b$	ω_{cdm}	n_s	$10^{+9} A_s$	h	z_{reio}	α	c_χ^2	Y
Э-э	$2.225^{+0.028}_{-0.031}$	$0.1178^{+0.0025}_{-0.0022}$	$0.9635^{+0.0068}_{-0.0073}$	$2.159^{+0.048}_{-0.050}$	$0.683^{+0.010}_{-0.012}$	$10.4^{+1.1}_{-1.0}$	$< 5.0 \cdot 10^{-3}$	< 240	< 0.028
хр	$2.227^{+0.028}_{-0.031}$	$0.1174^{+0.0025}_{-0.0022}$	$0.9639^{+0.0068}_{-0.0072}$	$2.152^{+0.048}_{-0.054}$	$0.685^{+0.010}_{-0.012}$	$10.4^{+1.1}_{-1.0}$	$< 1.1 \cdot 10^{-3}$	< 55	< 0.029
Э-э, $Y \equiv 0$	$2.207^{+0.026}_{-0.027}$	$0.1200^{+0.0019}_{-0.0019}$	$0.9598^{+0.0062}_{-0.0063}$	$2.182^{+0.045}_{-0.051}$	$0.673^{+0.009}_{-0.009}$	$10.1^{+1.0}_{-1.0}$	$< 1.0 \cdot 10^{-2}$	< 427	–
хр, $Y \equiv 0$	$2.212^{+0.027}_{-0.028}$	$0.1191^{+0.0021}_{-0.0020}$	$0.9607^{+0.0067}_{-0.0066}$	$2.161^{+0.053}_{-0.054}$	$0.677^{+0.009}_{-0.011}$	$10.6^{+1.1}_{-1.0}$	$< 1.8 \cdot 10^{-3}$	< 91	–

Таблица 5.2. Средние значения и 68% доверительные интервалы для параметров космологической модели с Лоренц – нарушением. Первая и третья строки соответствуют Эйнштейн – эфир теории, в то время как вторая и четвертая – хронометрической гравитации. Для α , c_χ^2 и Y приводятся верхние пределы на доверительном уровне 95%. Ограничения в первых двух строках были получены с использованием плотностей априорных вероятностей равномерно распределенных в диапазонах (5.7).

нарушения оказались весьма слабо скоррелированы с параметрами Λ CDM модели, но существенно скоррелированы друг с другом. Одномерные и двумерные распределения апостериорной плотности вероятности для ЛН параметров показаны на Рис. 5.6. Обратим внимание на то, что распределения сгущены на нижних границах априорных интервалов пространства параметров, что указывает на отсутствие каких – либо свидетельств в пользу нарушения Лоренцевой симметрии. В частности, параметр Y , контролирующий эффекты ЛН в тёмной материи, ограничен на уровне $Y < 0.03$ в обеих моделях. Отметим, что эти ограничения необходимо рассматривать совместно с априорными интервалами, выбранными в (5.7). Как обсуждалось выше, линейные спектры мощности контраста плотности и анизотропии температуры РИ становятся нечувствительны к ЛН в тёмной материи для малых значений α , при которых масштаб проявления эффектов ЛН в ТМ смещается в нелинейную область. Для исследования области $\alpha < 10^{-5}$ необходимо использовании данных на нелинейных масштабах, что потребует детального изучения соответствующего режима.

Разрешенная область параметров на плоскости $(\log_{10} \alpha, \log_{10} c_\chi^2)$ имеет форму треугольника. Из этого можно заключить, что данные реально ограничивают комбинацию αc_χ^2 , входящую в определение $k_{Y,0}$ (4.69), путем исключения моделей, в которых ускоренный рост структур за счет ЛН в ТМ происходит на линейных масштабах. Отсюда видно, что добавление параметра Y в фит смещает разрешенные значения α и c_χ^2 в меньшую сторону. Таким образом, ограничения полученные для случая ЛН в ТМ неприменимы к случаю $Y = 0$. Чтобы получить ограничения для этого случая, был произведен дополнительный статистический анализ в котором было постулировано условие $Y = 0$. В остальном алгоритм действий

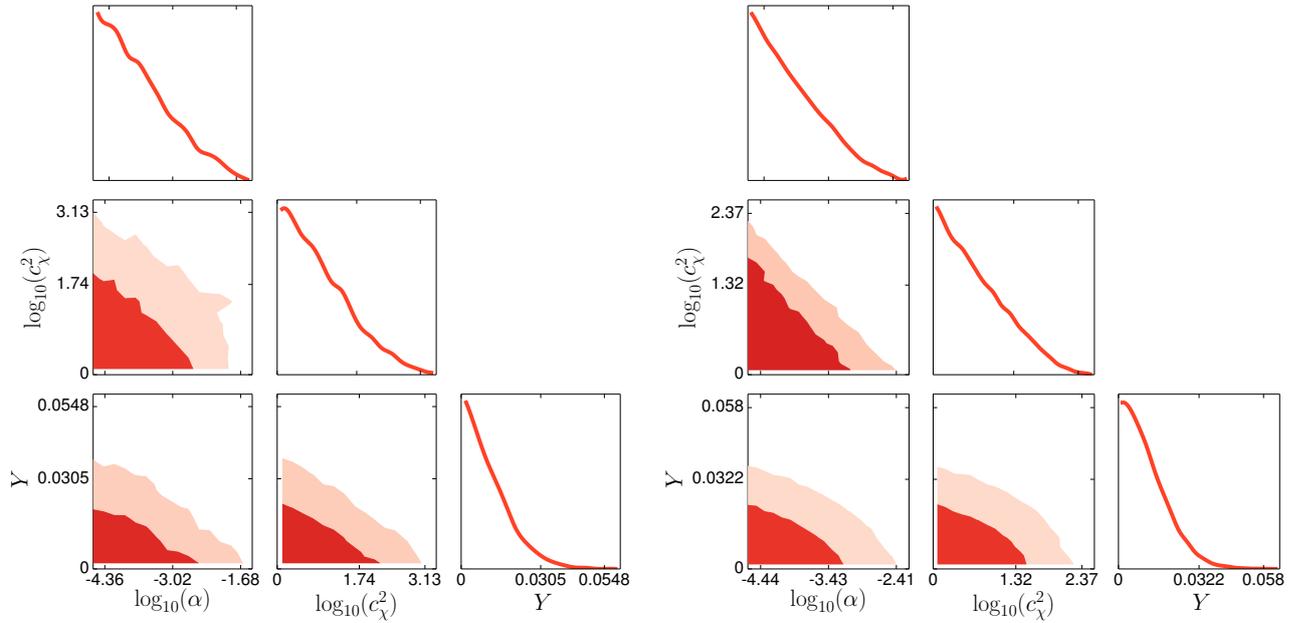


Рис. 5.6. Маргинализованные одномерные распределения плотности апостериорной вероятности и двумерные контуры вероятности (соответствующие 68% и 95% доверительным интервалам) параметров Лоренц – нарушения для Эйнштейн – эфир (левый рисунок) и хронометрической (правый рисунок) моделей.

был аналогичен предыдущему. В процессе поиска распределения плотности апостериорной вероятности были проварьированы 6 стандартных минимальных космологических параметров и вдобавок в них $\log_{10} \alpha$ и $\log_{10} c_\chi^2$. Полученные распределения представлены на Рис. 5.7, в то время как маргинализованные разрешенные интервалы приведены в Таблице 5.2. Заметим, что ограничения на параметры ЛН стали слабее.

Что касается хронометрической модели, то для неё контуры равной плотности вероятности имеют ту же форму, что и контуры в модели с ЛН ТМ, что указывает на то, что ограничиваемой комбинацией опять является αc_χ^2 . Этот факт согласуется с ожиданием того, что наиболее существенным эффектом является усиленная гравитация (разница между G_N и G_{cos}). Накладывая ППН – ограничение (2.16) получаем

$$\Sigma = 2 \left(\frac{G_N}{G_{cos}} - 1 \right) = 3\alpha c_\chi^2. \quad (5.9)$$

Таким образом, полученное ограничение можно перевести в ограничение на разницу между G_N и G_{cos} , которая не может превышать процента. Заметим, что ограничение на параметр α полученный в данной работе в 50 раз сильнее тех, что были получены в [108] ($\alpha < 0.1$). Это было достигнуто, в основном, за счет ограничения пространства параметров путем наложения условия отсутствия черенковского излучения, $c_\chi^2 \geq 1$. Другим источником улучшения

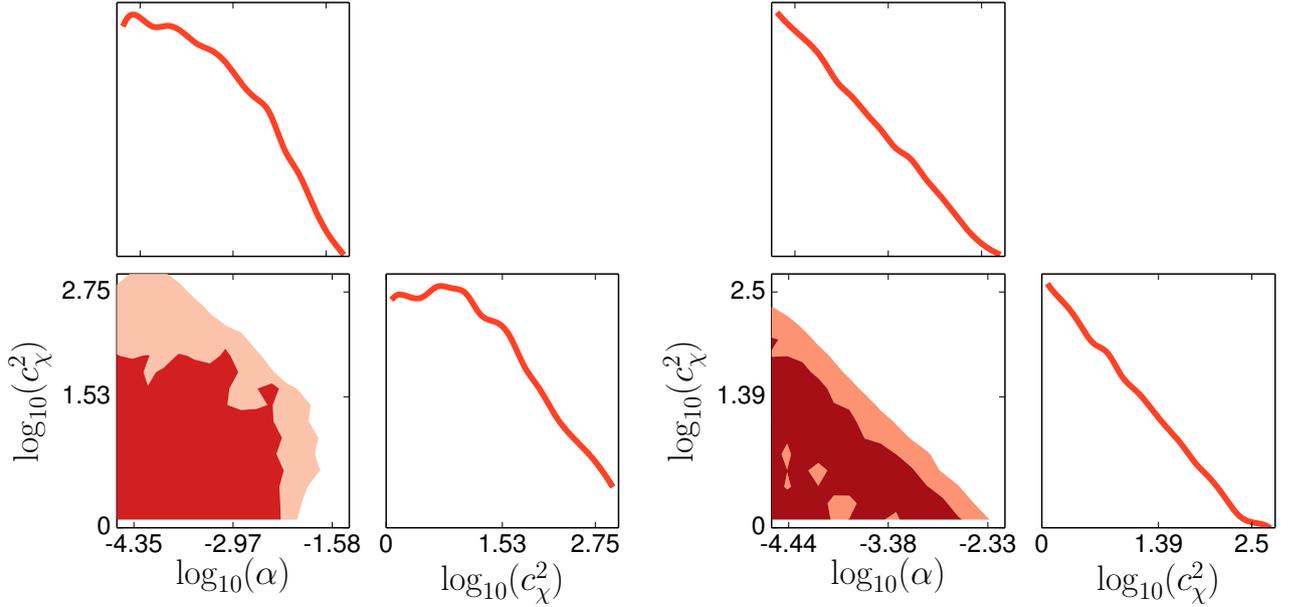


Рис. 5.7. Маргинализованные одномерные распределения плотности апостериорной вероятности и двумерные контуры вероятности (соответствующие 68% и 95% доверительным интервалам) параметров Лоренц-нарушения в случае Лоренц-инвариантной тёмной материи ($Y \equiv 0$) для Эйнштейн-эфир (левый рисунок) и хронометрической (правый рисунок) моделей.

стало использование новых данных по анизотропии реликтового излучения («Планк» в этой работе вместо WMAP 7 и SPT в [108]).

В случае Эйнштейн – эфир гравитации ограничения на α и c_χ^2 (см. Рис. 5.7, слева), оказались существенно слабее, чем для хронометрической модели. Это является следствием того, что при наложении ППН – ограничения (2.18), эффект усиленной гравитации исчезает, так что единственным ограничиваемым эффектом становится анизотропное натяжение эфира. Этот эффект контролируется параметром $\beta = \alpha(1 + 3c_\chi^2)/2$ и сам по себе не приводит к резким изменениям в наблюдаемых, что объясняет незначительные ограничения на соответствующие параметры. Заметим, что итоговые ограничения в этом случае, тем не менее, оказались на одном уровне с астрофизическими, полученными из наблюдений двойных пульсаров (см. обсуждение раздела 2.1).

5.3. Заключение к главе

В этой главе данные космологических наблюдений были использованы для получения ограничений на модели с нарушением лоренцевой симметрии в гравитации и тёмной материи. Как было показано в предыдущей главе, фоновая эволюция в таких моделях не

отличима от стандартной Λ CDM космологии, однако нетривиальные эффекты появляются на уровне космологических возмущений. Был проведен детальный численный анализ этих эффектов и их влияния на наблюдаемые: спектры мощности возмущений плотности и анизотропии температуры реликтового излучения. Затем эти эффекты были ограничены посредством анализа Монте–Карло по схеме марковской цепи. Анализ был проведен как для случая ЛН в гравитации и тёмной материи, так и для случая ЛН только в гравитации. Всего было проведено 4 статистических анализа: для Эйнштейн – эфир и хронометрической моделей, с Лоренц – нарушением в тёмной материи и без него. В анализе были использованы ограничения на отсутствие черенковского излучения космическими лучами, что позволило получить сильнейшие ограничения на отклонение от Лоренц – инвариантности в секторе гравитации, варьирующиеся в диапазоне от промилле до процента в зависимости от модели. Были также впервые поставлены прямые ограничения на отклонение от ЛН в секторе тёмной материи, которое не может превышать нескольких процентов.

Еще раз подчеркнем, что вышеописанный результат выведен в рамках предположений об априорном интервале распределения вероятности соответствующих параметров, которые гарантируют то, что интересующие нас эффекты не экранированы на линейных масштабах. Если экранирование всё же имеет место на этих масштабах, то использование реликтового излучения и линейного спектра мощности не позволит поставить каких–либо ограничений на Лоренц–нарушение в тёмной материи. В этой связи будет интересно исследовать вопрос о нелинейной динамике в рассматриваемой модели и возможности поставить новые ограничения не опираясь на космологические наблюдаемые в линейном режиме (в частности, из динамики на масштабах галактик, [140]).

Глава 6

Теория возмущений на временных расслоениях для формирования структур в слабо – нелинейном режиме

Текущие и будущие космологические обзоры предоставят большой объем информации о крупномасштабной структуре Вселенной, в т.ч. об объектах в нелинейном режиме. Статистические свойства крупномасштабной структуры можно будет использовать для уточнения данных об эволюции и составе Вселенной, в т.ч. для улучшения ограничений на первичную негауссовость и свойства гравитации и тёмной материи на малых пространственных масштабах. Получение этой информации, однако, осложнено нелинейными эффектами и требует детального понимания самогравитирующих систем. Наиболее ценным является аналитическое понимание таких систем, для чего в последнее время предпринимается немало усилий. В частности, упомянем еще раз стандартную теорию возмущений (СТВ), которая исторически была первой попыткой систематического описания сгущивания тёмной материи в слабо–нелинейном режиме.

В данной главе будет представлен новый формализм в рамках эйлеровой гидродинамики, который преодолевает отмеченные во Введении недостатки стандартной теории возмущений. Основная идея предложенного метода – изучать непосредственно временную эволюцию функции распределения космологических полей вместо эволюции самих этих полей. Динамика функции распределения описывается уравнением Лиувилля из статистической механики. Для вычисления нелинейных корреляционных функций космологических полей функция распределения раскладывается в ряд теории возмущений относительно гауссовой части. Полученная таким образом теория возмущений аналогична теории возмущений в нелокальной трехмерной евклидовой квантовой теории поля, в которой время играет роль внешнего параметра. Таким образом удастся разделить эволюцию по времени от усреднению по статистическому ансамблю.¹ Предложенный метод был назван *теория возмущений на временных расслоениях* (ТВВР). Будет показано, что он прекрасно подходит для вычисления корреляционных функций полей с одинаковыми красными смещениями, которые

¹ Вообще говоря, имеется ввиду ансамбль вселенных с одинаковыми космологическими параметрами. Однако, в контексте космологических наблюдений используется эргодическая теорема, согласно которой усреднение по ансамблю вселенных эквивалентно пространственному усреднению по различным реализациям случайных космологических полей.

представляют особый интерес с точки зрения наблюдений [39].

Предложенный метод, в принципе, может быть использован в контексте любых динамических уравнений, поэтому особое внимание будет уделено выводу всех результатов в максимально общем виде. Будет показано, что для уравнений идеальной жидкости без давления предложенный метод в фиксированном порядке теории возмущений дает тот же результат, что СТВ. Несмотря на это, мы покажем, что ТВВР имеет очень важное преимущество: ни один элемент диаграммного разложения (пропагатор, вершины), а также ни одна индивидуальная диаграмма не содержит инфракрасных расходимостей. Это свойство связано конкретно с тем фактом, что ТВВР оперирует только одновременными объектами, которые «защищены» от инфракрасных расходимостей принципом эквивалентности. ТВВР, таким образом, представляет собой естественную конструкцию для осуществления инфракрасного пересуммирования – необходимого шага на пути точного описания нелинейной эволюции сахаровских осцилляций. С точки зрения динамики коротковолновых возмущений, ТВВР является естественным фундаментом для формулировки эффективной теории крупномасштабной структуры Вселенной на языке вильсоновской ренормализационной группы в рамках трехмерной евклидовой квантовой теории поля.

6.1. Космологические уравнения движения для идеальной жидкости

В данном разделе будут зафиксированы соглашения в обозначениях и вкратце обсуждены основы стандартной теории возмущений (см. [39, 40] для детального обзора). В общем случае эволюция нерелятивистской гравитационно–взаимодействующей материи в расширяющейся Вселенной описывается системой из уравнения Пуассона и уравнения Власова для функции распределения в фазовом пространстве. Беря моменты функции распределения посредством усреднения по скоростям получается связанная система эволюционных уравнений. Её обрезание на втором моменте ведет к уравнениям непрерывности и Эйлера для безстолкновительной идеальной жидкости,

$$\frac{\partial \delta}{\partial \tau} + \nabla \cdot [(1 + \delta)\mathbf{u}] = 0, \quad (6.1a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + \mathcal{H}\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla\phi, \quad (6.1b)$$

где τ – конформное время, $\delta(\tau, \mathbf{x})$ – поле контраста плотности и $\mathbf{u}(\tau, \mathbf{x})$ – поле пекулярных скоростей. Гравитационный потенциал находится из уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \phi = \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \Omega_m \delta, \quad (6.1c)$$

где $\mathcal{H} = aH$ – конформный параметр Хаббла и Ω_m – зависящая от времени удельная плотность материи во Вселенной. Удобно ввести новую переменную

$$\eta \equiv \log D(\tau),$$

где $D(t)$ – фактор роста в линейной теории. Заметим, что на материально – доминированной стадии $D(\tau) = a(\tau)$. Гравитационное поле является градиентным и не может быть источником вихревой моды скорости, которая затухает в линейном режиме, так что разумно пренебречь ей. Уравнения (6.1) обычно переписываются в Фурье – пространстве,

$$\dot{\delta}_\eta(\mathbf{k}) - \Theta_\eta(\mathbf{k}) = \int [dq]^2 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \alpha(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \Theta_\eta(\mathbf{q}_1) \delta_\eta(\mathbf{q}_2), \quad (6.2a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}_\eta(\mathbf{k}) - \frac{3\Omega_m}{2f^2} \delta_\eta(\mathbf{k}) + \left(\frac{3\Omega_m}{2f^2} - 1 \right) \Theta_\eta(\mathbf{k}) \\ = \int [dq]^2 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \beta(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \Theta_\eta(\mathbf{q}_1) \Theta_\eta(\mathbf{q}_2), \end{aligned} \quad (6.2b)$$

где точкой обозначены частные производные по η , и было введено следующее обозначение для дивергенции скорости

$$\delta_\eta(\mathbf{k}) \equiv \delta(\eta, \mathbf{k}), \quad \Theta_\eta(\mathbf{k}) \equiv -\frac{\nabla \mathbf{u}(\eta, \mathbf{k})}{f(\eta) \mathcal{H}(\eta)} \quad \text{где} \quad f \equiv \frac{d \ln D_+(\eta)}{d \ln a(\eta)}. \quad (6.3)$$

Отметим, что дивергенция скорости шкалирована таким образом, чтобы минимизировать зависимость от η в уравнениях движения. Нелинейные ядра интегральных операторов даны выражениями

$$\alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \equiv \frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{k}_1}{k_1^2}, \quad \beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \equiv \frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{2k_1^2 k_2^2}. \quad (6.4)$$

В дальнейшем мы будем использовать $[dq]^n \equiv d^3 q_1 \cdots d^3 q_n$ для обозначения меры интегрирования.

В материально – доминированной Вселенной (Эйнштейна – де Ситтера) $\Omega_m = f = 1$, так что коэффициенты в уравнениях (6.2) не зависят от времени. В модели Λ CDM отношение Ω_m/f^2 также близко к единице, поэтому мы упростим уравнения (6.2) заменив $\Omega_m/f^2 \mapsto 1$. Как показано в работе [141] (см. также [39]), ошибка, которая совершается таким образом, меньше 1% на красном смещении ноль ($z = 0$) и меньше 0.1% при $z = 1$ для

всего интересующего нас диапазона масштабов. Таким образом, данная замена дает весьма хорошее приближение к точной динамике, а отклонение Ω_m/f^2 от 1 можно легко учесть по теории возмущений. Несмотря на некоторый каламбур, уравнения (6.2) с $\Omega_m/f^2 = 1$ в литературе называются уравнениями «точной динамики» (ТД), и мы также будем придерживаться этой терминологии.

В дальнейшем мы рассмотрим приближение Зельдовича (ПЗ), которое можно получить заменив δ в (6.2b) на Θ . В данном случае (6.2b) превращается в замкнутое уравнение на Θ . Несмотря на то, что приближение Зельдовича точно решаемое, т.е. можно получить явное выражение для нелинейных корреляционных функций и без теории возмущений, ввиду исключительной простоты, для нас оно будет играть роль «испытательного полигона» при тестировании пертурбативных методов. Важно заметить, что ПЗ правильно учитывает эффекты крупномасштабных потоков, поэтому инфракрасная (ИК) структура ПЗ совпадает с аналогичной структурой точной динамики [41]. Стоит отметить, что в других режимах (напр. малые масштабы) свойства ПЗ и ТД существенно отличаются.

6.2. Теория возмущений на временных расслоениях

6.2.1. Предварительные замечания

В этом разделе мы разовьем формализм ТВВР для динамического уравнения общего типа, вне зависимости от динамики жидкости. Рассмотрим одиночную полевою переменную, которую, чтобы «не плодить лишние сущности», мы обозначим той же буквой Θ , что и дивергенцию скорости. Предположим, что динамика этого поля задается общим уравнением вида

$$\dot{\Theta}_\eta(\mathbf{k}) = \mathcal{I}[\Theta_\eta; \eta, \mathbf{k}], \quad (6.5)$$

где в правая часть может быть разложена в ряд Тейлора по полю Θ ,

$$\mathcal{I}[\Theta_\eta; \eta, \mathbf{k}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int [dq]^n I_n(\eta; \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \delta^{(3)}\left(\mathbf{k} - \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i\right) \prod_{j=1}^n \Theta_\eta(\mathbf{q}_j). \quad (6.6)$$

δ - функция Дирака в этом уравнении выражает закон сохранения импульса, который, как мы предполагаем, выполняется в рассматриваемой системе. Предположим также что система инвариантна относительно отражения координат

$$I_m(\eta; \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m) = I_m(\eta; -\mathbf{q}_1, \dots, -\mathbf{q}_m). \quad (6.7)$$

Второй ключевой ингредиент нашего метода – начальная функция распределения во время η_0 , выбранного глубокого в линейном режиме. Для простоты предположим, что эта

функция гауссова. В контексте крупномасштабной структуры Вселенной это является достаточно аккуратным приближением, прекрасно согласующимся с данными спутника «Планк» [38]. Мы вкратце обсудим в следующем разделе как включить в рассмотрение первичную негауссовость. Согласно нашему предположению, корреляционные функции поля Θ_η определяются следующим производящим функционалом [142, 143],

$$Z[J; \eta] = \mathcal{N}^{-1} \int [\mathcal{D}\Theta_{\eta_0}] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int [dk] \frac{\Theta_{\eta_0}(\mathbf{k})\Theta_{\eta_0}(-\mathbf{k})}{P_{\eta_0}(|\mathbf{k}|)} + \int [dk] \Theta_\eta(\mathbf{k})J(-\mathbf{k}) \right\}, \quad (6.8)$$

где

$$\mathcal{N} = \int [\mathcal{D}\Theta_{\eta_0}] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int [dk] \frac{\Theta_{\eta_0}(\mathbf{k})\Theta_{\eta_0}(-\mathbf{k})}{P_{\eta_0}(|\mathbf{k}|)} \right\}, \quad (6.9)$$

– нормировочный множитель.

Отметим, что функциональное интегрирование должно быть выполнено по всем возможным состояниям поля в начальный момент времени, в то время как источник J множится на поле в конечный момент времени. Мы явно учли статистическую однородность и изотропию постулируя то, что гауссово начальное распределение определяется спектром мощности $P_{\eta_0}(|\mathbf{k}|)$, который зависит только от абсолютного значения импульса. Корреляционные функции полей в одинаковые моменты времени (в дальнейшем, одновременные корреляционные функции) получаются варьированием $Z[J; \eta]$ по источнику с последующей подстановкой $J = 0$ в конечном выражение,

$$\langle \Theta_\eta(\mathbf{k}_1) \dots \Theta_\eta(\mathbf{k}_n) \rangle = \frac{\delta^n Z[J; \eta]}{\delta J(-\mathbf{k}_1) \dots \delta J(-\mathbf{k}_n)} \Big|_{J=0}. \quad (6.10)$$

В частности, для двухточечной корреляционной функции имеем,

$$\langle \Theta_{\eta_0}(\mathbf{k}_1)\Theta_{\eta_0}(\mathbf{k}_2) \rangle = \frac{\delta^2 Z[J; \eta_0]}{\delta J(-\mathbf{k}_1)\delta J(-\mathbf{k}_2)} \Big|_{J=0} = P_{\eta_0}(|\mathbf{k}_1|)\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2). \quad (6.11)$$

В СТВ эволюционные уравнения (6.5) решаются итеративно и поле в фиксированный момент времени раскладывается в ряд Тейлора по степеням начального поля $\Theta_{\eta_0}(k)$. Мы предлагаем альтернативную процедуру. Если мы заинтересованы только в корреляционных функциях поля в конечный момент времени, кажется естественным использовать именно их как основные элементы анализа. Чтобы это сделать, заменяем переменную интегрирования в (6.8) на поле в момент времени η , которое определяет зависящую от времени функцию распределения $\mathcal{P}[\Theta_\eta; \eta]$,

$$Z[J; \eta] = \int [\mathcal{D}\Theta_\eta] \mathcal{P}[\Theta_\eta; \eta] \exp \left\{ \int [dk] \Theta_\eta(\mathbf{k})J(-\mathbf{k}) \right\}. \quad (6.12)$$

Уравнение, которое определяет эволюцию \mathcal{P} – это классическое уравнение Лиувилля, в котором в роли статистических переменных выступают значения поля для волновых чисел \mathbf{k} . Для системы, подчиняющейся уравнению (6.5), оно принимает вид,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \mathcal{P}[\Theta_\eta; \eta] + \int [dk] \frac{\delta}{\delta \Theta_\eta(\mathbf{k})} \left(\mathcal{I}[\Theta_\eta; \eta, \mathbf{k}] \mathcal{P}[\Theta_\eta; \eta] \right) = 0. \quad (6.13)$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение непрерывности для плотности вероятности. Его можно вывести делая замену переменной интегрирования в функциональном интеграле (6.12) на поле в момент времени $\eta + \delta\eta$, последовательно беря предел $\delta\eta \rightarrow 0$ и требуя инвариантности производящего функционала при такой замене переменной. В следующем разделе будет выведена цепочка уравнений для решения (6.13). Как только функционал \mathcal{P} найден, его можно использовать для получения корреляционных функций используя (6.12). Таким образом удастся отделить эволюцию по времени от статистического усреднения. В дальнейшем индекс « η » поля Θ будет опущен, если это поле является аргументом производящего функционала.

6.2.2. Вершины

Мы ищем решение уравнения (6.12) в форме,

$$\mathcal{P}[\Theta; \eta] = \mathcal{N}^{-1} \exp \{ - \Gamma[\Theta; \eta] \}. \quad (6.14)$$

В духе теории возмущений естественно разложить статистический вес Γ в ряд по степеням поля Θ ,

$$\Gamma[\Theta; \eta] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int [dk]^n \Gamma_n^{\text{полн}}(\eta; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \prod_{j=1}^n \Theta(\mathbf{k}_j). \quad (6.15)$$

Подставляя это разложение в (6.13), используя (6.6) и требуя чтобы коэффициенты перед одинаковыми степенями Θ занулялись, получаем

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_n^{\text{полн}}(\eta; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!(n-m)!} \\ \times \sum_{\sigma} I_m(\eta; \mathbf{k}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{k}_{\sigma(m)}) \Gamma_{n-m+1}^{\text{полн}} \left(\eta; \sum_{l=1}^m \mathbf{k}_{\sigma(l)}, \mathbf{k}_{\sigma(m+1)}, \dots, \mathbf{k}_{\sigma(n)} \right) \\ = \delta^{(3)} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i \right) \int [dp] I_{n+1}(\eta; \mathbf{p}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n), \end{aligned} \quad (6.16)$$

где во втором члене в левой части сумма берется по всем перестановкам σ n индексов. Отметим, что по конструкции I_n , $\Gamma_n^{\text{полн}}$ – симметричные функции импульсов, и поэтому

члены полученные перестановками первых m или последних $(n - m)$ импульсов совпадают. Другими словами, число независимых членов в сумме по σ вместо наивно ожидаемого $n!$ равно биномиальному коэффициенту $\binom{n}{m}$. Цепочка уравнений (6.16) похожа на цепочку Боголюбова, которая возникает в стандартном рассмотрении крупномасштабной структуры Вселенной [32]. Ключевое отличие состоит в том, что в нашем случае $n - e$ уравнение цепочки зависит лишь от вершин $\Gamma_m^{\text{полн}}$ с $m \leq n$, и поэтому уравнения цепочки можно решить точно. В противоположность этому уравнение цепочки Боголюбова для $n - e$ точечной функции зависит от корреляторов старшего порядка и поэтому цепочка не может быть «распутана», для её решения необходимо обрезать иерархию на некотором шаге, что неизбежно приводит к ошибкам.

В разделе 6.3 будет показано, что для динамических уравнений описывающих динамику КСВ, интегралы по импульсам появляющиеся в правой части (6.16) расходятся в ультрафиолетовой области. В связи с этим удобно разложить $\Gamma_n^{\text{полн}}$ на регулярную часть Γ_n и сингулярный «контрчлен» C_n ,

$$\Gamma_n^{\text{полн}} = \Gamma_n + C_n. \quad (6.17)$$

Вершинные функции Γ_n удовлетворяют (6.16) без источника в правой части и имеют начальные условия, отражающие свойства первичных возмущений. Вершины C_n удовлетворяют тривиальным начальным условиям и их источником является расходящаяся правая часть уравнения (6.16). Как мы вскоре увидим, они сокращают определенные ультрафиолетовые расходимости в диаграммном разложении, основанном на (6.12), так что имя «контрчлен» для них вполне оправдано. Данные расходимости вытекают из сингулярного якобиана замены переменной интегрирования в функциональном интеграле при переходе от (6.8) к (6.12).

В дальнейшем мы будем полагать, что интегральные ядра I_n не зависят от времени. Как было аргументировано в разделе 6.1, это действительно очень хорошее приближение для динамики крупномасштабной структуры Вселенной. Кроме прочего, мы полагаем

$$I_1 = 1, \quad (6.18)$$

из чего следует, что решение линеаризованного уравнения (6.5) растет со временем как e^{η} однородно для всех импульсов. Это условие справедливо для идеальной безстолкновительной жидкости.²

² Зависимость от масштаба появляется за рамками идеальной жидкости [34, 144].

Рассмотрим вершины Γ_n . Легко увидеть, что вершину Γ_1 можно положить равной 0 для всех времен, что соответствует равной нулю одноточечной корреляционной функции $\langle \Theta_\eta \rangle = 0$. Для $n \geq 2$ используем следующий анзац,

$$\Gamma_n(\eta; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \sum_{l=2}^n e^{-l\eta} \Gamma_n^{(l)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n). \quad (6.19)$$

Подставляя его в (6.16) с равной нулю правой частью, получаем следующую цепочку уравнений

$$\begin{aligned} \Gamma_n^{(l)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) &= -\frac{1}{n-l} \sum_{m=2}^{n-l+1} \frac{1}{m!(n-m)!} \\ &\times \sum_{\sigma} I_m(\mathbf{k}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{k}_{\sigma(m)}) \Gamma_{n-m+1}^{(l)} \left(\sum_{i=1}^m \mathbf{k}_{\sigma(i)}, \mathbf{k}_{\sigma(m+1)}, \dots, \mathbf{k}_{\sigma(n)} \right), \end{aligned} \quad (6.20)$$

для $2 \leq l < n$, при этом $\Gamma_n^{(n)}$ должна быть фиксирована из начальных условий для Γ_n . Чтобы упростить формулы, удобно положить начальное время η_0 равным $-\infty$. Получаем

$$\Gamma_n^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \lim_{\eta_0 \rightarrow -\infty} e^{n\eta_0} \Gamma_n(\eta_0; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n). \quad (6.21)$$

Решение (6.19) существенно упрощается для гауссовых начальных условий. Согласно (6.21), начальные данные в этом случае равны,

$$\Gamma_2^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)}{\bar{P}(|\mathbf{k}_1|)}, \quad (6.22a)$$

$$\Gamma_n^{(n)} = 0, \quad n > 2. \quad (6.22b)$$

В данной формуле

$$\bar{P}(|\mathbf{k}|) \equiv \lim_{\eta_0 \rightarrow -\infty} e^{-2\eta_0} P_{\eta_0}(|\mathbf{k}|) \quad (6.23)$$

является определенным нужным образом спектром мощности. Из (6.20) находим, что все $\Gamma_n^{(l)}$ с $l > 2$ исчезают, что даёт решение

$$\Gamma_n(\eta; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = e^{-2\eta} \bar{\Gamma}_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n), \quad (6.24a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) &= -\frac{1}{n-2} \sum_{m=2}^{n-1} \frac{1}{m!(n-m)!} \\ &\times \sum_{\sigma} I_m(\mathbf{k}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{k}_{\sigma(m)}) \bar{\Gamma}_{n-m+1} \left(\sum_{i=1}^m \mathbf{k}_{\sigma(i)}, \mathbf{k}_{\sigma(m+1)}, \dots, \mathbf{k}_{\sigma(n)} \right), \end{aligned} \quad (6.24b)$$

где было введено обозначение $\bar{\Gamma}_n \equiv \Gamma_n^{(2)}$. Отметим, что все вершины пропорциональны множителю $e^{-2\eta}$. Отсюда следует, что зависимость от времени факторизуется в регулярной

части статистического веса³ (6.15). Удобно записать её в форме

$$\Gamma^{reg}[\Theta; \eta] = \frac{1}{g^2(\eta)} \bar{\Gamma}[\Theta], \quad (6.25)$$

где

$$g(\eta) \equiv e^\eta \quad (6.26)$$

и $\bar{\Gamma}[\Theta]$ не зависит от времени. Из этого выражения следует, что g играет роль константы связи, контролирующей пертурбативное разложение производящего функционала (6.12). Отметим, что g растет со временем, так что условие применимости теории возмущений нарушается на поздних временах, что и ожидается в задаче о гравитационном сгущивании. Наличие бесконечного количества вершин взаимодействий не является проблемой, так как с практической точки зрения, вычисления до заданного порядка теории возмущений требуют знания конечного количества вершин. Эти вершины могут быть легко найдены из рекурсивных соотношений (6.24b) используя в качестве затравки двухточечную корреляционную функцию $\bar{\Gamma}_2$ из (6.22a). Для примера выпишем вершины, необходимые для однопетлевого вычисления

$$\bar{\Gamma}_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = -\delta^{(3)}\left(\sum \mathbf{k}_i\right) \left[\frac{I_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{\bar{P}(|\mathbf{k}_3|)} + \text{перест.} \right], \quad (6.27a)$$

$$\bar{\Gamma}_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = \delta^{(3)}\left(\sum \mathbf{k}_i\right) \left\{ \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} I_2(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j) \left[\frac{I_2(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j, \mathbf{k}_l)}{\bar{P}(|\mathbf{k}_m|)} + \text{перест.} \right] \right\}_{\substack{l < m \\ l, m \neq i, j}} - \frac{1}{2} \left[\frac{I_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)}{\bar{P}(|\mathbf{k}_4|)} + \text{перест.} \right], \quad (6.27b)$$

где «перест.» обозначает вклады отличающиеся от первого члена в скобках циклическими перестановками импульсов.

Вполне очевидно, как обобщить рассматриваемый формализм на случай первичной негауссовости. При наличии первичного биспектра вершина $\Gamma_3^{(3)}$ отлична от нуля. Через уравнения (6.20) эта вершина даст вклады во все корреляторы с $n \geq 4$. Отметим, что эти вклады будут меняться со временем как $e^{-3\eta}$, и таким образом будут сублидирующими в сравнении с вкладом в вершины, вызванными нелинейной эволюцией, которые масштабируются как $e^{-2\eta}$. Для простоты, в дальнейшем будет рассмотрен только случай гауссовых начальных условий.

Рассмотрим теперь контрчлены C_n . Из уравнения (6.16) в пределе $\eta_0 \rightarrow -\infty$ получаем,

³ Зависимость от времени контрчленов C_n другая, см. (6.28).

что они не зависят от времени и определяется рекурсивно,

$$C_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \frac{1}{n} \left[\delta^{(3)} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i \right) \int [dq] I_{n+1}(\mathbf{q}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \right. \\ \left. - \sum_{m=2}^n \frac{1}{m!(n-m)!} \sum_{\sigma} I_m(\mathbf{k}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{k}_{\sigma(m)}) C_{n-m+1} \left(\sum_{l=1}^m \mathbf{k}_{\sigma(l)}, \mathbf{k}_{\sigma(m+1)}, \dots, \mathbf{k}_{\sigma(n)} \right) \right], \quad (6.28)$$

где⁴ $n \geq 1$, а для $n = 1$ член с суммой отсутствует. Сравнивая это выражение с «древесным» статистическим весом (6.25) убеждаемся, что контрчлен подавлен двумя степенями константы связи $g(\eta)$. Это совпадает с подавлением, ожидаемым для однопетлевого вклада, что еще раз указывает то, что члены с C_n должны быть учтены в петлевом разложении. Для полноты, выпишем явно первые контрчлены полученные из рекурсивного соотношения (6.28)

$$C_1(\mathbf{k}) = \delta^{(3)}(\mathbf{k}) \int [dq] I_2(\mathbf{q}, \mathbf{k}), \quad (6.29a)$$

$$C_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{1}{2} \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \int [dq] \left(I_3(\mathbf{q}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) - I_2(\mathbf{q}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) I_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \right). \quad (6.29b)$$

Из статистической однородности следует, что все вершины пропорциональны дельта – функции от суммы импульсов, являющимися их аргументами. Мы будем использовать штрих чтобы обозначать величины без дельта – функций,

$$\bar{\Gamma}_n = \bar{\Gamma}'_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \delta^{(3)} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i \right), \quad C_n = C'_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \delta^{(3)} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i \right). \quad (6.30)$$

6.2.3. Теория возмущений

В текущем разделе мы вычислим корреляционные функции раскладывая производящий функционал (6.12) в ряд теории возмущений по константе связи $g(\eta)$. Так как $g(\eta)$ появляется во всех выражениях умноженной на линейный спектр мощности $\bar{P}(|\mathbf{k}|)$, разложение по g^2 эквивалентно разложению по начальному спектру мощности, используемому в СТВ. Таким образом, оба разложения должны совпадать при вычислении корреляционных функций в заданном порядке теории возмущений. Разложим $\bar{\Gamma}[\Theta]$ возле гауссовой части,

$$Z[J; \eta] = \mathcal{N}^{-1} \int [\mathcal{D}\Theta] \exp \left\{ - \frac{1}{g^2(\eta)} \sum_{n=2}^{\infty} \int \frac{[dk]^n}{n!} \bar{\Gamma}_n \prod_{j=1}^n \Theta(\mathbf{k}_j) \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{[dk]^n}{n!} C_n \prod_{j=1}^n \Theta(\mathbf{k}_j) + \int [dk] \Theta(\mathbf{k}) J(-\mathbf{k}) \right\} \quad (6.31) \\ = \exp \left\{ - \frac{1}{g^2(\eta)} \sum_{n=3}^{\infty} \int \frac{[dk]^n}{n!} \bar{\Gamma}_n \prod_{j=1}^n \frac{\delta}{\delta J(-\mathbf{k}_j)} - \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{[dk]^n}{n!} C_n \prod_{j=1}^n \frac{\delta}{\delta J(-\mathbf{k}_j)} \right\} Z^{(2)}[J; \eta],$$

⁴ Контрчлен C_0 – постоянная, которая сокращается нормировкой функции распределения.

$$\begin{array}{l}
\text{--- } \mathbf{k} \text{ ---} = g^2(\eta) \bar{P}(|\mathbf{k}|), \\
\begin{array}{l} \diagup \mathbf{k}_2 \\ \text{--- } \mathbf{k}_3 \text{ ---} \\ \diagdown \mathbf{k}_1 \end{array} = -g^{-2}(\eta) \frac{\bar{\Gamma}_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)}{3!}, \quad \times \text{--- } \mathbf{k} \text{ ---} = -C_1(\mathbf{k}), \\
\begin{array}{l} \diagdown \mathbf{k}_3 \\ \text{--- } \mathbf{k}_2 \text{ ---} \\ \diagup \mathbf{k}_4 \\ \text{--- } \mathbf{k}_1 \text{ ---} \end{array} = -g^{-2}(\eta) \frac{\bar{\Gamma}_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)}{4!}, \quad \text{--- } \mathbf{k}_1 \text{ ---} \times \text{--- } \mathbf{k}_2 \text{ ---} = -\frac{C_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{2}
\end{array}$$

Рис. 6.1. Примеры правил Фейнмана для ТВВР.

где

$$Z^{(2)}[J; \eta] = \mathcal{N}^{-1} \exp \left\{ \frac{g^2(\eta)}{2} \int [dk] \bar{P}(|\mathbf{k}|) J(\mathbf{k}) J(-\mathbf{k}) \right\} \quad (6.32)$$

– гауссов вес. Разложение экспоненты (6.31) в ряд Тейлора и последующее использование теоремы Вика приводит к Фейнмановским диаграммам с пропагатором $g^2 \bar{P}(|\mathbf{k}|)$, вершинами $\bar{\Gamma}_n/g^2$, $n \geq 3$ и контрчленами C_n , $n \geq 1$. Элементы, возникающие в первом порядке по теории возмущений показаны на Рис. 6.1. Данные Фейнмановские правила аналогичны тем, что возникают в трехмерной евклидовой квантовой теории скалярного поля. При этом стоит заметить, что в отличие от обыкновенной перенормируемой локальной квантовой теории поля (КТП), ТВВР содержит вершины с произвольным количеством выходящих «ног» и эти вершины имеют нетривиальную зависимость от импульсов. Это свойство указывает на то, что в координатном пространстве теория нелокальна. Эта нелокальность не создает каких-либо принципиальных проблем и присутствует также в стандартной теории возмущений. В отличие от СТВ, время не «бежит» вдоль диаграммных элементов, а зависимость от времени для каждой диаграммы уже учтена в константах связи.

Рассмотрим 3-х и 4-х точечные корреляционные функции в древесном приближении.

Используя диаграммы из Рис. 6.1 получим,

$$\langle \Theta_\eta(\mathbf{k}_1)\Theta_\eta(\mathbf{k}_2)\Theta_\eta(\mathbf{k}_3) \rangle^{\text{древ}} = \text{---} \text{---} \text{---} = -g^4(\eta) \prod_{i=1}^3 \bar{P}(|\mathbf{k}_i|) \bar{\Gamma}_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3), \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned} \langle \Theta_\eta(\mathbf{k}_1)\Theta_\eta(\mathbf{k}_2)\Theta_\eta(\mathbf{k}_3)\Theta_\eta(\mathbf{k}_4) \rangle^{\text{древ}} &= \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ &= g^6(\eta) \prod_{i=1}^4 \bar{P}(|\mathbf{k}_i|) \left[-\bar{\Gamma}_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \right. \\ &\quad \left. + \delta^{(3)}\left(\sum_{j=1}^4 \mathbf{k}_j\right) \left(\bar{\Gamma}'_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \bar{P}(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|) \bar{\Gamma}'_3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) + \text{перест.} \right) \right], \quad (6.34) \end{aligned}$$

где «перест.» обозначает члены, полученные перестановкой $\mathbf{k}_2 \leftrightarrow \mathbf{k}_3$ и $\mathbf{k}_2 \leftrightarrow \mathbf{k}_4$. Мы видим, что $\bar{\Gamma}_n$ являются одночастично-неприводимыми (связанными) вкладками в древесные корреляционные функции с «ампутированными» внешними пропагаторами.

Как отмечалось выше, контрчлены C_n имеют тот же порядок по g , что и 1-петлевые вклады. Чтобы понять их роль, рассмотрим 1-петлевую поправку к одноточечной корреляционной функции,

$$\begin{aligned} \langle \Theta_\eta(\mathbf{k}) \rangle &= \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \\ &= -g^2(\eta) \bar{P}(|\mathbf{k}|) \delta^{(3)}(\mathbf{k}) \left[\frac{1}{2} \int [dq] \bar{\Gamma}'_3(\mathbf{k}, \mathbf{q}, -\mathbf{q}) \bar{P}(|\mathbf{q}|) + C'_1(\mathbf{k}) \right]. \quad (6.35) \end{aligned}$$

Используя выражения (6.27a) и (6.29a) для $\bar{\Gamma}'_3$ и C'_1 , находим, что комбинация в квадратных скобках равна нулю если $I_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) = 0$. Это условие справедливо как для точной динамики, так и для приближения Зельдовича (см. (6.43b), (6.50b), (6.52b)). Заключаем, что C_1 сокращает нефизические графы типа *головастик*. В общем случае можно убедиться, что C_n сокращают другие УФ – расходящиеся 1-петлевые вклады, таким образом, что конечное выражение совпадает с результатом СТВ. На диаграммном языке

$$P_{\Theta\Theta}^{1\text{-петл}}(\eta; |\mathbf{k}|) = \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{\bar{\Gamma}_3}{\mathbf{k}} \text{---} \text{---} \text{---} \frac{\bar{\Gamma}_3}{\mathbf{k}} + \frac{C_2}{\mathbf{k}} \text{---} \text{---} \text{---} \frac{C_2}{\mathbf{k}} \quad (6.36)$$

Используя (6.27) и (6.29) можно явно показать, что полный результат для $P_{\Theta\Theta}^{1\text{-петл}}$ в ТВВР совпадает с выражением, полученным в рамках СТВ, хотя индивидуальные диаграммы,

входящие в (6.36) разительно отличаются от индивидуальных диаграмм СТВ. В частности, диаграммы *лепесток* (первая диаграмма слева в (6.36)) и *рыба* (вторая диаграмма слева в (6.36)) содержат дополнительные УФ расходимости, отсутствующие в СТВ. Некоторые из них сокращаются между *лепестком* и *рыбой*, в то время как остальные сокращаются контрчленом C_2 . Появление дополнительных УФ расходимостей не стоит рассматривать как недостаток метода, так как описание КСВ в рамках идеальной жидкости всё равно требует ультрафиолетовой перенормировки (см. Введение). Что касается ИК вкладов, в отличие от СТВ все петлевые диаграммы фигурирующие в (6.36) явно ИК – конечны. В разделе 6.4 будет показано, что это свойство является общим для всех элементов пертурбативного разложения ТВВР.

Чтобы избежать путаницы, еще раз отметим, что хотя C_n и действуют как контрчлены, они отличаются от обычных контрчленов КТП тем, что их значение не определяется из каких – либо *ad-hoc* принципов. Эти контрчлены полностью фиксированы решением уравнения Лиувилля. Они необходимы для того, чтобы воспроизвести результаты СТВ для случая идеальной жидкости. Последующая УФ перенормировка теории потребует введения дополнительных контрчленов для описания физических эффектов коротковолновых мод.

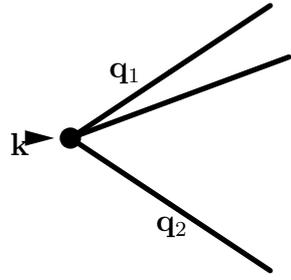
6.2.4. Больше одного поля

До сих пор мы работали исключительно в терминах одного поля. В задаче о формировании крупномасштабной структуры Вселенной всегда фигурирует как минимум два поля – дивергенция пекулярных скоростей Θ_η и контраст плотности δ_η . Начальные условия для этих двух полей совпадают: они соответствуют адиабатической линейной растущей моде. Это означает, что только одно из двух полей статистически независимо и может быть использовано как аргумент функции распределения вероятности. В предыдущих разделах этим полем была выбрана дивергенция скорости. Контраст плотности при этом должен быть выражен через Θ_η используя уравнения движения. В духе теории возмущений эта связь может быть представлена в виде ряда Тейлора,

$$\delta_\eta(\mathbf{k}) \equiv \delta[\Theta_\eta; \eta, \mathbf{k}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int [dq]^n K_n(\eta; \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \delta^{(3)}\left(\mathbf{k} - \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i\right) \prod_{j=1}^n \Theta_\eta(\mathbf{q}_j). \quad (6.37)$$

В следующем разделе ядра K_n будут явно получены из уравнений гидродинамики.

Чтобы вычислить корреляторы, содержащие контраст плотности, обобщаем произво-



$$= \frac{K_n(\eta; \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)}{n!} \delta^{(3)}\left(\mathbf{k} - \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i\right)$$

Рис. 6.2. Вершины, появляющиеся в разложении составного оператора δ .

дящий функционал включением источника J_δ взаимодействующего с δ_η ,

$$Z[J, J_\delta; \eta] = \mathcal{N}^{-1} \int [\mathcal{D}\Theta] \exp \left\{ -\Gamma[\Theta; \eta] + \int [dk] \Theta(\mathbf{k}) J(-\mathbf{k}) + \int [dk] \delta[\Theta; \eta, \mathbf{k}] J_\delta(-\mathbf{k}) \right\}. \quad (6.38)$$

Отметим, что источники J и J_δ входят в производящий функционал разным образом. В то время как J умножается непосредственно на «элементарное» поле Θ , J_δ умножается на ряд по Θ^n . На языке КТП поле δ должно быть интерпретировано как составной оператор. Вариация (6.38) по J_δ приводит к появлению новых вершин с несколькими «ногами», которые будут обозначены толстой точкой со стрелочкой, указывающей на направление «втекания» импульса «в» или «из вершины», см. Рис. 6.2.

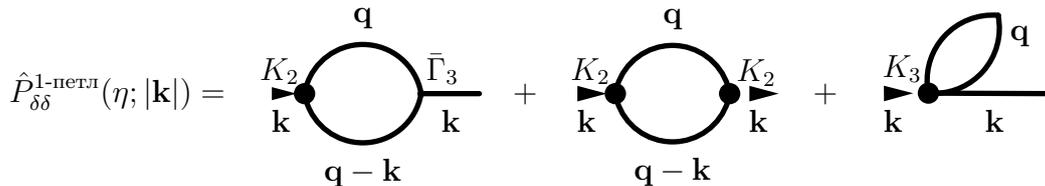
Проиллюстрируем это на спектре мощности для поля плотности,

$$\langle \delta_\eta(\mathbf{k}) \delta_\eta(\mathbf{k}') \rangle = \frac{\delta^2 Z[J, J_\delta; \eta]}{\delta J_\delta(-\mathbf{k}) \delta J_\delta(-\mathbf{k}')} \Big|_{J, J_\delta=0}. \quad (6.39)$$

Мы положили $K_1 = 1$, что соответствует равенству между δ_η и Θ_η в линейном режиме, что в свою очередь является следствием адиабатических начальных условий. Таким образом, спектр мощности δ в фиксированном порядке петлевого разложения равен спектру мощности Θ плюс несколько новых диаграмм, содержащих составные операторы Рис. 6.2 с $n \geq 2$. В частности, в однопетлевом приближении

$$P_{\delta\delta}^{1\text{-петл}}(\eta; |\mathbf{k}|) = P_{\Theta\Theta}^{1\text{-петл}}(\eta; |\mathbf{k}|) + \hat{P}_{\delta\delta}^{1\text{-петл}}(\eta; |\mathbf{k}|), \quad (6.40)$$

где $P_{\Theta\Theta}^{1\text{-петл}}$ дано в (6.36), а дополнительный вклад содержит три диаграммы



$$\hat{P}_{\delta\delta}^{1\text{-петл}}(\eta; |\mathbf{k}|) = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \quad (6.41)$$

Аналогично случаю Θ , можно показать, что в общем случае $P_{\delta\delta}^{1\text{-loop}}$ совпадает с однопетлевым спектром мощности материи в СТВ.

6.3. Приложения к приближению Зельдовича и точной динамике

В этом разделе мы применим общий формализм, описанный выше, к тёмной материи. Будут рассмотрены приближение Зельдовича (ПЗ) и точная динамика (ТД).

6.3.1. Приближение Зельдовича

В приближении Зельдовича уравнение Эйлера (6.2b) изменено посредством постулирования линейного соотношения между δ и Θ на нелинейном уровне. А именно, делаем замену $\delta = \Theta$ в левой части уравнения (6.2b), что позволяет полностью исключить поле плотности,

$$\dot{\Theta}_\eta(\mathbf{k}) - \Theta_\eta(\mathbf{k}) = \int [dq]^2 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \beta(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \Theta_\eta(\mathbf{q}_1) \Theta_\eta(\mathbf{q}_2). \quad (6.42)$$

Сравнивая это уравнение с (6.5), (6.6) легко определяем, что

$$I_1^{\text{ПЗ}} = 1, \quad (6.43a)$$

$$I_2^{\text{ПЗ}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 2\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \quad (6.43b)$$

$$I_n^{\text{ПЗ}} = 0, \quad n \geq 3. \quad (6.43c)$$

Как следствие этого, рекурсивное соотношение (6.24b) для вершин взаимодействия принимает исключительно простой вид

$$\bar{\Gamma}_n^{\text{ПЗ}}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = -\frac{2}{n-2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j) \bar{\Gamma}_{n-1}^{\text{ПЗ}}(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j, \mathbf{k}_1, \dots, \check{\mathbf{k}}_i, \dots, \check{\mathbf{k}}_j, \dots, \mathbf{k}_n), \quad (6.44)$$

где обозначение $\check{\mathbf{k}}_i, \check{\mathbf{k}}_j$ означает, что ядро $\bar{\Gamma}_{n-1}^{\text{ПЗ}}$ не содержит данный импульс среди аргументов. Затравочный элемент рекурсии $\bar{\Gamma}_2$ задан уравнением (6.22a).

Теперь мы обсудим контрчлены C_n . Подставляя выражения (6.43) в (6.29) находим, что

$$C_1^{\text{ПЗ}}(\mathbf{k}) = 2 \delta^{(3)}(\mathbf{k}) \int [dq] \beta(\mathbf{q}, \mathbf{k}), \quad (6.45a)$$

$$C_2^{\text{ПЗ}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = -2 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \int [dq] \beta(\mathbf{q}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2). \quad (6.45b)$$

Заметим, что асимптотическое поведение ядра $\beta(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = O(q/k)$ в пределе $q \rightarrow \infty$ указывает на то, что интегралы в правой части расходятся в области больших импульсов. В общем случае, для их регуляризации необходимо введение ультрафиолетового масштаба обрезания. Детали перенормировки, однако, не важны для практических вычислений, так как расходящиеся слагаемые сокращаются после сложения с другими однопетлевыми вкладками. В

приближении Зельдовича, однако, ситуация гораздо проще. Используя соотношения

$$\lim_{p \rightarrow 0} \beta(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \beta(\mathbf{k}, -\mathbf{k} + \mathbf{p}) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) p^2}{p^2 k^2} = 0, \quad (6.46)$$

получаем, что $C_2^{\text{ПЗ}}$ равен нулю. Из этого следует, согласно рекурсивному соотношению (6.28) и уравнению (6.43с), что равны нулю и все C_n с $n > 2$. Заключаем, что в приближении Зельдовича только первый контрчлен C_1 не равен нулю. Как было показано в разделе 6.2.3, роль этого члена – в точности сократить расходящиеся диаграммы – *головастики*. Таким образом, в приближении Зельдовича можно забыть и о контрчленах и о *головастиках* в петлевом разложении.

Поле плотности

Набор из вершин $\bar{\Gamma}_n$ достаточен для вычисления корреляционных функций дивергенции плотности Θ в приближении Зельдовича. Для вычисления корреляторов поля плотности δ необходимо также знать ядра K_n . Подставляя анзац (6.37) в уравнение непрерывности (6.2а) находим, что искомые ядра удовлетворяют системе линейных уравнений,

$$\dot{K}_1^{\text{ПЗ}}(\eta; \mathbf{k}) + K_1^{\text{ПЗ}}(\eta; \mathbf{k}) = 1, \quad (6.47а)$$

$$\begin{aligned} \dot{K}_2^{\text{ПЗ}}(\eta; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + 2K_2^{\text{ПЗ}}(\eta; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) &= \alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) K_1^{\text{ПЗ}}(\eta; \mathbf{k}_2) + \alpha(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1) K_1^{\text{ПЗ}}(\eta; \mathbf{k}_1) \\ &\quad - 2\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) K_1^{\text{ПЗ}}(\eta; \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \end{aligned} \quad (6.47б)$$

$$\begin{aligned} \dot{K}_n^{\text{ПЗ}}(\eta; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) + nK_n^{\text{ПЗ}}(\eta; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \\ + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j) K_{n-1}^{\text{ПЗ}}(\eta; \mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j, \mathbf{k}_1, \dots, \check{\mathbf{k}}_i, \dots, \check{\mathbf{k}}_j, \dots, \mathbf{k}_n) \\ = \sum_{i=1}^n \alpha\left(\mathbf{k}_i, \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \mathbf{k}_j\right) K_{n-1}^{\text{ПЗ}}(\eta; \mathbf{k}_1, \dots, \check{\mathbf{k}}_i, \dots, \mathbf{k}_n), \quad n \geq 3. \end{aligned} \quad (6.47с)$$

Для адиабатической моды $\delta_\eta = \Theta_\eta$ при $\eta \rightarrow -\infty$. Это соответствует начальным условиям

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} K_1(\eta) = 1, \quad \lim_{\eta \rightarrow -\infty} K_n(\eta) e^{(n-1)\eta} = 0, \quad n \geq 2. \quad (6.48)$$

Решения (6.47) удовлетворяющие этим условиям не зависят от времени, и имеют вид

$$K_1^{\text{ПЗ}} = 1, \quad (6.49а)$$

$$K_2^{\text{ПЗ}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 1 - \frac{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \equiv \sin^2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \quad (6.49б)$$

$$\begin{aligned} K_n^{\text{ПЗ}}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) &= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n \alpha\left(\mathbf{k}_i, \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \mathbf{k}_j\right) K_{n-1}^{\text{ПЗ}}(\mathbf{k}_1, \dots, \check{\mathbf{k}}_i, \dots, \mathbf{k}_n) \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j) K_{n-1}^{\text{ПЗ}}(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j, \mathbf{k}_1, \dots, \check{\mathbf{k}}_i, \dots, \check{\mathbf{k}}_j, \dots, \mathbf{k}_n) \right] \quad n \geq 3. \end{aligned} \quad (6.49с)$$

Подытоживая раздел, подчеркнем, что уравнения (6.44), (6.49) содержат все ингредиенты диаграммного разложения ТВВР в приближении Зельдовича.

6.3.2. Точная динамика

В этом разделе мы проведем вывод, аналогичный предыдущему, но для уравнений точной динамики. В этом случае ядра I_n и K_n нельзя найти по отдельности, необходимо решить систему из связанных уравнений на эти операторы. Сначала воспользуемся уравнением (6.2b) чтобы выразить I_n в терминах K_n . Используя разложение (6.37), находим

$$I_1(\eta; \mathbf{k}) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}K_1(\eta; \mathbf{k}) , \quad (6.50a)$$

$$I_2(\eta; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 2\beta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + \frac{3}{2}K_2(\eta; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) , \quad (6.50b)$$

$$I_n(\eta; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \frac{3}{2}K_n(\eta; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) , \quad n \geq 3 . \quad (6.50c)$$

Используя разложения (6.6), (6.37) в (6.2a), после нетрудных алгебраических преобразований получаем следующую цепочку дифференциальных уравнений,

$$\dot{K}_1(\eta; \mathbf{k}) + I_1(\eta; \mathbf{k})K_1(\eta; \mathbf{k}) = 1 , \quad (6.51a)$$

$$\begin{aligned} \dot{K}_n(\eta; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!(n-m)!} \sum_{\sigma} I_m(\eta; \mathbf{k}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{k}_{\sigma(m)}) \\ \times K_{n-m+1} \left(\sum_{l=1}^m \mathbf{k}_{\sigma(l)}, \mathbf{k}_{\sigma(m+1)}, \dots, \mathbf{k}_{\sigma(n)} \right) \\ = \sum_{i=1}^n \alpha \left(\mathbf{k}_i, \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \mathbf{k}_j \right) K_{n-1}(\mathbf{k}_1, \dots, \check{\mathbf{k}}_i, \dots, \mathbf{k}_n) , \quad n \geq 2 . \end{aligned} \quad (6.51b)$$

Используя (6.50), приходим к замкнутой системе уравнений для операторов K_n . Заметим, что уравнение для ядра n -го порядка зависят только от K_m с индексами $m \leq n$, так что систему можно решить точно. Адиабатические начальные условия (6.48) определяют решение полностью. Как и в случае ПЗ, оно не зависит от времени. Итоговое рекурсивное

соотношение имеет вид

$$K_1 = 1, \quad (6.52a)$$

$$K_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{4}{7} \sin^2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \quad (6.52b)$$

$$\begin{aligned} K_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = & \frac{2}{2n+3} \left[\sum_{i=1}^n \alpha(\mathbf{k}_i, \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \mathbf{k}_j) K_{n-1}(\mathbf{k}_1, \dots, \check{\mathbf{k}}_i, \dots, \mathbf{k}_n) \right. \\ & - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(2\beta(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j) + \frac{3}{2} K_2(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j) \right) K_{n-1}(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j, \mathbf{k}_1, \dots, \check{\mathbf{k}}_i, \dots, \check{\mathbf{k}}_j, \dots, \mathbf{k}_n) \\ & - \frac{3}{2} \sum_{m=3}^{n-1} \frac{1}{m!(n-m)!} \times \\ & \left. \times \sum_{\sigma} K_m(\mathbf{k}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{k}_{\sigma(m)}) K_{n-m+1} \left(\sum_{l=1}^m \mathbf{k}_{\sigma(l)}, \mathbf{k}_{\sigma(m+1)}, \dots, \mathbf{k}_{\sigma(n)} \right) \right], \quad n \geq 3. \quad (6.52c) \end{aligned}$$

Ядра I_n затем находятся из (6.50). Заметим, что (6.52a) приводит к $I_1 = 1$, что оправдывает приближение, сделанное в (6.18). Хотя рекурсивное соотношение (6.52c) становится достаточно сложным для больших n , это не является серьёзным препятствием для вычислений, так как для первых порядков по теории возмущений необходимо знать лишь несколько ядер. В частности, для вычисления 1-петлевой (2-петлевой) поправки в спектр мощности нужны лишь ядра вплоть до K_3 (K_5) включительно.

Как только ядра K_n , I_n получены, нахождение вершинных функций $\bar{\Gamma}_n$ и контрчленов C_n с помощью (6.24b) и (6.28) становится тривиальной задачей,

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = & \frac{-1}{n-2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(2\beta(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j) + \frac{3}{2} K_2(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j) \right) \bar{\Gamma}_{n-1}(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j, \mathbf{k}_1, \dots, \check{\mathbf{k}}_i, \dots, \check{\mathbf{k}}_j, \dots, \mathbf{k}_n) \\ & - \frac{3}{2(n-2)} \sum_{m=3}^{n-1} \frac{1}{m!(n-m)!} \times \\ & \times \sum_{\sigma} K_m(\mathbf{k}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{k}_{\sigma(m)}) \bar{\Gamma}_{n-m+1} \left(\sum_{l=1}^m \mathbf{k}_{\sigma(l)}, \mathbf{k}_{\sigma(m+1)}, \dots, \mathbf{k}_{\sigma(n)} \right). \quad (6.53) \end{aligned}$$

Что касается контрчленов, то они даны выражениями

$$C_1(\mathbf{k}) = \delta^{(3)}(\mathbf{k}) \int [dq] \left(2\beta(\mathbf{q}, \mathbf{k}) + \frac{3}{2} K_2(\mathbf{q}, \mathbf{k}) \right), \quad (6.54a)$$

$$C_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{3}{4} \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \int [dq] K_3(\mathbf{q}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \quad (6.54b)$$

где были использованы общие формулы (6.29) и свойство

$$\lim_{p \rightarrow 0} I_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q} + \mathbf{p}) I_2(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = 0, \quad (6.55)$$

легко получаемое из (6.50b), (6.52b). В отличие от приближения Зельдовича, контрчлен C_2 не равен нулю. То же самое справедливо и для контрчленов старшего порядка, которые теперь должны быть учтены в петлевых вычислениях.

6.4. Предел мягких мод и инфракрасная безопасность

Несмотря на то, что одновременные корреляционные функции в ТВВР и СТВ совпадают, промежуточные элементы необходимые для их вычисления весьма отличаются. Как отмечено во Введении, одиночные диаграммы СТВ содержат инфракрасные сингулярности, которые сокращаются лишь после суммирования по всем диаграммам. Это обстоятельство значительно осложняет многопетлевые вычисления и является существенным препятствием на пути инфракрасного пересуммирования, необходимого для аккуратного учета физических эффектов длинноволновых возмущений. В данном разделе будет показано, что эта проблема отсутствует в ТВВР, все элементы которой является «инфракрасно – безопасным», т.е. ни один из них не содержит инфракрасных сингулярностей.

6.4.1. Вершины с мягкими модами

Мы хотим продемонстрировать, что вершинные функции $\bar{\Gamma}_n$, C_n и K_n появляющиеся в диаграммном разложении ТВВР не имеют полюсов при конечных значениях своих импульсов. Это будет означать, что они не содержат инфракрасных расходимостей если спектр мощности $\bar{P}(|\mathbf{q}|)$, который играет роль пропагатора, ведет себя не круче, чем q^{-3} в пределе $\mathbf{q} \rightarrow 0$. Случаи точной динамики и приближения Зельдовича будут рассмотрены параллельно. Напомним, что инфракрасное поведение этих моделей идентично [41, 145].

Обсудим сначала вершины K_n . Легко убедиться, что K_2 данное выражением (6.49b) (или (6.52b)) может принимать лишь конечные значения. Доказательство для старших порядков будет проведено по индукции. Предположим, что K_m с $m < n$ не содержит полюсов. Тогда из соотношений (6.49c), (6.52c) следует, что единственным потенциальным источником полюса могут быть только полюса ядер α и β , которые появляются если первый аргумент α или один из аргументов β зануляется, см. (6.4). В этом случае K_n могло бы, в принципе, иметь полюс, если бы один из его аргументов занулялся. Чтобы проанализировать этот предел, разделим аргументы K_n на «жесткие» импульсы $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_l$ которые будут фиксированы, и «мягкие» $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n-l}$, которые однородно стремятся к нулю,

$$\mathbf{q}_s = \epsilon \mathbf{q}'_s, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad \mathbf{q}'_s - \text{фиксированы.} \quad (6.56)$$

После выделения «опасных» вкладов, имеем⁵

$$\begin{aligned}
K_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_l, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n-l}) &= A_n \left[\sum_{s=1}^{n-l} \alpha\left(\mathbf{q}_s, \sum_{i=1}^l \mathbf{k}_i\right) K_{n-1}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_l, \mathbf{q}_1, \dots, \check{\mathbf{q}}_s, \dots, \mathbf{q}_{n-l}) \right. \\
&\quad \left. - 2 \sum_{s=1}^{n-l} \sum_{i=1}^l \beta(\mathbf{q}_s, \mathbf{k}_i) K_{n-1}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_i + \mathbf{q}_s, \dots, \mathbf{k}_m, \mathbf{q}_1, \dots, \check{\mathbf{q}}_s, \dots, \mathbf{q}_{n-l}) \right] + O(\epsilon^0) \\
&= A_n \sum_{s=1}^{n-l} \left[\alpha\left(\mathbf{q}_s, \sum_{i=1}^l \mathbf{k}_i\right) - 2 \sum_{i=1}^l \beta(\mathbf{q}_s, \mathbf{k}_i) \right] K_{n-1}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_l, \mathbf{q}_1, \dots, \check{\mathbf{q}}_s, \dots, \mathbf{q}_{n-l}) \\
&\quad + O(\epsilon^0),
\end{aligned} \tag{6.57}$$

где

$$A_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{для ПЗ,} \\ \frac{2}{2n+3} & \text{для ТД,} \end{cases}$$

и $O(\epsilon^0)$ обозначает вклады, конечные в пределе $\epsilon \rightarrow 0$. Замечаем, что полюса в ядрах α и β при $\mathbf{q}_s \rightarrow 0$ сокращаются внутри квадратных скобок в последней строке (6.57). Таким образом, результирующий вклад $O(\epsilon^0)$ и ядро K_n инфракрасно – безопасно.

Теперь рассмотрим $\bar{\Gamma}_n$. Доказательство опять пройдет по индукции. $\bar{\Gamma}_2$ дано выражением (6.22a) и ограничено, если спектр мощности не становится равным нулю ни при каком импульсе⁶. Предположим теперь, что $\bar{\Gamma}_m$ с $m < n$ конечен. Тогда единственными вкладами в рекурсивных соотношениях (6.44), (6.54a) которые могли бы спровоцировать появление сингулярности в $\bar{\Gamma}_n$, являются члены с ядром β . Заметим, что они идентичны в ПЗ и ТД. Разделяя аргументы вершинной функции на жесткие и мягкие и предполагая, что мягкие импульсы стремятся к нулю однородно (6.56), изолируем «опасную часть»

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_l, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n-l}) &= \\
&= \frac{-2}{n-2} \sum_{s=1}^{n-l} \left[\sum_{i=1}^l \beta(\mathbf{q}_s, \mathbf{k}_i) \right] \bar{\Gamma}_{n-1}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_l, \mathbf{q}_1, \dots, \check{\mathbf{q}}_s, \dots, \mathbf{q}_{n-l}) + O(\epsilon^0)
\end{aligned} \tag{6.58}$$

Для суммы в квадратных скобках имеем,

$$\sum_{i=1}^l \beta(\mathbf{q}_s, \mathbf{k}_i) = \frac{(\mathbf{q}_s \cdot \sum_{i=1}^l \mathbf{k}_i)}{2q_s^2} + O(\epsilon^0).$$

Напомним теперь, что из-за закона сохранения импульса сумма всех импульсов содержа-

⁵ Заметим, что члены с α и β у которых оба аргумента мягкие не выписаны, так как они ограничены в пределе $\epsilon \rightarrow 0$, см. (6.4).

⁶ При доказательстве инфракрасной безопасности нас будут интересовать только те расходимости, которые могут возникнуть за счет динамических эффектов взаимодействия мягких и жестких мод.

щихся в вершине $\bar{\Gamma}_n$ должна быть равна нулю, см. (6.30). Из этого следует, что

$$\sum_{i=1}^l \mathbf{k}_i = - \sum_{s=1}^{n-l} \mathbf{q}_s = O(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^l \beta(\mathbf{q}_s, \mathbf{k}_i) = O(\epsilon^0). \quad (6.59)$$

Таким образом, что все полюсы в правой части (6.58) сокращаются, и, следовательно, $\bar{\Gamma}_n$ также инфракрасно безопасна.

В заключение заметим, что доказательство инфракрасной безопасности контрчленов C_n абсолютно аналогично приведенному выше.

6.4.2. Связь с принципом эквивалентности

Отсутствие инфракрасных расходимостей в корреляционных функциях для одновременных величин тесно связана с симметрией динамических уравнений крупномасштабной структуры Вселенной [41], которая является следствием принципа эквивалентности [146]. Эта симметрия может быть использована для вывода т.н. «условий самосогласованности», (тождеств Уорда), которые не зависят от специфики гидродинамического описания [57, 146–148]. В этом разделе будут изучены свойства этой симметрии для ТВВР. Рассматривая логарифм функции распределения вероятности $\Gamma[\Theta; \eta]$ как эффективное действие трехмерной евклидовой КТП, мы потребуем его инвариантности относительно преобразований симметрий и выведем соответствующие условия на вершины $\Gamma_n^{\text{полн}}$ (тождества Уорда). Результаты данного раздела будут справедливы для любой динамической системы, обладающей необходимой симметрией.

Рассмотрим координатные преобразования,

$$\eta \mapsto \eta, \quad \mathbf{x} \mapsto \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - e^\eta \nabla \Phi_L(\mathbf{x}), \quad (6.60a)$$

где $\Phi_L(\mathbf{x})$ описывает некоторое длинноволновое возмущение. В соответствии с этим его Фурье – образ $\Phi_L(\mathbf{k})$ локализован в области малых импульсов $k < 1/L$. Контраст плотности преобразуется как скаляр относительно симметрии (6.60a), в то время как дивергенция скорости приобретает дополнительный неоднородный вклад за счет того, что замена координат зависит от времени,

$$\tilde{\delta}_\eta(\tilde{\mathbf{x}}) = \delta_\eta(\mathbf{x}), \quad \tilde{\Theta}_\eta(\tilde{\mathbf{x}}) = \Theta_\eta(\mathbf{x}) + e^\eta \nabla^2 \Phi_L(\mathbf{x}). \quad (6.60b)$$

В конечном итоге мы возьмем предел $L \rightarrow \infty$, предполагая, что при этом градиент Φ_L стремится к константе,

$$\nabla \Phi_L(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{k} \Phi_L(\mathbf{k}) \rightarrow -i \mathbf{a} \delta^{(3)}(\mathbf{k}), \quad \text{при } L \rightarrow \infty. \quad (6.61)$$

В этом пределе преобразования (6.60b) имеют следующий вид в Фурье – пространстве,

$$\tilde{\delta}_\eta(\mathbf{k}) = \delta_\eta(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{a}\cdot\mathbf{k})e^\eta} (1 + O(1/L)) , \quad (6.62a)$$

$$\tilde{\Theta}_\eta(\mathbf{k}) = (\Theta_\eta(\mathbf{k}) - e^\eta k^2 \Phi_L(\mathbf{k}))e^{i(\mathbf{a}\cdot\mathbf{k})e^\eta} (1 + O(1/L)). \quad (6.62b)$$

Предположим, что исходные поля $\delta_\eta(\mathbf{k})$, $\Theta_\eta(\mathbf{k})$ являются решениями уравнений гидродинамики (6.2). Тогда элементарно показать, что преобразованные поля (6.62) также являются решениями с точностью до поправок порядка $O(1/L)$. Таким образом, в пределе (6.61) преобразования (6.62) становятся симметрией уравнений движения.⁷ Ключевым моментом является появление неоднородного вклада при преобразованиях Θ (6.62b). Хотя этот член исчезает в пределе (6.61), в уравнениях движения он свертывается с ядрами α и β , которые имеют полюса при малых значениях импульсов. Эти полюса сокращают один множитель k в $k^2\Phi_L(\mathbf{k})$, что приводит к конечному вкладу в пределе $L \rightarrow \infty$. Стоит отметить, что мы не сделали предположения о том, что градиент длинноволновой моды должен быть мал, так что данная симметрия справедлива во всех порядках по \mathbf{a} .

Как обсуждалось в [146, 148], преобразование (6.60) соответствует наложению длинноволновой адиабатической растущей моды на первоначальное возмущение. Функция $\Phi_L(\mathbf{x})$ пропорциональна начальному значению гравитационного потенциала длинноволновой моды. В такой интерпретации симметрия динамических уравнений КСВ в пределе (6.61) следует из принципа эквивалентности: преобразование (6.60) описывает «свободное падение» коротковолнового возмущения в гравитационном поле длинноволновой моды, которое не должно влиять на локальную физику. Таким образом, доказанная инвариантность справедлива и за рамками гидродинамического описания и выполняется в любой теории, для которой справедлив принцип эквивалентности.

Вышеизложенные соображения указывают на то, что вероятность обнаружения преобразованного поля $\tilde{\Theta}_\eta(\mathbf{k})$ в статистическом ансамбле должна быть равна вероятности обнаружения изначального поля $\Theta_\eta(\mathbf{k})$, умноженной на вероятность найти длинноволновую

⁷ Стоит отметить, что группа симметрий уравнений (6.2) гораздо «больше» [147, 148]. В пределе (6.61) эти уравнения инвариантны относительно общих преобразований вида

$$\tilde{\delta}_\eta(\mathbf{k}) = \delta_\eta(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{a}\cdot\mathbf{k})\xi(\eta)} , \quad \tilde{\Theta}_\eta(\mathbf{k}) = (\Theta_\eta(\mathbf{k}) - \dot{\xi}(\eta)k^2\Phi_L(\mathbf{k}))e^{i(\mathbf{a}\cdot\mathbf{k})\xi(\eta)} ,$$

с произвольной функцией $\xi(\eta)$. Отметим, однако, что только преобразования с конкретной зависимостью от времени (6.62) составляют подгруппу общекординатных диффеоморфизмов, т.е. могут быть обобщены в рамках релятивистской теории [146, 148].

моду⁸. Это приводит к уравнению

$$\Gamma[\tilde{\Theta}_\eta; \eta] = \Gamma[\Theta_\eta; \eta] + \Gamma[\Theta_{\eta,L}; \eta], \quad (6.63)$$

где $\Theta_{\eta,L}(\mathbf{k}) = -e^\eta k^2 \Phi_L(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{a}\cdot\mathbf{k})e^\eta}$. Длинноволновая мода находится в линейном режиме, поэтому её статистический вес гауссов (см. (6.22a), (6.24a)),

$$\Gamma[\Theta_{\eta,L}; \eta] = \frac{e^{-2\eta}}{2} \int [dk] \frac{\Theta_{\eta,L}(\mathbf{k}) \Theta_{\eta,L}(-\mathbf{k})}{\bar{P}(|\mathbf{k}|)} = \frac{1}{2} \int [dk] \frac{k^4 \Phi_L(\mathbf{k}) \Phi_L(-\mathbf{k})}{\bar{P}(|\mathbf{k}|)},$$

Если $\bar{P}(|\mathbf{k}|)$ при $k \rightarrow 0$ стремится слабее чем k^2 , то⁹

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \Gamma[\Theta_{\eta,L}; \eta] = 0.$$

Сравнивая с (6.63), получаем, что статистический вес Γ должен быть инвариантом в пределе (6.61),

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \Gamma[\tilde{\Theta}_\eta; \eta] = \Gamma[\Theta_\eta; \eta]. \quad (6.64)$$

Подчеркнем, что это условие является следствием принципа эквивалентности и гауссовости начальных условий. Используя степенное разложение для Γ , в пределе (6.61) получаем систему уравнений,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int [dq]^{n-l} \Gamma_n^{\text{полн}}(\eta; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_l, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n-l}) \prod_{s=1}^{n-l} (q_s^2 \Phi_L(\mathbf{q}_s)) = 0 \quad (6.65)$$

для всех $1 \leq l \leq n-1$. Эти уравнения приводят к следующим условиям на вершинные функции,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{n-l} \Gamma_n^{\text{tot}}(\eta; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_l, \epsilon \mathbf{q}_1, \dots, \epsilon \mathbf{q}_{n-l}) = 0, \quad 1 \leq l \leq n-1. \quad (6.66)$$

Эти условия означают, что вершина $\Gamma_n^{\text{полн}}$ не может иметь полюса порядка $(n-l)$ и выше, если $(n-l)$ её аргументов становятся мягкими. Это условие, однако, не запрещает полюсов низших порядков. Иными словами, данные условия слабее, чем пертурбативный результат раздела 6.4.1, который утверждает, что $\Gamma_n^{\text{полн}}$ не имеют полюсов вовсе. С другой стороны, полученные соотношения более общи, так как они не опираются на гидродинамическое приближение идеальной жидкости.

В заключение отметим, что принцип эквивалентности накладывает ограничения и на инфракрасные свойства вершин K_n . Подставляя преобразование (6.62) в соотношение (6.37) между δ и Θ , и требуя его инвариантности в пределе $L \rightarrow \infty$, легко получить то же соотношение, что (6.66), но для K_n вместо $\Gamma_n^{\text{полн}}$.

⁸ Здесь используется то, что начальное распределение гауссово, т.е. длинноволновые и коротковолновые возмущения статистически независимы.

⁹ В реалистичной космологии $\bar{P}(|\mathbf{k}|) \propto k$ при $k \rightarrow 0$.

6.5. Заключение к главе

В данной главе был описан новый аппарат для расчета нелинейного формирования структур в рамках теории возмущений, который позволяет избежать ряда недостатков стандартных методов. Вместо того, чтобы изучать эволюцию по времени самих космологических полей, мы рассматриваем временную эволюцию их функции распределения вероятности. Был выведен аналог уравнения непрерывности Лиувилля, описывающий эволюцию функции распределения вероятности. Было показано, что разложение функции распределения в ряд Тейлора приводит к цепочке уравнений, которую можно решить точно без необходимости её обрезания. Затем, одновременные корреляционные функции, такие как спектр мощности, могут быть получены из функции распределения методами теории возмущений. В развитом подходе время играет роль внешнего параметра, что оправдывает название формализма «теория возмущений на временных расслоениях». В рамках нового метода была разработана диаграммная техника и вычислены вершинные функции для приближения Зельдовича и точной динамики в случае гауссовых начальных условий. Отметим, что предложенный подход, формально, эквивалентен трехмерной евклидовой квантовой теории поля, и поэтому позволяет явно применять стандартные методы из этой области.

Важным свойством предложенного аппарата является то, что ни один элемент пертурбативного разложения не содержит инфракрасных сингулярностей. Это является прямым следствием того, что в нашем методе усреднение по ансамблю алгоритмически отделено от эволюции по времени. Пертурбативное разложение, таким образом, строится из величин вычисленных для одинаковых моментов времени, которые «защищены» от инфракрасных расходимостей принципом эквивалентности. По сравнению со стандартной эйлеровой теорией возмущений это значительно упрощает пересуммирование инфракрасно-усиленных диаграмм, которое будет подробно обсуждено в следующей главе.

Нелинейная эволюция сахаровских осцилляций и инфракрасное пересуммирование

Сахаровские осцилляции (барионные акустических осцилляции) в распределении материи на сопутствующем масштабе $1/k_{\text{осц}} \sim 100h/\text{Мпк}$ широко используются для получения информации об эволюции и составе Вселенной [50–54]. Глубокие обзоры ближайшего будущего позволят измерить двухточечную корреляционную функции материи на масштабах сахаровских осцилляций (СО) с беспрецедентной точностью. Помимо этого, СО также были обнаружены в трехточечной корреляционной функции в данных обзора «БОСС» (BOSS) [149]. Хорошо известно, что СО существенно подвержены эффектам взаимодействия с длинноволновыми возмущениями, в результате которых амплитуда пика СО в координатном пространстве существенно подавляется, а его положение смещается в сторону коротких масштабов. В связи с особой ролью СО в космологии, нелинейные эффекты должны быть описаны с наилучшей точностью чтобы полностью использовать потенциал будущих прецизионных измерений.

Известно, что эйлерова стандартная теория возмущений плохо справляется с описанием крупномасштабных потоков, так как эффективная константа связи взаимодействия с инфракрасными модами становится большой, что делает пертурбативное описание неприменимым. Эта проблема может быть решена, если формальный ряд по этой константе связи может быть пересуммирован во всех порядках теории возмущений, как это происходит в случае инфракрасных расходимостей в квантовой электродинамике.

В данной главе будет описана процедура пересуммирования инфракрасных эффектов в сахаровских осцилляциях, основанная на предложенной в предыдущей главе теории возмущений на временных расслоениях. Главным преимуществом этого подхода является весьма ясная инфракрасная структура пертурбативного разложения, а именно, отсутствие нефизических инфракрасных расходимостей, являющихся бичом стандартной теории возмущений. С другой стороны, пертурбативное разложение в ТВВР хорошо контролируемо в ультрафиолетовой области, а значит, не осложнено трудностями, характерными для лагранжевой теории возмущений [65, 150].

Главный результат этой главы – построение систематического метода, позволяющего определять и пересуммировать усиленные вклады от инфракрасных мод, которые влияют

на форму и положение СО. Примечательно, что предложенный метод имеет простую диаграммную интерпретацию в рамках ТВВР и позволяет надежно оценить теоретическую неопределенность на каждом шаге пересуммирования.

Чтобы определить усиленные инфракрасные вклады важные для СО, мы разделяем линейный спектр мощности на монотонную компоненту $P_{\text{мон}}$ и осциллирующий вклад $P_{\text{осц}}$. В инфракрасном пределе $q \ll k$ и в первом порядке по $P_{\text{осц}}$ трехточечная вершина ТВВР принимает вид

$$\Gamma_3(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{q}') \rightarrow \delta^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{q}') \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q^2} \left(\frac{P_{\text{осц}}(|\mathbf{k} + \mathbf{q}|) - P_{\text{осц}}(k)}{P_{\text{мон}}(k)^2} \right). \quad (7.1)$$

В пределе $q \rightarrow 0$ разница между двумя спектрами мощности в числителе пропорциональна q и сокращает усиление $1/q$ в согласии с принципом эквивалентности. Разложение $P_{\text{осц}}$ в ряд Тейлора, однако, теряет смысл для мод в диапазоне $k_{\text{осц}} \lesssim q \ll k$, так все члены разложения формально становятся порядка единицы.

Сделанное наблюдение означает, что нелинейные поправки к корреляционным функциям при импульсе k усилены вкладами ИК мод с $q \ll k$. В этой главе мы определим соответствующие вклады для каждой вершины Γ_n и введем правила подсчета степеней для их пересуммирования. Лидирующий вклад в осциллирующую часть спектра мощности обусловлен диаграммами типа *ромушка*, а пересуммирование может быть представлено диаграмматически в следующем виде (см. раздел 7.3),

$$P_{\text{осц}}^{\text{ИК-пер, ГП}}(\eta; k) = \text{wavy line} + \text{diagram with loop} + \text{diagram with 2 loops} + \text{diagram with 3 loops} + \dots \quad (7.2)$$

Данное диаграммное представление может быть обобщено для корреляционных функций старших порядков.

В главном порядке (ГП), пересуммированный спектр мощности совпадает с тем, что был получен в [49]. Используя ТВВР были также вычислены поправки первого порядка малости (ППМ). Данные поправки особенно важны для точного описания нелинейного сдвига пика сахаровских осцилляций. Помимо этого, эти поправки чувствительны к не-дипольным

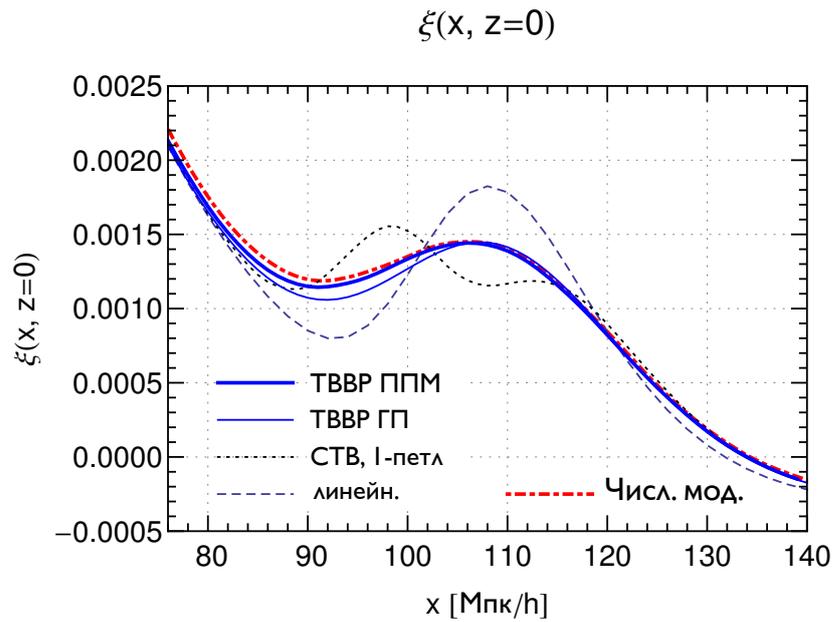


Рис. 7.1. Двухточечная корреляционная функция материи $\xi(x)$ при $z = 0$. Тонкой и толстой сплошными синими линиями показаны результаты пересуммирования в главном порядке (ГП) и первом порядке малости (ППМ). Красной штрих – пунктирной линией показан результат численного моделирования «Horizon Run» [151]. Для сравнения также показаны предсказания: линейной теории (черная штрихованная линия), стандартной теории возмущений в 1-петлевом приближении.

вкладам, которые отличаются в приближении Зельдовича и точной динамике, что позволяет систематически описать эффекты за рамками приближения Зельдовича. Этот факт важен для контроля точности техники реконструкции СО, которая в основном использует приближение Зельдовича.

Численный результат для корреляционной функции материи $\xi(x)$ на красном смещении $z = 0$ представлен на Рис. 7.1, где мы сравниваем результат ТВВР в главном порядке и первом порядке малости по инфракрасным эффектам с данными численного моделирования методом частиц, а также демонстрируем однопетлевой результат стандартной теории возмущений без пересуммирования.

Стоит отметить, что результаты данной главы получены исходя из первых принципов и не зависят от каких-либо свободных параметров. Было найдено, что различие между корреляционной функцией пересуммированной в первом порядке малости и приближением Зельдовича составляет около 5% в районе пика СО (см. раздел 7.6.3). Эта разница меньше инструментальной ошибки текущих обзоров, но больше как теоретической неопределенности наших вычислений, так и точности обзоров ближайшего будущего. Заметим, что формализм ТВВР может быть систематически обобщен для учета поправок следующих порядков малости.

7.1. Разложение на монотонную и осциллирующую компоненты

Линейный спектр мощности, который является «затравкой» для вершин ТВВР, может быть разложен на монотонную часть (с максимумом на импульсе $k = k_{eq} \sim 0.02 h/\text{Мпк}$ соответствующему размеру горизонта в момент перехода с радиационно – на материально – доминированную стадию) и осциллирующую часть, которая описывает СО

$$P_{\text{лин}}(\eta, k) = g(\eta)^2 \bar{P}(k) = g(\eta)^2 (\bar{P}_{\text{мон}}(k) + \lambda \bar{P}_{\text{осц}}(k)) . \quad (7.3)$$

Отметим, что мы факторизовали зависимость от времени, определяемую фактором роста $g = D(z)$ и ввели формальный параметр λ для подсчета количества спектров мощностей $\bar{P}_{\text{осц}}$. Амплитуда осциллирующего спектра мощности подавлена по сравнению с монотонным спектром в реалистичной космологии. Её величина может быть оценена как [92] (см. также [152]),

$$\frac{\bar{P}_{\text{осц}}}{\bar{P}_{\text{мон}}} = O \left(e^{-(\eta_{\text{rec}} - \eta_{\text{eq}})} \frac{\Omega_b}{\Omega_m} \right) \sim 0.05 . \quad (7.4)$$

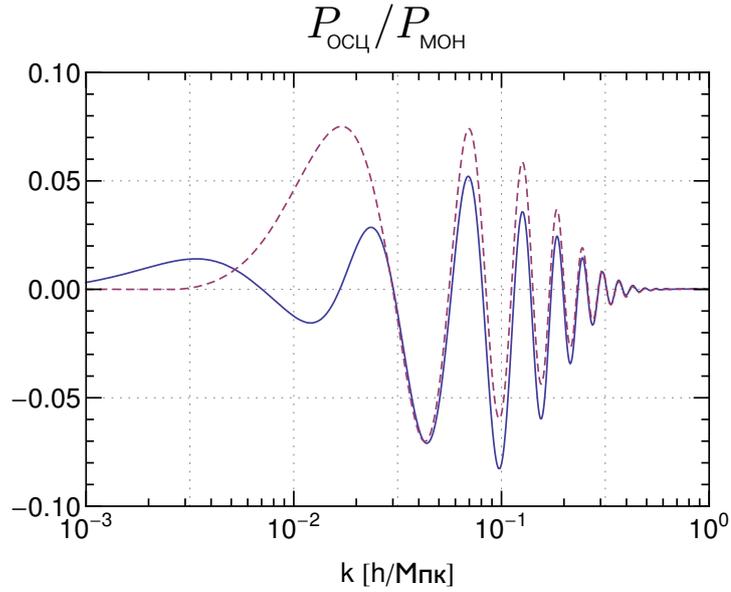


Рис. 7.2. Отношение осциллирующей $P_{\text{осц}}$ и монотонной $P_{\text{мон}}$ частей спектра мощности полученное двумя независимыми методами. Космологические параметры спектра мощности были выбраны такими же как в [151]. Сплошная кривая соответствует разложению использованному в численных вычислениях раздела 7.6. Альтернативное разложение (штрихованная кривая) было задействовано для проверки.

Осциллирующий спектр мощности $\bar{P}_{\text{осц}}$ может быть параметризован как [92, 152],

$$\bar{P}_{\text{осц}}(k) \propto \sin(k/k_{\text{осц}}) \exp[-(k/k_{\text{Силк}})^2] T(k), \quad (7.5)$$

где $1/k_{\text{осц}} \simeq 110 \text{ Мпк}/h$, частота затухания Силка $k_{\text{Силк}} \sim 0.2 \text{ h}/\text{Мпк}$ и $T(k)$ —передаточная функция тёмной материи, которая слабо зависит¹ от k . В численном анализе мы не используем (7.5), а находим осциллирующую часть фитируя шаблон для монотонного спектра мощности интересующей нас космологической модели. Не зависящее от времени отношение $P_{\text{осц}}/P_{\text{мон}}$ изображено сплошной кривой на Рис. 7.2.

Чтобы проверить, что наши результаты не зависят от конкретного алгоритма выделения осциллирующей компоненты, был также использован альтернативный метод численной интерполяции монотонной части по наперед выбранному набору точек. Соответствующее отношение $P_{\text{осц}}/P_{\text{мон}}$ показано штрихованной линией на Рис. 7.2. В дальнейшем будет показано, что разница наших итоговых результатов для корреляционных функций полученных двумя способами разделения не превышает долей процента и гораздо меньше теоретической неопределенности приближений принятых в этой главе.

¹ Она стремится к 1 при $k < k_{\text{eq}}$ и имеет асимптотику $\ln k/k^2$ при больших k .

Данный результат весьма ожидаем. Неопределенность в разделении на монотонную и осциллирующую части существенна на больших масштабах, $k \lesssim 0.03 h/\text{Мпк}$, где нелинейные эффекты малы и поэтому обе части находятся в линейном режиме. Вследствие этого в физических наблюдаемых на этих масштабах монотонная и осциллирующие части просто суммируются обратно в линейный спектр мощности, так что какая-либо неопределенность исчезает. По аналогичной причине вертикальный сдвиг между двумя кривыми при $k \gtrsim 0.1 h/\text{Мпк}$, различимый на Рис. 7.2, также не вносит заметной разницы в конечный результат.

Разложение (7.3) может быть обобщено на вершины $\bar{\Gamma}_n$, так как они являются функционалами начального спектра мощности. Начнем с $\bar{\Gamma}_2$ из (6.22a),

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}'_2(\mathbf{k}, -\mathbf{k}) &= \frac{1}{\bar{P}(k)} = \frac{1}{\bar{P}_{\text{мон}}(k)} - \lambda \frac{\bar{P}_{\text{осц}}(k)}{\bar{P}_{\text{мон}}^2(k)} + O(\lambda^2) \\ &\equiv \bar{\Gamma}'_2{}^{\text{мон}}(\mathbf{k}, -\mathbf{k}) + \lambda \bar{\Gamma}'_2{}^{\text{осц}}(\mathbf{k}, -\mathbf{k}) + O(\lambda^2). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Так как вершина $\bar{\Gamma}'_2$ является затравкой для вершин старших порядков, которые получают из рекурсивного соотношения (6.54a), для них также можно провести аналогичное разложение

$$\bar{\Gamma}'_n = \bar{\Gamma}'_n{}^{\text{мон}} + \lambda \bar{\Gamma}'_n{}^{\text{осц}} + O(\lambda^2). \quad (7.7)$$

Вершины $\bar{\Gamma}'_n{}^{\text{осц}}$ ($\bar{\Gamma}'_n{}^{\text{мон}}$) получаются из $\bar{\Gamma}'_2{}^{\text{осц}}$ ($\bar{\Gamma}'_2{}^{\text{мон}}$) и (6.54a).

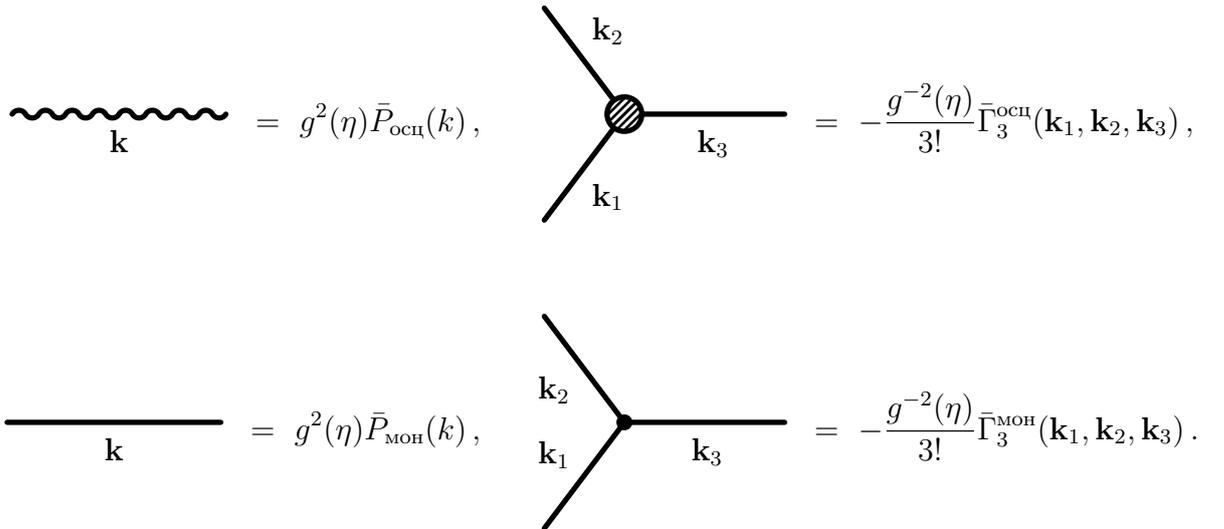


Рис. 7.3. Фейнмановские правила для монотонных и осциллирующих элементов.

Разложение (7.7) может быть подставлено в функцию распределения вероятности

ТВВР

$$\mathcal{P}[\Theta; \eta] = \mathcal{N}^{-1} \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int [dk]^n (\Gamma_n + C_n)(\eta; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \prod_{j=1}^n \Theta(\mathbf{k}_j) \right\}. \quad (7.8)$$

Так как вершины C_n и K_n не являются функционалами начального спектра мощности, они не могут быть разложены на гладкую и монотонные части. Главный порядок $O(\lambda^0)$ соответствует монотонным корреляционным функциям. В порядке $O(\lambda)$ возникают осциллирующие вклады. На языке диаграмм Фейнмана эти вклады могут быть представлены в виде нового осцилляционного пропагатора (обозначаемого волнистой линией) и осцилляционных вершин $\Gamma_n^{\text{осц}}$ (изображаемых заштрихованным кругом), см. Рис 7.3. Для обозначения монотонных вершин будут использованы маленькие точки, для обозначения монотонного пропагатора – прямая линия. В дальнейшем мы будем пренебрегать членами порядка $O(\lambda^2)$, т.е. квадратичными по $P_{\text{осц}}$.

Графы с осцилляционными элементами в дальнейшем будет называться «осциллирующими диаграммами». К примеру, осциллирующий биспектр дивергенции скорости в древесном приближении представлен следующими осциллирующими диаграммами²,

$$\begin{aligned} \langle \Theta_\eta(\mathbf{k}_1) \Theta_\eta(\mathbf{k}_2) \Theta_\eta(\mathbf{k}_3) \rangle_{\text{осц}}^{\text{древ}} &= \text{diag}_1 + \text{diag}_2 + \text{diag}_3 + \text{diag}_4 \quad (7.10) \\ &= -\lambda g^4(\eta) \left(\prod_{i=1}^3 \bar{P}_{\text{мон}}(k_i) \bar{\Gamma}_3^{\text{осц}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) + \sum_{j=1}^3 \bar{P}_{\text{осц}}(k_j) \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq j}}^3 \bar{P}_{\text{мон}}(k_i) \bar{\Gamma}_3^{\text{мон}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \right). \end{aligned}$$

Чтобы получить биспектр плотности материи нужно добавить к выписанным диаграммам еще 6 графов с вершиной K_2 ,

$$\begin{aligned} \Delta \langle \delta_\eta(\mathbf{k}_1) \delta_\eta(\mathbf{k}_2) \delta_\eta(\mathbf{k}_3) \rangle_{\text{осц}}^{\text{древ}} &= \text{diag}_5 + \text{перест.} \quad (7.11) \\ &= -\lambda g^4(\eta) \sum_{i < j=1}^3 (\bar{P}_{\text{осц}}(k_j) \bar{P}_{\text{мон}}(k_i) + \bar{P}_{\text{мон}}(k_j) \bar{P}_{\text{осц}}(k_i)) K_2(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j) \delta^{(3)}\left(\sum_l \mathbf{k}_l\right). \end{aligned}$$

В дальнейшем мы будем полагать $\lambda = 1$ везде, где это не вызовет конфузии.

² В терминах интегральных ядер СТВ (7.10) можно переписать как

$$\begin{aligned} \langle \Theta_\eta(\mathbf{k}_1) \Theta_\eta(\mathbf{k}_2) \Theta_\eta(\mathbf{k}_3) \rangle_{\text{осц}}^{\text{древ}} \\ = 2\lambda g^4(\eta) G_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) (\bar{P}_{\text{мон}}(k_1) \bar{P}_{\text{осц}}(k_2) + \bar{P}_{\text{осц}}(k_2) \bar{P}_{\text{мон}}(k_1)) + \text{перест.} . \end{aligned} \quad (7.9)$$

7.2. ИК – усиленные диаграммы и правила подсчета степеней

Важным преимуществом ТВВР является то, что все её элементы являются ИК конечными. В частности, $\bar{\Gamma}_n$ конечны в пределе $\{q\} \rightarrow 0$, где $\{q\}$ – любой набор аргументов $\bar{\Gamma}_n$. В отличие от ТВВР, в СТВ одиночные вершины имеют полюса по q , которые сокращаются лишь после суммирования всех диаграмм данного петлевого порядка. После учета этих расходимостей петлевое разложение содержит только физические вклады от ИК мод. Если спектр мощности имеет осцилляционную особенность, то петлевые вклады от мод с $q \gtrsim k_{\text{осц}}$ усилены. В данном разделе будет показано, как определять такие вклады в пертурбативном разложении, а также введены правила подсчета степеней, которым предстоит сыграть ключевую роль в пересуммировании усиленных диаграмм.

7.2.1. ИК – усиленные вершины

Рассмотрим n -точечную вершину $\bar{\Gamma}_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)$, чьи аргументы \mathbf{k}_i либо жесткие $\sim k$, либо мягкие $\sim q$, причем справедлива иерархия

$$q/k \ll 1. \quad (7.12)$$

Проанализируем вершину $\bar{\Gamma}_3^{\text{осц}}$. Используя (6.27a), имеем

$$\begin{aligned} & \bar{\Gamma}_3^{\text{осц}}(\mathbf{k}, -\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{q}) \\ &= I_2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \frac{\bar{P}_{\text{осц}}(|\mathbf{k} + \mathbf{q}|)}{\bar{P}_{\text{мон}}^2(|\mathbf{k} + \mathbf{q}|)} + I_2(-\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{q}) \frac{\bar{P}_{\text{осц}}(k)}{\bar{P}_{\text{мон}}^2(k)} + I_2(-\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{k}) \frac{\bar{P}_{\text{осц}}(q)}{\bar{P}_{\text{мон}}^2(q)}, \end{aligned} \quad (7.13)$$

где I_2 дано выражением (6.50b) в точной динамике и (6.43b) в приближении Зельдовича. В пределе (7.12) крайним членом справа в (7.13) можно пренебречь, так как меньше чем $O(q/k)$. Остальные члены приводят к

$$\bar{\Gamma}_3^{\text{осц}}(\mathbf{k}, -\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{q}) = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q^2} \left(\frac{\bar{P}_{\text{осц}}(|\mathbf{k} + \mathbf{q}|) - \bar{P}_{\text{осц}}(k)}{\bar{P}_{\text{мон}}(k)^2} \right) + O((q/k)^0), \quad (7.14)$$

где мы воспользовались тем, что производные гладкой компоненты масштабируются как $1/k$ и поэтому $\bar{P}_{\text{мон}}(|\mathbf{k} + \mathbf{q}|) = \bar{P}_{\text{мон}}(k) + O(q/k)$. В то же время мы сохранили конечную разность для осциллирующей компоненты, которая быстро меняется для $q \gtrsim k_{\text{осц}}$.

Удобно ввести следующий линейный оператор конечной разности

$$\mathcal{D}_{\mathbf{q}}[\bar{P}_{\text{осц}}(k)] = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q^2} \left(\bar{P}_{\text{осц}}(|\mathbf{k} + \mathbf{q}|) - \bar{P}_{\text{осц}}(k) \right) = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q^2} \left(e^{\mathbf{q} \cdot \nabla_{k'}} - 1 \right) \bar{P}_{\text{осц}}(k') \Big|_{k'=k}. \quad (7.15)$$

Данный оператор будет играть ключевую роль в последующем изложении и поэтому полезно обсудить некоторые его свойства. Рассмотрим сначала его действие на чисто гармоническую функцию $e^{ik/k_{\text{осц}}}$, причем нас интересует режим $k \gg k_{\text{осц}}$. Раскладывая экспоненту для малых значений q/k получаем

$$\mathcal{D}_{\mathbf{q}}[e^{ik/k_{\text{осц}}}] \approx \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{q^2} (e^{iq \cos(\mathbf{k}, \mathbf{q})/k_{\text{осц}}} - 1) e^{ik/k_{\text{осц}}}, \quad (7.16)$$

где было введено обозначение $\cos(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{kq}$. Для $q \gtrsim k_{\text{осц}}$ выражение в скобках порядка единицы, в то время как множитель перед скобками усилен как k/q . С другой стороны, в пределе $q \ll k_{\text{осц}}$, ур-е (7.16) принимает вид

$$\mathcal{D}_{\mathbf{q}}[e^{ik/k_{\text{осц}}}] \approx \frac{ik}{k_{\text{осц}}} \cos^2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) e^{ik/k_{\text{осц}}}, \quad (7.17)$$

так что усиливающий множитель становится порядка $k/k_{\text{осц}}$. В более реалистичном случае осциллирующий спектр мощности может быть представлен как гармоническая функция с некоторой монотонной модуляцией, $P_{\text{осц}}(k) \sim f_{\text{мод}}(k)e^{i(k/k_{\text{осц}}+\varphi)}$ +к.с. так что справедливо³ $\nabla f_{\text{мод}}(k) \sim O(1/k)f_{\text{мод}}(k)$. Заметим, что упомянутая выше параметризация (7.5) имеет именно такую форму. Подставляя этот анзац в (7.15) получаем, что производные, действующие на модулирующую функцию, подавлены по сравнению с производными, действующими на осциллирующую часть. Таким образом находим,

$$\mathcal{D}_{\mathbf{q}}[\bar{P}_{\text{осц}}(k)] \sim O(\varepsilon^{-1})\bar{P}_{\text{осц}}(k), \quad (7.18)$$

где был введен малый параметр

$$\varepsilon \equiv \max(q/k, k_{\text{осц}}/k). \quad (7.19)$$

Как мы увидим вскоре, усиление множителями $1/\varepsilon$ и является причиной расходимости петлевого разложение СТВ для сахаровских осцилляций.

Удобно обобщить оператор $\mathcal{D}_{\mathbf{q}}$ так, чтобы он действовал на все осциллирующие элементы. Это делается тривиально в полной аналогии с предыдущим абзацем, поскольку все осциллирующие элементы являются линейными функционалами $P_{\text{осц}}$. Тогда, по определению, $\mathcal{D}_{\mathbf{q}}$ действует на любой $P_{\text{осц}}$ согласно (7.15), и не действует на монотонную часть. К примеру,

$$\mathcal{D}_{\mathbf{q}}[\bar{\Gamma}_3^{\text{осц}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)] \Big|_{\mathbf{k}_3 = -\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2} \equiv \left(\frac{\mathcal{D}_{\mathbf{q}}[\bar{P}_{\text{осц}}(k_1)]}{\bar{P}_{\text{мон}}^2(k_1)} I_2(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) + \text{перест.} \right) \Big|_{\mathbf{k}_3 = -\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}, \quad (7.20)$$

³ Строго говоря, из-за подавления Силка $\nabla f_{\text{мод}}(k) \sim O(\max(1/k, 1/k_{\text{Силк}}))f_{\text{мод}}(k)$. Интересующие нас импульсы k , однако, совпадают по порядку величины с $k_{\text{Силк}}$, так что использование оценки $\nabla f_{\text{мод}}(k) \sim O(1/k)f_{\text{мод}}(k)$ вполне оправдано.

и аналогично для остальных $\bar{\Gamma}_n^{\text{осц}}$. Отметим, что очевидным следствием данного определения является то, что $\mathcal{D}_{\mathbf{q}}$ коммутирует сам с собой

$$\mathcal{D}_{\mathbf{q}_1} \mathcal{D}_{\mathbf{q}_2} \bar{\Gamma}_n^{\text{осц}} = \mathcal{D}_{\mathbf{q}_2} \mathcal{D}_{\mathbf{q}_1} \bar{\Gamma}_n^{\text{осц}} \quad (7.21)$$

Результат (7.14) для 3-х точечной вершины может быть обобщен по индукции для произвольной n -точечной функции с m жесткими импульсами \mathbf{k}_i и $n - m$ мягкими импульсами \mathbf{q}_j равномерно стремящимися в ноль подобно (6.56). Таким образом можно доказать следующую асимптотическую формулу

$$\begin{aligned} & \bar{\Gamma}_n^{\text{осц}} \left(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m - \sum_{j=1}^{n-m} \mathbf{q}_j, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n-m} \right) \\ &= (-1)^{n-m} \left(\prod_{j=1}^{n-m} \mathcal{D}_{\mathbf{q}_j} \right) [\bar{\Gamma}_m^{\text{осц}}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m)] \times (1 + O(\varepsilon)), \end{aligned} \quad (7.22)$$

где по закону сохранения импульса $\mathbf{k}_m = -\sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{k}_i + O(\varepsilon)$. Отметим, что лидирующее ИК усиление $\propto (1/\varepsilon)^{n-m}$ определяется числом мягких импульсов среди аргументов вершинной функции. Максимальное усиление имеет место в случае $n - 2$ мягких импульсов в вершине,

$$\begin{aligned} & \bar{\Gamma}_n^{\text{осц}} \left(\mathbf{k}, -\mathbf{k} - \sum_{i=1}^{n-2} \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n-2} \right) = (-1)^{n-2} \left(\prod_{i=1}^{n-2} \mathcal{D}_{\mathbf{q}_i} \right) [\Gamma_2^{\text{осц}}(\mathbf{k}, -\mathbf{k})] \times (1 + O(\varepsilon)) \\ &= (-1)^{n-1} \left[\prod_{i=1}^{n-2} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}_i)}{q_i^2} (e^{\mathbf{q}_i \cdot \nabla_{\mathbf{k}'}} - 1) \right] \frac{\bar{P}_{\text{осц}}(k')}{\bar{P}_{\text{мон}}^2(k)} \Big|_{\mathbf{k}'=\mathbf{k}} \times (1 + O(\varepsilon)), \end{aligned} \quad (7.23)$$

которая при этом шкалируется как $O(\varepsilon^{-n+2})$. Очевидно, что чувствительность вершин $\bar{\Gamma}_n^{\text{осц}}$ к большому параметру $1/\varepsilon$ растет с числом n . В последующих разделах будет показано, что эти большие поправки могут быть систематически пересуммированы.

7.2.2. Главные диаграммы и правила подсчета степеней

Рассмотрим петлевую диаграмму, содержащую вершинную функцию $\Gamma_n^{\text{осц}}$ с m внешними ногами и $(n - m)$ ногами, спаренными в петли. Как было показано ранее, эта вершина усилена степенями $1/\varepsilon$ если её аргументы \mathbf{q}_j , текущие по петле, становятся мягкими по сравнению с внешним импульсом \mathbf{k}_i . Чтобы вычислить соответствующий вклад, мы разделим петлевое интегрирование на мягкий домен с $q < k_S$ и жесткий домен с $q > k_S$. Масштаб разделения k_S , в принципе, является произвольным, и наблюдаемые не должны зависеть от его значения. Разделение масштабов необходимо для разделения петлевых интегралов на ИК и УФ домены и последующего пересуммирования вкладов первого типа. Любая остаточная зависимость от k_S должна быть рассмотрена как теоретическая неопределенность,

которая должна становиться меньше и меньше при вычислениях в старших порядках. На практике, СО в основном подвержены влиянию мод с q в диапазоне между $k_{\text{осц}}$ и $k_{\text{Силк}}$, так что использование $k_{\text{осц}} < k_S < k_{\text{Силк}}$ должно приводить к хорошей сходимости. Этот вопрос будет обсужден в разделе 7.6.

В описании петлевого ИК – усиления эффективным параметром разложения является (см. (7.19))

$$\varepsilon = \frac{\langle q \rangle}{k}, \quad (7.24)$$

где $k_{\text{осц}} < \langle q \rangle < k_S$ – характерный масштаб, на котором петлевые интегралы насыщаются в инфракрасном домене. Как станет ясно при рассмотрении итоговых результатов (7.28), (7.73), максимум подынтегрального выражения в ИК – усиленных петлевых вкладах совпадает с максимумом линейного спектра мощности, т.е. $\langle q \rangle \sim k_{\text{eq}}$.

В дополнение к ε , еще один параметр, возникающий в петлевом разложении, связан с дисперсией линейного поля плотности, которая определяется, в сущности, монотонной компонентой $P_{\text{мон}}$. Из-за разделения петлевых интегралов на ИК (мягкие моды) и УФ (жесткие моды) домены, нужно рассматривать дисперсию для каждого из доменов

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{мягк}}^2 &\equiv g^2 \int_{q < k_S} d^3 q \bar{P}_{\text{мягк}}(q), \\ \sigma_{\text{жест}}^2 &\equiv g^2 \int_{q > k_S} d^3 q \bar{P}_{\text{жест}}(q). \end{aligned} \quad (7.25)$$

В случае реалистичной Λ CDM космологии $\sigma_{\text{мягк}}^2 \sim 0.16g^2$ (напомним что $g \equiv D(z)$) для выбора $k_S = 0.1h/\text{Мпк}$, в то время как $\sigma_{\text{жест}}^2$ формально расходится в УФ. На практике, однако, жесткие части петлевых поправок, которые мы формально обозначаем $\sigma_{\text{жест}}^2$, сходятся из-за дополнительного подавления подынтегральных выражений зависящими от импульса вершинами взаимодействия. Все петлевые поправки, кроме первой, насыщаются в УФ области и их надежное вычисление, вообще говоря, требует УФ перенормировки вкладов от коротковолновых мод. Несмотря на то, что важность УФ контрчленов возрастает на коротких масштабах и в старших порядках теории возмущений, хорошо известно, что однопетлевой вклад имеет слабую чувствительность к УФ модам и дает поправку $\sim 10\%$ от линейного спектра мощности на $z = 0$ на масштабах СО. Изучение УФ контрчленов в ТВВР будет проведено в последующих работах, а во всех практических приложениях этой главы взаимодействие с жесткими модами будет рассмотрено в однопетлевом приближении. В дальнейшем $\sigma_{\text{жест}}^2$ будет использован как формальный параметр для подсчета жестких петель.

Хотя ИК дисперсия $\sigma_{\text{мягк}}^2$ является численно весьма малой, она будет усилена множителями $1/\varepsilon^2 \sim O(10)$ в петлевых интегралах для осциллирующих частей корреляционных функций. Конечная поправка может быть оценена как $\sigma_{\text{мягк}}^2 \times 1/\varepsilon^2 \sim O(1)$ на малых красных смещениях, что указывает на необходимость пересуммирования таких вкладов. Рассмотрим для начала 1–петлевую поправку к осциллирующей части спектра мощности поля Θ , которая имеет следующее диаграммное представление

$$\begin{aligned}
P_{\text{осц}, \Theta \Theta}^{1\text{-петл}}(\eta; k) = & \bar{\Gamma}_3^{\text{МОН}} \text{ (loop) } \bar{\Gamma}_3^{\text{МОН}} + \bar{\Gamma}_4^{\text{МОН}} \text{ (blob) } + \bar{\Gamma}_3^{\text{МОН}} \text{ (loop) } \bar{\Gamma}_3^{\text{МОН}} + \bar{\Gamma}_4^{\text{МОН}} \text{ (loop) } \\
& + \bar{\Gamma}_3^{\text{ОСЦ}} \text{ (loop) } \bar{\Gamma}_3^{\text{МОН}} + \bar{\Gamma}_4^{\text{ОСЦ}} \text{ (loop) } .
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Петлевой импульс в каждой диаграмме может быть либо жестким $q > k_S$, в этом случае каждой диаграмме соответствует параметр $\sigma_{\text{жест}}^2$, либо мягким, $q < k_S$, в случае чего они шкалируются как $\sigma_{\text{мягк}}^2$. Только мягкие вклады усилены в ИК, обсудим сначала правила подсчета степеней для них. Диаграммы в первой строке (7.26) никогда не усилены в ИК, т.е. они имеют порядок $\varepsilon^0 \times \sigma_{\text{мягк}}^2$, так как они не содержат осциллирующих вершин. Напомним, что лишь диаграммы с осциллирующими вершинами приобретают ИК усиление. Первая диаграмма во второй строке содержит вершину $\Gamma_3^{\text{осц}}$ и согласно (7.23), (7.18) имеет порядок $1/\varepsilon \times \sigma_{\text{мягк}}^2$. Последняя диаграмма содержит $\Gamma_4^{\text{осц}}$, и используя (7.23), (7.18) получаем, что её порядок $1/\varepsilon^2 \times \sigma_{\text{мягк}}^2$, т.е. она является наиболее усиленной в ИК в однопетлевом порядке. Она равна

$$\bar{\Gamma}_4^{\text{осц}} \text{ (loop) } = \frac{g^2}{2} \int_{q \leq k_S} [dq] \bar{P}_{\text{мон}}(q) \mathcal{D}_{\mathbf{q}} \mathcal{D}_{-\mathbf{q}} P_{\text{осц}}(\eta; k) \equiv -g^2 \mathcal{S} P_{\text{осц}}(\eta; k), \tag{7.27}$$

где оператор \mathcal{S} определен как

$$\mathcal{S} P_{\text{осц}}(\eta; k) = \int_{q \leq k_S} [dq] \bar{P}_{\text{мон}}(q) \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})^2}{q^4} (1 - \cosh(\mathbf{q} \cdot \nabla_{k'})) P_{\text{осц}}(\eta; k') \Big|_{k'=k} \tag{7.28}$$

В рамках нашего правила подсчета степеней, имеем

$$\mathcal{S} P_{\text{осц}}(\eta; k) \sim O(1/\varepsilon^2 \times \sigma_{\text{мягк}}^2) P_{\text{осц}}(\eta; k). \tag{7.29}$$

Как обсуждено ранее, произведение $1/\varepsilon^2 \times \sigma_{\text{мягк}}^2$ порядка единицы на малых красных смещениях и поэтому данная однопетлевая поправка сравнима с линейным осциллирующим спектром.

Чтобы выделить и в конечном итоге пересуммировать все подобные слагаемые обсудим, как определить порядок величины произвольной L – петлевой диаграммы в рамках правил подсчета степеней. Наши рассуждения будут справедливы для любой n – точечной корреляционной функции с внешними импульсами порядка масштаба СО $k_{\text{Силк}} \gtrsim k_i \gg k_S, k_{\text{осц}}$. Рисуя диаграмму с L петлями, (т.е. шкалирующуюся как g^{2L} в разложении ТВВР), необходимо:

1. выбрать для каждого пропагатора и каждой вершины, является ли она монотонной или осциллирующей. Так как мы интересуемся только слагаемыми с одной степенью $P_{\text{осц}}$, можно выбрать только один осциллирующий элемент (т.е. либо пропагатор, либо вершина). Чтобы получить конечное выражение для соответствующей осциллирующей корреляционной функции, необходимо просуммировать диаграммы со всеми возможными вставками осциллирующих пропагаторов и вершин.
2. Решить для каждой петли, является ли она жесткой ($q > k_S$) или мягкой ($q < k_S$). Формально это можно сделать разделяя линейный спектр мощности на две части посредством $P_{\text{лин}}(q) = \theta(q - k_S)P_{\text{лин}}(q) + \theta(k_S - q)P_{\text{лин}}(q)$ (где $\theta(x)$ – ступенчатая функция Хевисайда) и считая, что петля жесткая если все пропагаторы и вершины в петле содержат только жесткие спектры мощности⁴. Количество жестких петель обозначим $L_{\text{жест}}$, а количество мягких петель – $L_{\text{мягк}}$. Очевидно, что $L = L_{\text{жест}} + L_{\text{мягк}}$, что даёт общий порядок диаграммы по спектрам мощности $(\sigma_{\text{мягк}}^2)^{L_{\text{мягк}}} \times (\sigma_{\text{жест}}^2)^{L_{\text{жест}}}$.
3. Посчитать количество мягких ног, входящих в осциллирующую вершину. Обозначим это число l . Согласно (7.23), итоговое ИК – усиление в этом случае порядка $1/\varepsilon^l$.

Порядок диаграммы, характеризующейся числами $(L_{\text{жест}}, L_{\text{мягк}}, l)$, равен⁵

$$O \left((\sigma_{\text{мягк}}^2)^{L_{\text{мягк}}} \times (\sigma_{\text{жест}}^2)^{L_{\text{жест}}} \times 1/\varepsilon^l \right). \quad (7.30)$$

Если диаграмма не содержит ни одной осциллирующей вершины, $l = 0$, то никакого ИК усиления не происходит. Наиболее усиленные диаграммы должны иметь наибольшее значение l . Так как каждая петля может быть образована максимум двумя ногами, выходящими из

⁴ Строго говоря, разделение на мягкие и жесткие домены важно только для петлевых поправок, имеющих осциллирующие вершины. Для других петель, т.к. $\sigma_{\text{мягк}}^2 + \sigma_{\text{жест}}^2 \approx \sigma_{\text{жест}}^2$ в реалистичной космологии, с хорошей точностью неважно, сделано ли это разделение, или нет.

⁵ Подчеркнем, что это даёт лишь верхнюю оценку порядка величины этого вклада. Как мы увидим в дальнейшем, некоторые вклады на самом деле существенно подавлены по сравнению с этой оценкой.

вершины, справедливо $l \leq 2L_{\text{мягк}}$. Это значит, что наиболее ИК усиленные вклады имеют порядок $(\sigma_{\text{мягк}}^2/\epsilon^2)^{L_{\text{мягк}}} \times (\sigma_{\text{жест}}^2)^{L_{\text{жест}}}$. Так как $\sigma_{\text{мягк}}^2/\epsilon^2 \sim O(1)$ на поздних временах, диаграммы с максимальным усилением $l = 2L_{\text{мягк}}$ должны быть пересуммированы, чему и посвящен следующий раздел.

7.3. Пересуммирование инфракрасных эффектов в главном порядке

В этом разделе будут пересуммированы лидирующие в ИК вклады в петлевом разложении для осциллирующих элементов. Сначала будет рассмотрен спектр мощности, а затем результаты будут обобщены на случай корреляционных функций старших порядков. В данном разделе мы будем интересоваться поправками порядка $(\sigma_{\text{жест}}^2)^0$, т.е. пренебрегать жесткими петлями, которые будут рассмотрены в следующем разделе.

7.3.1. Спектр мощности

Наиболее ИК – усиленные вклады даны диаграммами с $l = 2L_{\text{мягк}}$ и $L_{\text{жест}} = 0$, т.е. все петли мягкие и они содержат по одной осциллирующей вершине с $l = 2L_{\text{мягк}}$ мягкими ногами. В одной петле наиболее усиленная диаграмма – *лепесток* из (7.27) с $L_{\text{мягк}} = 1$ мягкими петлями и $l = 2$ мягкими ногами выходящими из $\bar{\Gamma}_4^{\text{осц}}$, которые и формируют петлю. В двухпетлевом порядке $L_{\text{мягк}} = 2$ и наиболее ИК – усиленная диаграмма должна содержать осциллирующую вершину с $l = 4$ мягкими ногами. Помимо этого нужно, чтобы какие-либо ноги были жесткими, и при $L_{\text{жест}} = 0$ это могут быть только ноги с внешними импульсами. Следовательно, наиболее усиленная диаграмма должна содержать осциллирующую вершину $\bar{\Gamma}_6^{\text{осц}}$ с 4 мягкими импульсами–аргументами, формирующими петли и двумя жесткими импульсами, которые соответствуют двум внешним ногам. Данная диаграмма – снова диаграмма типа *ромашка*, которая на этот раз содержит два *лепестка*. Продолжая рассуждения можно прийти к выводу, что в произвольном петлевом порядке L наиболее усиленной диаграммой будет *ромашка* с $2L - 2$ лепестками из мягких петель. Несколько таких диаграмм из низших порядков теории возмущений изображены на Рис. 7.2. Отметим, что лидирующие ИК – поправки имеют одну и ту же форму для спектров мощности плотности и дивергенции скорости. В этом просто убедиться вспомнив, что спектр мощности δ получается из спектра мощности Θ путем его суммирования с диаграммами, содержащими ядра K_n . Эти ядра не зависят от спектра мощности, и поэтому не могут быть ИК усилены.

Иными словами, диаграммы с составными источниками K_n всегда подавлены по сравнению с ромашками.

Диаграмма – ромашка с L мягкими петлями (т.е. $L_{\text{мягк}} = L$), дана выражением

$$P_{\text{осц}}^{\text{L-петл, ГП}}(\eta; k) = -\frac{1}{(2L+2)!} \cdot (2L+2)(2L+1)(2L-1)!! \times \prod_{i=1}^L \left[\int_{q_i \leq k_S} [dq_i] g^2 \bar{P}_{\text{мон}}(q_i) \right] g^4 \bar{P}_{\text{мон}}(k)^2 g^{-2} \bar{\Gamma}_{2L+2}^{\text{осц, ГП}}(\mathbf{k}, -\mathbf{k}, \mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_L, -\mathbf{q}_L). \quad (7.31)$$

Симметричный фактор в этой формуле вычислен следующим образом: есть $(2L+2)(2L+1)$ способов выбрать две исходящих ноги и $(2L-1) \cdot (2L-3) \cdot \dots \cdot 1$ способов соединить оставшиеся ноги в петли. Используя (7.23), имеем

$$P_{\text{осц}}^{\text{L-петл, ГП}}(\eta; k) = \frac{1}{L!} \prod_{i=1}^L \left[\frac{g^2}{2} \int_{q_i \leq k_S} [dq_i] \bar{P}_{\text{мон}}(q_i) \mathcal{D}_{\mathbf{q}_i} \mathcal{D}_{-\mathbf{q}_i} \right] P_{\text{осц}}(\eta; k) = \frac{(-g^2(\eta)\mathcal{S})^L}{L!} P_{\text{осц}}(\eta; k), \quad (7.32)$$

где оператор \mathcal{S} определен в (7.27). Сумма по всем ромашкам приводит к следующему выражению для ИК – пересуммированного осциллирующего спектра мощности

$$P_{\text{осц}}^{\text{ИК-пер, ГП}}(\eta, k) = \sum_{L=0}^{\infty} P_{\text{осц}}^{\text{L-петл, ГП}}(\eta; k) = e^{-g^2(\eta)\mathcal{S}} P_{\text{осц}}(\eta; k). \quad (7.33)$$

Как видно, оператор \mathcal{S} экспоненцируется.

Полный спектр мощности получается добавлением монотонной части, которая в рассматриваемом порядке по ИК вкладам должна быть взята в древесном приближении,

$$P^{\text{ИК-пер, ГП}} = P_{\text{мон}}(\eta; k) + e^{-g^2(\eta)\mathcal{S}} P_{\text{осц}}(\eta; k). \quad (7.34)$$

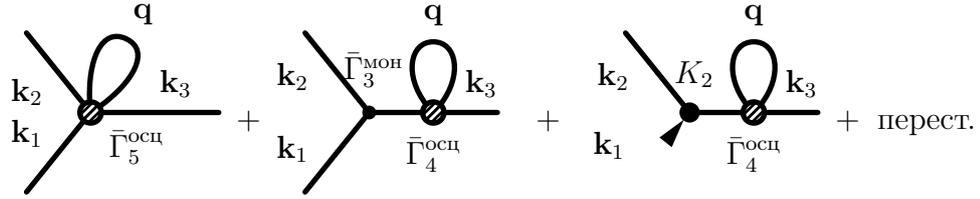
Стоит отметить, что это выражение справедливо для обоих спектров мощности: дивергенции скорости и плотности. Помимо этого, оно одинаково в точной динамике и в приближении Зельдовича, так как (7.23) справедливо для обоих этих случаев. Разница между δ и Θ появляется как в многоточечных корреляционных функциях, так и в первом порядке малости для спектра мощности.

7.3.2. Биспектр и n -точечные корреляционные функции

В этом разделе мы распространим процедуру пересуммирования на корреляционные функции старших порядков. Обсудим сначала биспектр, а затем и произвольную n -точечную функцию.

Осциллирующая часть древесного биспектра дивергенции скорости даётся четырьмя графами (7.10), в то время как для биспектра плотности нужно добавить еще дополнительные графы (7.11). В однопетлевом приближении в предположении, что все внешние волновые числа жесткие, наиболее усиленный вклад получается путем «одевания» всех осциллирующих вершин и пропагаторов (7.10), (7.11) мягкими петлями ($q < k_S$), которые стыкуются с помощью осциллирующих вершин,

$$B_{\text{осц},\delta\delta\delta}^{1\text{-петл.},\Gamma\Pi}(\eta; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \quad (7.35)$$



В рамках правил подсчета степеней, эти диаграммы усилены множителем $\sigma_L^2 \times 1/\varepsilon^2$ по сравнению с древесным биспектром. Используя те же аргументы, что для спектра мощности, находим, что в старших петлевых порядках наиболее усиленные ИК-вклады представлены диаграммами – *ромашками*, полученными путем прикрепления мягких петель к осциллирующим вершинам, имеющимся в диаграммах (7.35). Параметрически, эти L -петлевые диаграммы шкалируются как

$$B_{\text{осц},\delta\delta\delta}^{L\text{-петл.},\Gamma\Pi} \sim (\sigma_L^2/\varepsilon^2)^L B_{\text{осц},\delta\delta\delta}^{\text{древ}} \quad (7.36)$$

и должны быть пересуммированы.

Ромашки, полученные одеванием пропагаторов (напр. второй и третий члены в (7.35)) аналогичны тем, что фигурировали при пересуммировании спектра мощности в предыдущем разделе. Их пересуммирование ведет к замене внешних осциллирующих пропагаторов на пропагаторы пересуммированные в древесном приближении,

$$\bar{P}_{\text{осц}} \mapsto e^{-g^2\mathcal{S}} \bar{P}_{\text{осц}} \quad (7.37)$$

Новый тип поправок, с которыми придется иметь дело – одночастично-неприводимые диаграммы с мягкими петлями, одетыми на 3-х точечную вершину (см. напр. первую диаграмму в (7.35)). Рассмотрим общим случай осциллирующей вершины с n жесткими импульсами,

которая одета в L мягких петель,

$$\begin{aligned}
V_{\text{осц},n}^{L\text{-петл}} &= \text{Diagram} \\
&= \frac{1}{(n+2L)!} \cdot (2L+n)\dots(2L+1) \cdot (2L-1)!! \\
&\quad \times \prod_{i=1}^L \left[\int_{q_i \leq k_S} [dq_i] g^2 \bar{P}_{\text{мон}}(q_i) \right] g^{-2} \bar{\Gamma}'_{n+2L}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n, \mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_L, -\mathbf{q}_L)
\end{aligned} \tag{7.38}$$

Используя (7.22), получаем для лидирующего ИК вклада,

$$V_{\text{осц},n}^{L\text{-петл}, \text{ГП}} = \frac{(-g^2 \mathcal{S})^L}{L!} g^{-2} \bar{\Gamma}'_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n). \tag{7.39}$$

Очевидно, что пересуммирование этих диаграмм приводит к формальной замене осциллирующей вершины на её пересуммированную версию,

$$\bar{\Gamma}'_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \mapsto \exp\{-g^2 \mathcal{S}\} \bar{\Gamma}_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n). \tag{7.40}$$

Собирая все диаграммы вместе, получаем выражение для пересуммированного биспектра

$$\begin{aligned}
B_{\text{осц},\delta\delta\delta}^{\text{ИК-пер}, \text{ГП}}(\eta; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= -g^4(\eta) \delta^{(3)}\left(\sum_l \mathbf{k}_l\right) \left[\prod_{i=1}^3 \bar{P}_{\text{мон}}(k_i) e^{-g^2(\eta)\mathcal{S}} \bar{\Gamma}'_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \right. \\
&+ \sum_{j=1}^3 e^{-g^2(\eta)\mathcal{S}} \bar{P}_{\text{осц}}(k_j) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^3 \bar{P}_{\text{мон}}(k_i) \bar{\Gamma}'_3^{\text{МОН}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \\
&+ \left. \sum_{i < j=1}^3 e^{-g^2(\eta)\mathcal{S}} \left(\bar{P}_{\text{осц}}(k_j) \bar{P}_{\text{мон}}(k_i) + \bar{P}_{\text{мон}}(k_j) \bar{P}_{\text{осц}}(k_i) \right) K_2(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j) \right] \\
&= e^{-g^2(\eta)\mathcal{S}} B_{\text{осц},\delta\delta\delta}^{\text{ДРЕВ}}(\eta; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3).
\end{aligned} \tag{7.41}$$

Напомним, что в последнем выражении оператор $e^{-g^2 \mathcal{S}}$ действует на все $P_{\text{осц}}$, которые появляются в правой части. На языке ядер СТВ, (7.41) может быть переписано в виде

$$B_{\text{осц},\delta\delta\delta}^{\text{ИК-пер}, \text{ГП}}(\eta; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = 2 \sum_{i < j=1}^3 F_2(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j) e^{-g^2(\eta)\mathcal{S}} (P_{\text{осц}}(\eta; k_j) P_{\text{мон}}(\eta; k_i) + i \leftrightarrow j). \tag{7.42}$$

Полный биспектр получается путем добавления к этому выражению монотонной древесной части.

Данный результат может быть обобщен на случай любой одновременной n -точечной функции $\mathfrak{C}_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)$ полей δ или Θ с жесткими внешними ногами. А именно, ИК пересуммирование в лидирующем порядке заключается в простой замене осциллирующей части линейного спектра мощности $P_{\text{осц}}$, содержащейся в осциллирующих вершинах и пропагаторах, на пересуммированное выражение $e^{-g^2 \mathcal{S}} P_{\text{осц}}$. В краткой форме это можно записать как

$$\mathfrak{C}_n^{\text{ИК-пер, ГП}}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \mathfrak{C}_n^{\text{древ}}[P_{\text{мон}} + e^{-g^2 \mathcal{S}} P_{\text{осц}}](\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n), \quad (7.43)$$

где $\mathfrak{C}_n^{\text{древ}}$ рассматривается как функционал линейного спектра мощности.

7.4. Учет жестких петель

В предыдущих разделах были пересуммированы вклады, которые по правилам подсчета степеней шкалируются как $(\sigma_{\text{жест}}^2)^0 \times (\sigma_{\text{мягк}}^2 \times 1/\varepsilon^2)^{L_{\text{мягк}}}$. Теперь рассмотрим поправки к этим вкладам. Можно выделить два типа таких поправок первого порядка малости (ППМ):

- (1) мягкие диаграммы с немаксимальным ИК усилением, характеризующиеся числом мягких ног $l = 2L_{\text{мягк}} - 1$ (см. (7.30)), а также сублидирующие вклады из диаграмм-ромашек, рассмотренных в разделе 7.3. Последние подавлены одной степенью ε по сравнению с главным порядком.
- (2) Диаграммы с одной жесткой петлей, $L_{\text{жест}} = 1$ и максимальным ИК – усилением $l = 2L_{\text{мягк}}$. Данные диаграммы подавлены одним множителем $\sigma_{\text{жест}}^2$ по сравнению с главным порядком.

Данные два типа поправок будут называться, соответственно, ППМ_{мягк} и ППМ_{жест}. Все вместе они дают полную поправку первого порядка малости. В данном разделе будут проанализированы вклады второго типа, а поправки ППМ_{мягк} будут проанализированы в следующем разделе.

Рассмотрим жесткие 1-петлевые поправки к осциллирующему спектру мощности поля

ПЛОТНОСТИ,

$$\begin{aligned}
P_{\text{осц},\delta\bar{\delta}}^{1\text{-петл}}(\eta; k) \Big|_{\text{жест}} = & \text{diagram}_1 + \text{diagram}_2 + \text{diagram}_3 \\
& + \text{diagram}_4 + \text{diagram}_5 \\
& + \text{diagram}_6 + \text{diagram}_7 \\
& + \text{diagram}_8 + \text{diagram}_9 + \text{diagram}_{10} \\
& + \text{diagram}_{11} + \text{diagram}_{12} + \text{diagram}_{13}
\end{aligned} \tag{7.44}$$

где волновое число p в жестких петлях больше разделительного импульса k_S , $p > k_S$. Отметим появление диаграмм с контрчленом C_2 во второй строке. Аналогично случаю древесного биспектра, все осциллирующие элементы в этих графах могут быть одеты мягкими петлями, которые будет обеспечивать усиление порядка

$$\sigma_{\text{жест}}^2 \times (\sigma_{\text{мягк}}^2 \times 1/\varepsilon^2)^{L_{\text{мягк}}} . \tag{7.45}$$

Пересуммирование этих поправок происходит полностью аналогично многоточечным корреляционным функциям, ключевую роль играют соотношения (7.38), (7.39), которые приводят к

$$P_{\text{осц},\delta\bar{\delta}}^{\text{ИК-пер,ППМ}_{\text{жест}}}(\eta; k) = e^{-g^2(\eta)S} P_{\text{осц},\delta\bar{\delta}}^{1\text{-петл}}(\eta; k) \Big|_{\text{жест}} , \tag{7.46}$$

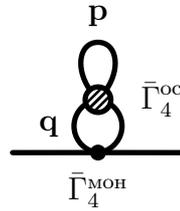
где правая часть обозначает однопетлевые диаграммы (7.44) вычисленные с использованием пересуммированного спектра мощности $e^{-g^2S} P_{\text{осц}}$ вместо обычного $P_{\text{осц}}$.

Следует обратить внимание на два нюанса. Во – первых, диаграммы в третьей и четвертых строках (7.44), так же как их производные, полученные одеванием мягких петель, содержат осциллирующие спектры мощности внутри петель. Отсюда следует, что соответствующие подынтегральные выражения быстро осциллируют, что приводит к подавлению интегралов, которые должны быть существенно меньше наивной оценки (7.45). Это подавление, формально, экспоненциальное, что следует из общей формулы для Фурье – образа гладкой функции

$$\int [dp] \sin(p/k_{\text{осц}}) f_{\text{глад}}(p/k) \sim e^{-k/k_{\text{осц}}} \sim e^{-1/\varepsilon} .$$

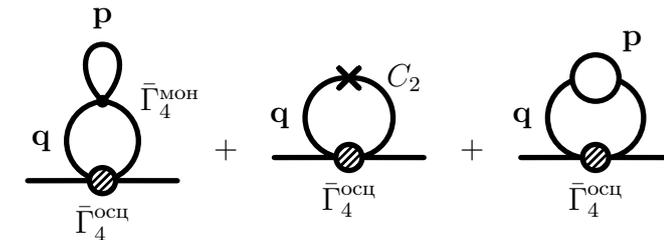
С точки зрения правил подсчета степеней данные поправки являются непертурбативными и могут быть включены или исключены из разложения без изменения точности пертурбативных вычислений. В дальнейшем мы сохраним эти вклады в итоговых выражениях для того, чтобы выражение для пересуммированных корреляционных функций имело компактную форму (7.46).

Во-вторых, можно заметить, что набор диаграмм, полученные одеванием (7.44) в мягкие петли, не исчерпывает всех возможных диаграмм в формальном порядке (7.45) по правилам подсчета степеней раздела 7.2.2. Оставшиеся диаграммы принадлежат двум категориям. Во-первых, есть диаграммы, в которых жесткая петля пристыкована к мягкой с помощью осциллирующей вершины, например,



$$(7.47)$$

Такие диаграммы, однако, обязательно должны содержать осциллирующую вершину внутри жесткой петли и поэтому, согласно рассуждениям предыдущего абзаца, экспоненциально подавлены. Другой набор диаграмм представлен графами, в которых жесткая петля прикреплена к мягкой с помощью монотонной вершины, к примеру,



$$(7.48)$$

$$= \frac{g^2}{2} \int_{q \leq k_S} [dq] P_{\text{мон}, \Theta}^{1\text{-петл}}(q) \Big|_{\text{жест}} \mathcal{D}_q \mathcal{D}_{-q} P_{\text{осц}}(\eta; k).$$

Поддиаграммы, прикрепленные к мягкой петле, комбинируются в спектр мощности дивергенции скорости $P_{\text{мон}, \Theta}^{1\text{-петл}}(\eta; q)$. Как было обсуждено ранее, наличие жесткой части означает, по определению, что петлевое интегрирование в $P_{\text{мон}, \Theta}^{1\text{-петл}}(q)$ ограничено импульсами $p > k_S$. Данная поправка может быть интерпретирована как однопетлевая поправка к оператору \mathcal{S} , что предполагает замену монотонного спектра мощности в \mathcal{S} на $P_{\text{мон}} \mapsto P_{\text{мон}} + P_{\text{мон}, \Theta}^{1\text{-петл}} \Big|_{\text{жест}}$. Данная замена кажется вполне естественной, но мы откажемся от неё по двум причинам.

Во-первых, это соответствует частичному пересуммированию жестких петель, и поэтому противоречит нашему разложению в рамках правила подсчета степеней. Во вторых, и что более важно, вклады от жестких петель в спектр мощности имеют универсальное подавление q^2/k_S^2 при малых импульсах $q \ll k_S$ согласно аргументу о разделении коротковолновых и длинноволновых мод [32, 153]. Данное подавление, в сущности, сокращает ИК усиление в операторе $\mathcal{D}_{\mathbf{q}}\mathcal{D}_{-\mathbf{q}}$ в (7.48), так что член (7.48) оказывается подавлен множителем $\langle q \rangle^2/k_S^2$ по сравнению с вкладом, пересуммированными в (7.46). В этом выражении $\langle q \rangle$ – характерный ИК масштаб, который, как обсуждено в разделе 7.2.2, порядка k_{eq} . Таким образом вклад (7.48) мал при условии $k_{eq} \ll k_S$. В реалистичной Вселенной иерархия между k_S и k_{eq} не может быть слишком большой. Несмотря на это, было численно проверено, что в стандартной Λ CDM космологии для реалистичных значений $k_S \sim O(0.1h/\text{Мпк})$, вклад (7.48) численно весьма мал (меньше 1%). В связи с этим в дальнейшем мы будем пренебрегать диаграммами с жесткой петлей внутри мягкой петли.

Выражение (7.46) может быть приведено к более удобной форме. Добавим и вычтем мягкую часть однопетлевых диаграмм,

$$\begin{aligned} P_{\text{осц},\delta\delta}^{\text{ИК-пер, ППМ}_{\text{жест}}} &= e^{-g^2\mathcal{S}} P_{\text{осц},\delta\delta}^{1\text{-петл}} \Big|_{\text{жест}} + e^{-g^2\mathcal{S}} P_{\text{осц},\delta\delta}^{1\text{-петл}} \Big|_{\text{мягк}} - e^{-g^2\mathcal{S}} P_{\text{осц},\delta\delta}^{1\text{-петл}} \Big|_{\text{мягк}} \\ &= e^{-g^2\mathcal{S}} P_{\text{осц},\delta\delta}^{1\text{-петл}} + e^{-g^2\mathcal{S}} g^2 \mathcal{S} P_{\text{осц}} , \end{aligned} \quad (7.49)$$

где в последней строке $P_{\text{осц},\delta\delta}^{1\text{-петл}}$ обозначает *полную* однопетлевую поправку и было использовано ур-е (7.27). Комбинируя это выражение с однопетлевой поправкой к монотонному спектру мощности и результатом пересуммирования в главном порядке (7.34) получаем окончательное выражение для спектра мощности в первом жестком порядке малости $\text{ППМ}_{\text{жест}}$,

$$P_{\delta\delta}^{\text{ИК-пер, ГП+ППМ}_{\text{жест}}} = P_{\text{мон}} + (1 + g^2\mathcal{S})e^{-g^2\mathcal{S}} P_{\text{осц}} + P_{\delta\delta}^{1\text{-петл}} [P_{\text{мон}} + e^{-g^2\mathcal{S}} P_{\text{осц}}] . \quad (7.50)$$

В этом выражении $P_{\delta\delta}^{1\text{-петл}}$ нужно понимать как функционал начального спектра мощности, который должен быть заменен на ИК – пересуммированный. Отметим появление члена $g^2\mathcal{S}e^{-g^2\mathcal{S}} P_{\text{осц}}$ в древесной части выражения (7.50), который важен для того, чтобы избежать повторного учета одной и той же поправки.

Формула (7.50) может быть тривиально обобщена на случай n -точечных корреляционных функций плотности и дивергенции скорости,

$$\mathfrak{C}_n^{\text{ИК-пер, ГП+ППМ}_{\text{жест}}} = \mathfrak{C}_n^{\text{древ}} [P_{\text{мон}} + (1 + g^2\mathcal{S})e^{-g^2\mathcal{S}} P_{\text{осц}}] + \mathfrak{C}_n^{1\text{-петл}} [P_{\text{мон}} + e^{-g^2\mathcal{S}} P_{\text{осц}}] . \quad (7.51)$$

Также возможно включить жесткие поправки старших петлевых порядков, т.е. поправки порядка $\sigma_{\text{жест}}^{2L_{\text{жест}}}$ с $L_{\text{жест}} \geq 2$. Продемонстрируем это для спектра мощности ⁶. Повторяя аргументы, которые привели к ур-ю (7.46), находим во втором порядке малости

$$P_{\text{осц}}^{\text{ИК-пер, ВПМ}_{\text{жест}}} = e^{-g^2 \mathcal{S}} P_{\text{осц}}^{2\text{-петл}} \Big|_{\text{жж}}, \quad (7.52)$$

где 2-х петлевый вклад в правой части содержит интегрирование по двойному жесткому домену («жестко–жесткий» вклад), т.е. импульсы обеих петель $p_1, p_2 > k_S$. Эквивалентно, это выражение можно переписать в виде,

$$P_{\text{осц}}^{\text{ИК-пер, ВПМ}_{\text{жест}}} = e^{-g^2 \mathcal{S}} P_{\text{осц}}^{2\text{-петл}} - e^{-g^2 \mathcal{S}} P_{\text{осц}}^{2\text{-петл}} \Big|_{\text{жм}} - e^{-g^2 \mathcal{S}} P_{\text{осц}}^{2\text{-петл}} \Big|_{\text{мм}}, \quad (7.53)$$

где первый член содержит полный 2-х петлевой вклад, в то время как второй член «жестко-мягкий» (содержит все вклады в которых домен интегрирования по одному петлевому импульсу мягкий, а по другому — жесткий), а третий — «мягко-мягкий» (интегрирование в обеих петлях исключительно по инфракрасному домену). Затем мы используем выражение в главном порядке,

$$P_{\text{осц}}^{2\text{-петл}} \Big|_{\text{мм}} = \frac{g^4 \mathcal{S}^2}{2} P_{\text{осц}}, \quad (7.54a)$$

$$P_{\text{осц}}^{2\text{-петл}} \Big|_{\text{жм}} = -g^2 \mathcal{S} P_{\text{осц}}^{1\text{-петл}} \Big|_{\text{жест}} = -g^2 \mathcal{S} P_{\text{осц}}^{1\text{-петл}} - g^4 \mathcal{S}^2 P_{\text{осц}}, \quad (7.54b)$$

где для получения последнего выражения в (7.54b) мы добавили и вычли мягкую часть однопетлевой поправки. Собирая всё вместе и используя выражение (7.50), получаем следующее простое выражение

$$P_{\text{осц}}^{\text{ИК-пер, ГП+ППМ}_{\text{жест}}+\text{ВПМ}_{\text{жест}}} = P_{\text{мон}} + \left(1 + g^2 \mathcal{S} + \frac{g^4 \mathcal{S}^2}{2}\right) e^{-g^2 \mathcal{S}} P_{\text{осц}} + P^{1\text{-петл}} [P_{\text{мон}} + (1 + g^2 \mathcal{S}) e^{-g^2 \mathcal{S}} P_{\text{осц}}] + P^{2\text{-петл}} [P_{\text{мон}} + e^{-g^2 \mathcal{S}} P_{\text{осц}}]. \quad (7.55)$$

Повторяя сделанные выше шаги можно легко обобщить это выражения на случай корреляционных функций старших порядков с произвольным количеством жестких петель.

Выражения (7.50), (7.51), (7.55) не учитывают лидирующих эффектов первого порядка малости по мягким модам. Они формально подавлены одной степенью ε и поэтому могут быть важны, так как в реалистичной Вселенной этот параметр не так уж мал, $\varepsilon \sim 0.2 \div 0.3$. Следующая глава посвящена детальному вычислению этих поправок. Что примечательно, мы увидим, что лидирующие поправки первой степени малости уже оказались включены в однопетлевое выражение (7.50) для спектра мощности. Несмотря на это, остальные поправки возникающие в первом порядке малости по мягким модами формально также важны, в частности, для надежного вычисления сдвига позиции пика сахаровских осцилляций.

⁶ Вывод не зависит от типа спектра мощности ($\delta\delta$, $\Theta\Theta$ или $\Theta\delta$), поэтому мы не уточняем его.

7.5. Пересуммирование инфракрасных эффектов первого порядка малости

В данной главе мы обсудим поправки к спектру мощности, которые подавлены одной степенью ε по сравнению с вкладом в главном ИК порядке, которые были пересуммированы в предыдущих разделах. Прежде всего, есть две возможности получить эти поправки.

(a) С одной стороны, можно рассмотреть те же диаграммы – *ромашки*, что дают наибольшее усиление $l = 2L_{\text{мягк}}$, но принять во внимание первые сублидирующие поправки возникающие из разложения осциллирующих вершин в ряд по мягким модам (7.23).

(b) С другой стороны, поправки $\text{ППМ}_{\text{мягк}}$ также приходят из новых диаграмм с $l = 2L_{\text{мягк}} - 1$. Диаграммы, которые вкладывают в порядке $O(\varepsilon)$ в спектр мощности дивергенции скорости во всех порядках по числу мягких петель могут быть представлены как

$$\begin{aligned}
 P_{\text{осц}, \Theta}^{\text{ИК-пер, ГП+ППМ}_{\text{мягк}}}(\eta; k) = & \text{wavy line } k + \text{loop } \bar{\Gamma}_4^{\text{осц}} + \text{fish } \bar{\Gamma}_3^{\text{осц}} \bar{\Gamma}_3^{\text{мон}} \\
 & + \text{fish } \bar{\Gamma}_6^{\text{осц}} + \text{fish } \bar{\Gamma}_5^{\text{осц}} \bar{\Gamma}_3^{\text{мон}} + \text{loop } \bar{\Gamma}_5^{\text{осц}} \bar{\Gamma}_3^{\text{мон}} \\
 & + \text{fish } \bar{\Gamma}_8^{\text{осц}} + \text{fish } \bar{\Gamma}_7^{\text{осц}} \bar{\Gamma}_3^{\text{мон}} + \text{loop } \bar{\Gamma}_7^{\text{осц}} \bar{\Gamma}_3^{\text{мон}} + \dots
 \end{aligned} \tag{7.56}$$

Все петли здесь мягкие, т.е. интегрирование идет по импульсам меньше k_S . Графы – *ромашки*, содержащие вершины $\bar{\Gamma}_4^{\text{осц}}, \bar{\Gamma}_6^{\text{осц}}, \bar{\Gamma}_8^{\text{осц}} \dots$ в 1, 2-х, 3-х и т. д. петлях принадлежат категории (a). Диаграммы, содержащие $\bar{\Gamma}_3^{\text{осц}}, \bar{\Gamma}_5^{\text{осц}}, \bar{\Gamma}_7^{\text{осц}} \dots$ в 1, 2 – х, 3 – х и т. д. петлях принадлежат категории (b). Все диаграммы категории (b) связаны с двумя новыми диаграммами: *рыба* (крайняя правая диаграмма в первой строке) и *улитка* (крайняя правая диаграмма во второй строке). Все диаграммы типа (b) старших петлевых порядков получают одеванием осциллирующих вершин содержащихся в этих двух диаграммах в мягкие петли, например, см. диаграмму в середине второй строки и две диаграммы справа в последней строке. Спектр мощности материи включает также поправки $O(\varepsilon)$ получающиеся одеванием диаграммы – *рыбы* с вершиной K_2 ,

$$P_{\text{осц},\delta\delta}^{\text{ИК-пер, ГП+ППМ}_{\text{мягк}}}(\eta, k) = P_{\text{осц},\Theta\Theta}^{\text{ИК-пер, ГП+ППМ}_{\text{мягк}}}(\eta, k) + \bar{\Gamma}_3^{\text{осц}} \text{ (diagram)} + \bar{\Gamma}_5^{\text{осц}} \text{ (diagram)} + \dots \quad (7.57)$$

Рассмотрим сначала диаграммы типа (b). Одевая диаграммы–рыбы, получаем знаковый результат (7.37).

Что касается *улиток*, их явное вычисление с использованием разложения (7.22) для $\bar{\Gamma}_{\text{осц}}^5$ и точного выражения для $\bar{\Gamma}_3^{\text{осц}}$ приводит к

$$\delta P_{\text{осц, улитка}}^{1\text{-петл}} \Big|_{\text{мягк}} \equiv \text{ (diagram)} \Big|_{\text{мягк}} = g^6 (\mathcal{S}^a + 2\kappa \mathcal{S}^b) \bar{P}_{\text{осц}}(k), \quad (7.58)$$

где были введены операторы

$$\mathcal{S}^a \bar{P}_{\text{осц}}(k) = 2 \int_{q, q' \leq k_S} [dq][dq'] \bar{P}_{\text{мон}}(q) \bar{P}_{\text{мон}}(q') \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}') (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}')}{q^4 q'^4} \quad (7.59a)$$

$$\times \sinh(\mathbf{q} \cdot \nabla) (1 - \cosh(\mathbf{q}' \cdot \nabla)) \bar{P}_{\text{осц}}(k),$$

$$\mathcal{S}^b \bar{P}_{\text{осц}}(k) = \frac{6}{7} \int_{q, q' \leq k_S} [dq][dq'] \bar{P}_{\text{мон}}(q) \bar{P}_{\text{мон}}(q') \sin^2(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \quad (7.59b)$$

$$\times \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}')(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{q}'))}{q^2 q'^2 (\mathbf{q} + \mathbf{q}')^2} \sinh(\mathbf{q} \cdot \nabla) (1 - \cosh(\mathbf{q}' \cdot \nabla)) \bar{P}_{\text{осц}}(k),$$

и $\kappa = 1$ ($\kappa = 0$) в точной динамике (соответственно, приближении Зельдовича). Одевая осциллирующую вершину мягкими *лепестками* получаем, что в итоговом выражении опять нужно лишь сделать замену (7.37),

$$\delta P_{\text{осц, улитка}}^{\text{ИК-пер, ГП+ППМ}_{\text{мягк}}} = g^6 (\mathcal{S}^a + 2\kappa \mathcal{S}^b) e^{-g^2 \mathcal{S}} \bar{P}_{\text{осц}}(k). \quad (7.60)$$

Теперь рассмотрим поправки типа (a), т.е. диаграммы–*ромашки*, разложенные до первого порядка малости по мягким модам. Чтобы увидеть, что они также могут быть пересуммированы, получаем сначала выражение для первой поправки по ε к формуле (7.23),

$$\begin{aligned} & \bar{\Gamma}'_{n, \text{осц}, \text{ГП+ППМ}} \left(\mathbf{k}, -\mathbf{k} - \sum_{i=1}^{n-2} \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n-2} \right) \\ &= (-1)^{n-1} \left[\prod_{i=1}^{n-2} \mathcal{D}_{\mathbf{q}_i} + \sum_{j=1}^{n-2} \mathcal{E}_{\mathbf{q}_j} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n-2} \mathcal{D}_{\mathbf{q}_i} + \sum_{\substack{j_1, j_2=1 \\ j_1 < j_2}}^{n-2} \mathcal{F}_{\mathbf{q}_{j_1} \mathbf{q}_{j_2}} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j_1, j_2}}^{n-2} \mathcal{D}_{\mathbf{q}_i} \right] \frac{\bar{P}_{\text{осц}}(k)}{\bar{P}_{\text{мон}}(k)}, \end{aligned} \quad (7.61)$$

где $\mathcal{E}_{\mathbf{q}}$ и $\mathcal{F}_{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2}$ – операторы конечных разностей действующие на $\bar{P}_{\text{осц}}$, определенные в приближении Зельдовича (ПЗ) и точной динамике (ТД) как

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{(\text{ПЗ})}\bar{P}_{\text{осц}} &= \left(2\cos^2(\mathbf{q}, \mathbf{k}) - 1 + 2\cos^2(\mathbf{q}, \mathbf{k})(1 - n_s(k))e^{\mathbf{q}\cdot\nabla}\right)\bar{P}_{\text{осц}}, \\ \mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{(\text{ТД})}\bar{P}_{\text{осц}} &= \left(\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^{(\text{ЗА})} + \frac{6}{7}\sin^2(\mathbf{q}, \mathbf{k})(e^{\mathbf{q}\cdot\nabla} + 1)\right)\bar{P}_{\text{осц}}, \quad n_s \equiv \frac{d\ln\bar{P}_{\text{мон}}(k)}{d\ln k},\end{aligned}\quad (7.62)$$

и

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2}^{(\text{ПЗ})}\bar{P}_{\text{осц}} &= \frac{(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)}{q_1^2 q_2^2} \left[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}_1)e^{\mathbf{q}_1\cdot\nabla}(e^{\mathbf{q}_2\cdot\nabla} - 1) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}_2)e^{\mathbf{q}_2\cdot\nabla}(e^{\mathbf{q}_1\cdot\nabla} - 1) \right] \bar{P}_{\text{осц}}, \\ \mathcal{F}_{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2}^{(\text{ТД})}\bar{P}_{\text{осц}} &= \left[\mathcal{F}_{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2}^{(\text{ПЗ})} + \frac{3}{7}\sin^2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)\Delta_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2} \right] \bar{P}_{\text{осц}}.\end{aligned}\quad (7.63)$$

Подставляя это выражение в (7.31) и суммируя по числу петель L до бесконечности получаем,

$$\delta P_{\text{осц, ромашки}}^{\text{ИК-перес, ГП+ППМ}_{\text{мягк}}} = (g^2 + g^4\mathcal{S}^c - g^6\mathcal{S}^a - g^6\kappa\mathcal{S}^b)e^{-g^2\mathcal{S}}\bar{P}_{\text{осц}}(k), \quad (7.64)$$

где

$$\mathcal{S}^c\bar{P}_{\text{осц}}(k) = \frac{1}{2} \int_{q \leq k_S} [dq]\bar{P}_{\text{мон}}(q)(\mathcal{E}_{\mathbf{q}}\mathcal{D}_{-\mathbf{q}} + \mathcal{E}_{-\mathbf{q}}\mathcal{D}_{\mathbf{q}} + \mathcal{F}_{\mathbf{q},-\mathbf{q}})\bar{P}_{\text{осц}}(k), \quad (7.65)$$

и было использовано разложение

$$\frac{1}{2} \int_{q, q' \leq k_S} [dq][dq']\bar{P}_{\text{мон}}(q)\bar{P}_{\text{мон}}(q')\mathcal{F}_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}\mathcal{D}_{-\mathbf{q}}\mathcal{D}_{-\mathbf{q}'} = -(\mathcal{S}^a + \kappa\mathcal{S}^b). \quad (7.66)$$

Для дальнейшего удобства хотелось бы представить выражение (7.64) в виде однопетлевой диаграммы – *ромашки* вычисленной при использовании пересуммированного пропагатора,

$$\delta P_{\text{осц, ромашка}}^{\text{1-петл, ГП+ППМ}_{\text{мягк}}} [P_{\text{мон}} + e^{-g^2\mathcal{S}}P_{\text{осц}}]. \quad (7.67)$$

Наивно можно было бы просто сделать замену (7.37) в выражении ППМ для вершинной функции $\bar{\Gamma}_4^{\prime\text{осц}}$,

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_4^{\prime\text{осц}, \text{ГП+ППМ}}(\mathbf{k}, -\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) &\mapsto \\ &- [\mathcal{D}_{\mathbf{q}_1}\mathcal{D}_{\mathbf{q}_2} + \mathcal{D}_{\mathbf{q}_1}\mathcal{E}_{\mathbf{q}_2} + \mathcal{D}_{\mathbf{q}_2}\mathcal{E}_{\mathbf{q}_1} + \mathcal{F}_{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2}] \frac{e^{-g^2\mathcal{S}}\bar{P}_{\text{осц}}(k)}{\bar{P}_{\text{мон}}^2(k)}.\end{aligned}\quad (7.68)$$

Однако, это бы привело к ошибке первого порядка малости, который мы договорились учитывать. Причина появления этой ошибки состоит в том, что оператор \mathcal{S} зависит от жесткого волнового числа \mathbf{k} (см. (7.28)). Когда вершина $\bar{\Gamma}_4^{\prime\text{осц}}$ вычисляется как функционал пересуммированного спектра мощности $e^{-g^2\mathcal{S}}\bar{P}_{\text{осц}}$, жесткий аргумент в операторе \mathcal{S} сдвигается,

$$\mathcal{S}|_{\mathbf{k}} \mapsto \mathcal{S}|_{\mathbf{k}\pm\mathbf{q}} = \mathcal{S}|_{\mathbf{k}} \pm \Delta\mathcal{S}|_{\mathbf{q}}.$$

Учитывая эту поправку, получаем для мягкой петли,

$$\delta P_{\text{осц, ромашка}}^{1\text{-петл, ГП+ППМ}_{\text{мягк}}} [P_{\text{мон}} + e^{-g^2 \mathcal{S}} P_{\text{осц}}] \Big|_{\text{мягк}} = (-g^4 \mathcal{S} + g^4 \mathcal{S}^c - g^6 \mathcal{S}^a) e^{-g^2 \mathcal{S}} \bar{P}_{\text{осц}}(k). \quad (7.69)$$

Сравнивая данное выражение с (7.64), имеем

$$\begin{aligned} \delta P_{\text{осц, ромашка}}^{\text{ИК-пер, ГП+ППМ}_{\text{мягк}}} &= g^2(1 + g^2 \mathcal{S}) e^{-g^2 \mathcal{S}} \bar{P}_{\text{осц}} \\ &+ \delta P_{\text{осц, ромашка}}^{1\text{-петл, ИК-пер, ГП+ППМ}_{\text{мягк}}} [P_{\text{мон}} + e^{-g^2 \mathcal{S}} P_{\text{осц}}] \Big|_{\text{мягк}} - g^6 \kappa \mathcal{S}^b e^{-g^2 \mathcal{S}} \bar{P}_{\text{осц}}. \end{aligned} \quad (7.70)$$

Заметим, что операторы \mathcal{S}^a , \mathcal{S}^c сократились в данном выражении.

Теперь у нас есть все ингредиенты для спектра мощности в первом порядке малости. Они включают пересуммированные жесткие петли (7.46), мягкие диаграммы – *рыбы*, вклады от *улиток*, одетых в мягкие петли (7.60) и пересуммированные *ромашки* (7.70). Добавляя к ним мягкую часть, имеем

$$\begin{aligned} P_{\text{осц}}^{\text{ИК-пер, ГП+ППМ}} &= P_{\text{мон}} + (1 + g^2 \mathcal{S}) e^{-g^2 \mathcal{S}} P_{\text{осц}} + P^{1\text{-петл}} [P_{\text{мон}} + e^{-g^2 \mathcal{S}} P_{\text{осц}}] \\ &+ g^4 (\mathcal{S}^a + \kappa \mathcal{S}^b) e^{-g^2 \mathcal{S}} P_{\text{осц}}. \end{aligned} \quad (7.71)$$

Это наш конечный результат. Номинально он отличается от $\text{ППМ}_{\text{жест}}$ (7.50) только последним членом. Подчеркнем, что он содержит в себе систематически пересуммированные сублидирующие поправки, величина которых, априорно, не является пренебрежимо малой. Стоит отметить, что однопетлевой вклад отличается в ПЗ и ТД, а также для корреляторов скорости и плотности в порядке $\text{ППМ}_{\text{жест}}$. Крайний правый член шкалируется как g^4 по сравнению с лидирующим членом. Это отражает тот факт, что данная поправка появляется только в двухпетлевом приближении. Этот член порядка $O(\varepsilon)$ согласно нашим правилам подсчета степеней и поэтому мы должны, формально, также держать его в разложении. Заметим, что в дальнейшем рассмотрении будет показано, что численно этот член достаточно мал для стандартной ΛCDM космологии.

7.6. Практическая реализация и сравнение с другими методами

В этом разделе мы сперва обсудим, как на практике вычисляется ИК – пересуммированный спектр мощности плотности материи, а затем сравним результаты нашего аналитического исследования с данными численного моделирования методом частиц. В последней части раздела будут обсуждены предсказания для сдвига пика сахаровских осцилляций в корреляционной функции.

7.6.1. Вычисление ИК – пересуммированного спектра мощности

После разложения линейного спектра мощности $P^{\text{лин}}(z, k) = D(z)^2 (P_{\text{осц}}(k) + P_{\text{мон}}(k))$ на гладкую и осциллирующие части⁷, вычисляем действие дифференциального оператора \mathcal{S} (см. (7.28)),

$$\nabla_{\alpha_1} \cdots \nabla_{\alpha_{2n}} P_{\text{осц}}(k) = (-1)^n \frac{\hat{k}_{\alpha_1} \cdots \hat{k}_{\alpha_{2n}}}{k_{\text{осц}}^{2n}} P_{\text{осц}}(k) (1 + O(\varepsilon)),$$

где $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ и ε – малый параметр связанный с ИК усилением, который был определен в (7.19). Напомним, что $k_{\text{осц}} = h/(110 \text{ Мпк})$ – масштаб, определяющий период сахаровских осцилляций. Прямолинейное вычисление даёт

$$\mathcal{S}P_{\text{осц}}(k) = k^2 \Sigma^2 P_{\text{осц}}(k) \times (1 + O(\varepsilon)), \quad (7.72)$$

где

$$\Sigma^2 \equiv \frac{4\pi}{3} \int_0^{k_S} dq P_{\text{мон}}(q) \left[1 - j_0 \left(\frac{q}{k_{\text{осц}}} \right) + 2j_2 \left(\frac{q}{k_{\text{осц}}} \right) \right], \quad (7.73)$$

j_n – сферические функции Бесселя и k_S – масштаб разделения длинноволновых и коротковолновых мод, который был введен для формального разделения области петлевого интегрирования на ИК и УФ домены. Так как точный результат для конечных наблюдаемых не должен зависеть от k_S , любая остаточная зависимость от этого масштаба, имеющаяся в пертурбативном разложении, должна быть расценена как ошибка теории возмущений. ИК – пересуммированный спектр мощности в главном порядке имеет вид (7.34)

$$P^{\text{ИК-пер, ГП}}(z, k) = D(z)^2 \left(P_{\text{мон}}(k) + e^{-k^2 D(z)^2 \Sigma^2} P_{\text{осц}}(z) \right), \quad (7.74)$$

где первый член соответствует гладкой части линейного спектра мощности. Главный эффект усиленных ИК петель в этом случае – экспоненциальное подавление осциллирующей части спектра мощности.

Обсудим теперь выбор k_S . Глядя на подынтегральное выражение в (7.73) видим, что оно имеет максимум при $q \sim 0.03h/\text{Мпк}$, но даёт значительный вклад в интеграл вплоть до волновых чисел $q \sim 0.2h/\text{Мпк}$. Данное поведение подтверждено результатами численного вычисления коэффициента подавления Σ^2 как функции k_S . Результат показан на Рис. 7.4 для ΛCDM космологии. Для очень малых значений $k_S \lesssim k_{\text{осц}}$ коэффициент подавления имеет асимптотическое поведение $\Sigma^2 \rightarrow 2\pi/5 \int_0^{k_S} dq q^2 P_{\text{мон}}(q)/k_{\text{осц}}^2$, в то время как для больших

⁷ В данном разделе мы перейдем к стандартной конвенции $g \mapsto D(z)$ и будем обозначать линейный спектр мощности при $z = 0$ как $\bar{P}_{\text{мон(осц)}}(k) \mapsto P_{\text{мон(осц)}}(k)$.

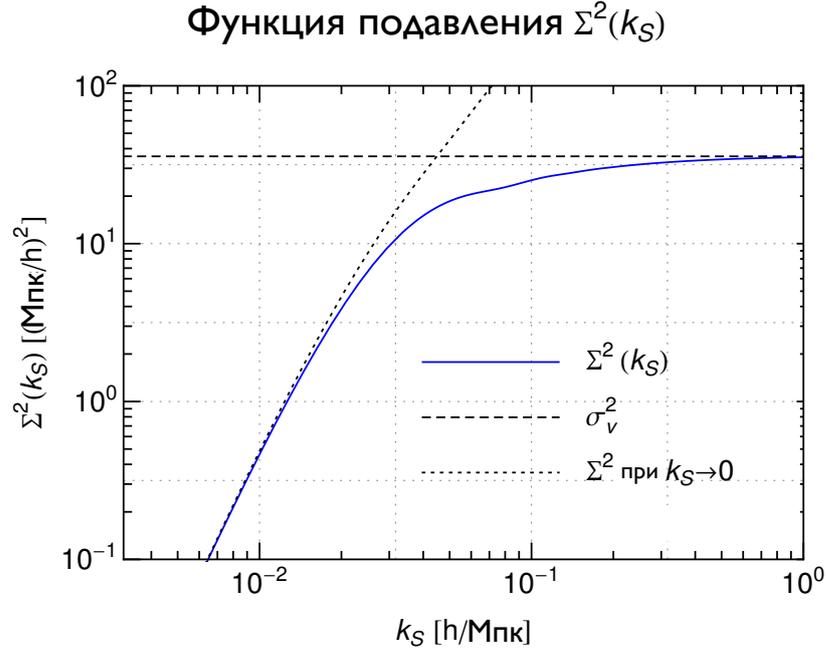


Рис. 7.4. Зависимость функции подавления сахаровских осцилляций от разделительного масштаба k_S . Штрихованные линии соответствует двум предельным случаям, обсужденным в основном тексте, $1/k_{\text{осц}} = 110 \text{ Мпк}/h$.

$k_S \gg k_{\text{осц}}$ он приближается к константе $\Sigma^2 \rightarrow \sigma_v^2 \equiv 4\pi/3 \int_0^\infty dq P_{\text{мон}}(q)$. С теоретической точки зрения желательно выбрать наибольший k_S чтобы как можно большее количество ИК мод было пересуммировано и чтобы коэффициент подавления имел наименьшую зависимость от k_S . С другой стороны, k_S не может быть выбран слишком большим, так как пертурбативное разложение в ИК домене справедливо при $q \ll k$. Как компромисс, мы рассмотрим несколько значений k_S порядка масштаба $\text{CO} \sim 0.1h/\text{Мпк}$. В дальнейшем будет показано, что зависимость наших результатов от k_S в этом случае весьма мала.

В первом порядке малости, пересуммированный спектр мощности (7.71) имеет форму⁸

$$P^{\text{ИК-пер,ГП+ППМ}}(z, k) = D(z)^2 \left(P_{\text{мон}}(k) + (1 + k^2 D(z)^2 \Sigma^2) e^{-k^2 D(z)^2 \Sigma^2} P_{\text{осц}}(k) \right) + D(z)^4 P^{1\text{-петл}} [P_{\text{мон}} + e^{-k^2 D(z)^2 \Sigma^2} P_{\text{осц}}] + D(z)^6 e^{-k^2 D(z)^2 \Sigma^2} (\mathcal{S}^a + \varkappa \mathcal{S}^b) P_{\text{осц}}(k), \quad (7.75)$$

⁸ Так как мы интересуемся членами первого порядка малости, необходимо учесть сублидирующие поправки, которые возникают при действии дифференциального оператора (7.72). Можно показать, что эти поправки сокращаются в (7.75) в интересующем нас порядке точности. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим уравнения (7.64), (7.69) и подставим в них разложение (7.72) сохраняя поправки порядка $O(\varepsilon)$. Сравнивая получающиеся выражения, находим, что выражение (7.70) справедливо в первом порядке малости если \mathcal{S} просто заменить \mathcal{S} на $k^2 \Sigma^2$. Остальные вклады, содержащиеся в (7.71) – сублидирующие по сравнению с частью $O(1)$, так что замена $\mathcal{S} \mapsto k^2 \Sigma^2$ в них также оправдана, что в конечном итоге и приводит к (7.75).

где $\varkappa = 1$ в ТД ($\varkappa = 0$ в ПЗ). Первый член во второй строке (7.75) соответствует стандартному однопетлевому результату, но вычисленному с использованием спектра мощности, пересуммированного в главном порядке, а не обычного линейного спектра мощности.

Операторы конечных разностей, фигурирующие в самом последнем члене из (7.75), могут быть вычислены аналогично \mathcal{S} . После элементарных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^a P_{\text{осц}}(k) &= \frac{8\pi}{5} k_{\text{осц}} k^3 \Sigma^2 \int_0^{k_S} dq P_{\text{мон}}(q) q \left[3j_1 \left(\frac{q}{k_{\text{осц}}} \right) - 2j_3 \left(\frac{q}{k_{\text{осц}}} \right) \right] \frac{dP_{\text{осц}}(k)}{dk} \\ &\equiv k^3 \Sigma_a^2 \frac{dP_{\text{осц}}(k)}{dk}, \end{aligned} \quad (7.76a)$$

$$\mathcal{S}^b P_{\text{осц}}(k) = - (4\pi)^2 k_{\text{осц}}^2 k^3 \int_0^{k_S} dq dq' P_{\text{мон}}(q) P_{\text{мон}}(q') h \left(\frac{q'}{k_{\text{осц}}}, \frac{q}{k_{\text{осц}}} \right) \frac{dP_{\text{осц}}(k)}{dk} \quad (7.76b)$$

$$\equiv k^3 \Sigma_b^2 \frac{dP_{\text{осц}}(k)}{dk}, \quad (7.76c)$$

где

$$h(x, y) = \frac{3}{7} (h_1(x, y) + h_2(x, y) + h_2(y, x)), \quad (7.77)$$

и функции h_1 и h_2 определены в Приложении А.

Результат (7.75) справедлив для автокорреляционных спектров мощности плотности и скорости, а также их кросс-корреляционного спектра. При этом необходимо использовать соответствующие выражения для 1-петлевого функционала. Результат в приближении Зельдовича можно получить путем использования соответствующих интегральных ядер и подстановки $\varkappa = 0$.

ИК – пересуммированный биспектр в однопетлевом приближении в главном порядке по ε дан выражением (см ур-е (7.42))

$$\begin{aligned} B_{\delta\delta\delta}^{\text{ИК-пер, ГП}}(z; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= B_{\text{мон}, \delta\delta\delta}^{\text{древ}}(z; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \\ &+ 2D(z)^4 \sum_{i < j=1}^3 F_2(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j) \left(e^{-k_j^2 D(z)^2 \Sigma^2} P_{\text{осц}}(k_j) P_{\text{мон}}(k_i) + i \leftrightarrow j \right), \end{aligned} \quad (7.78)$$

где $B_{\text{мон}, \delta\delta\delta}^{\text{древ}}(z; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ – древесный результат для гладкой части и $F_2(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j)$ – стандартное двухточечное интегральное ядро СТВ [39].

7.6.2. Сравнение с другими методами

В данном разделе мы сравним результаты, полученные в рамках нашего формализма, с теми, что были получены ранее при использовании других методов.

С точки зрения феноменологии хорошо известно, что экспоненциальное подавление линейного осциллирующего спектра мощности дает достаточно неплохую точность при описании двух – и трех – точечной корреляционной функции, см. [149] и ссылки в этой работе. Целью теории возмущений являются вывод этого результата из первых принципов, уточнение эффектов за рамками этого простого подавления и получение точных предсказаний с учетом теоретической неопределенности.

Существует несколько методов описания нелинейной эволюции БАО в рамках космологической теории возмущений. Рассмотрим некоторые из них. В статье [47] формализм «перенормированной теории возмущений» (англ. renormalized perturbation theory, RPT) [154] был использован для получения следующей формулы

$$P(z, k) = G^2(z, k)P_{\text{лин}}(k) + P_{\text{ВМ}}(z, k), \quad (7.79)$$

где $G(z, k)$ – пропагатор в СТВ и $P_{\text{ВМ}}$ – поправка, обусловленная взаимодействием мод. Пропагатор СТВ описывает как поле плотности эволюционирует во времени и не является галилеево-инвариантной величиной. В связи с этим оно содержит нефизические ИК – усиленные поправки соответствующие трансляциям возмущений под действием крупномасштабных потоков. Если пересуммировать эффект этих потоков, то можно получить экспоненциальное подавление следующей формы

$$G^2(z, k) = D(z)^2 \exp[-k^2 D(z)^2 \sigma_v^2], \quad (7.80)$$

где $\sigma_v^2 \equiv 4\pi/3 \int_0^\Lambda dq P_{\text{лин}}(q)$, и Λ – УФ масштаб обрезания петлевых интегралов ($k \ll \Lambda$). Полученный таким образом пропагатор нужно подставить в (7.79). Похожий результат был также выведен в рамках лагранжевой теории возмущений [59, 63]. Отметим, что экспоненциальное подавление в этом случае применяется ко всему спектру мощности, включая как осциллирующую, так и монотонную части.

Являясь достаточно успешным на феноменологическом уровне, подход в рамках перенормированной теории возмущений (ПТВ) достаточно отличается от нашего. В частности члены, которые пересуммируются в пропагаторе ПТВ (7.80), имеют тот же порядок, что и члены из $P_{\text{МС}}$ и на самом деле сокращаются, если сложить эти два вклада, что является следствием принципа эквивалентности [41, 45, 56–58, 147]. С другой стороны, наш подход основан на хорошо определенных правилах подсчета степеней, выведенных из соображений о разделении масштабов и не вовлекающих в рассмотрение нефизических вкладов. Как результат, мы получили подавление лишь для осциллирующей части спектра мощности, что

согласуется с тем фактом, что для монотонной части инфракрасные вклады подавлены. Более того, функция подавления, возникающая в (7.73) отличается от той, что используется в ПТВ (7.80). Хотя для реалистичной Вселенной их численные значения оказались весьма близки, они бы сильно отличались если бы спектр мощности был более усилен в длинноволновой области $q \ll k_{\text{осц}}$. Помимо этого, после учета поправок, возникающих в первом порядке малости, наш результат (7.75) уже не может быть представлен лишь в форме простого экспоненциального подавления спектра мощности или его осциллирующей части.

Полученный нами результат весьма близок к работе [49], где ИК эффекты в пике СО были описаны с помощью тождеств Уорда для биспектра и спектра мощности, основанных на принципе эквивалентности. Данный подход связан с пертурбативным методом, предложенным в [48]. В главном порядке и после учета жестких петель наш результат (7.74) совпадает с [49], если выбрать «бегущий» масштаб разделения $k_S = k/2$. Отметим, однако, что в работе [49] не были изучены поправки первого порядка малости по ИК модам. В целом, главным преимуществом нашего подхода является простая диаграммная интерпретация пересуммирования, которая без каких-либо ограничений может быть использована для уточнения результатов, полученных из симметричных аргументов в [49]. В частности, сублидирующие мягкие поправки вычисленные в данной работе и входящие в выражение (7.75) включают эффект сдвига позиции пика СО. Помимо этого, правила подсчета степеней могут быть использованы для систематических вычислений в более высоких порядках малости, а ИК – пересуммирование в ТВВР легко обобщается на многоточечные корреляционные функции.

7.6.3. Сравнение с данными численного моделирования

В данном разделе будет произведено сравнение наших теоретических результатов с данными численного моделирования «Horizon Run» [151]. Мы рассматриваем космологию в рамках модели Λ CDM с космологическими параметрами, совпадающими с теми, что были использованы в [151]. Линейный спектр мощности был получен с помощью бoльцмановского кода CLASS [135] и разложен на гладкую и осциллирующие части методами, описанными в разделе 7.1.

В дальнейшем мы будем рассматривать корреляционную функцию плотности темной материи, так как в ней присутствует явное пространственное разделение между сахаровскими осцилляциями и мелкомасштабной динамикой и поэтому данные эффекты могут быть

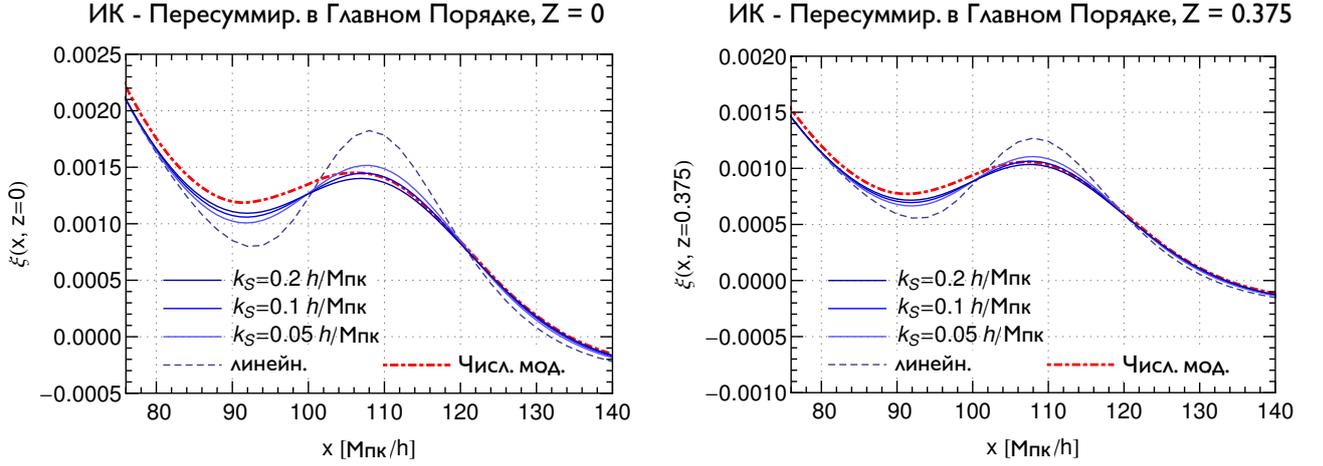


Рис. 7.5. Корреляционная функция плотности темной материи ИК – пересуммированная в главном порядке. На графики нанесены теоретические кривые, соответствующие трем разным выборам масштаба разделения k_S и двум красным смещениям (слева: $z = 0$, справа: $z = 0.375$). Также показаны результаты линейной теории и данные моделирования «Horizon Run 2» [151]. Масштаб сахаровских осцилляций $1/k_{\text{осц}} = 110 \text{ Мпк}/h$.

ясно продемонстрированы. Корреляционная функция связана со спектром мощности как

$$\xi(x, z) = \frac{4\pi}{x} \int_0^{\infty} dk k P(k, z) \sin(kx). \quad (7.81)$$

На Рис. 7.5 мы показываем ИК – пересуммированный результат в главном порядке для трех разных значений k_S (голубые непрерывные кривые). Подавление СО в данном порядке описывается экспонентой от функции подавления Σ , которая приводит к разглаживанию пика СО в координатном пространстве и уже дает достаточно хорошее (особенно по сравнению с линейной теорией) приближение к численным данным, которые показаны красной штрихованной кривой. Несмотря на это, зависимость от k_S достаточно большая.

Рассмотрим теперь поправки первого порядка малости. Корреляционная функция, полученная Фурье – преобразованием (7.75), показана на Рис. 7.6. Можно видеть, что согласие с данными существенно улучшается по сравнению с ГП. Помимо этого, значительно ослабляется зависимость от масштаба разделения k_S . Это является важным свидетельством в пользу самосогласованности и сходимости нашей схемы, так как зависимость от k_S , в принципе, должна исчезнуть в точном результате.

Полученные данные позволяют заключить, что систематическое ИК – пересуммирование даёт весьма аккуратное описание корреляционной функции на масштабах сахаровских осцилляций. Как видно из Рис. 7.6, присутствует некоторая разница между теорией и чис-

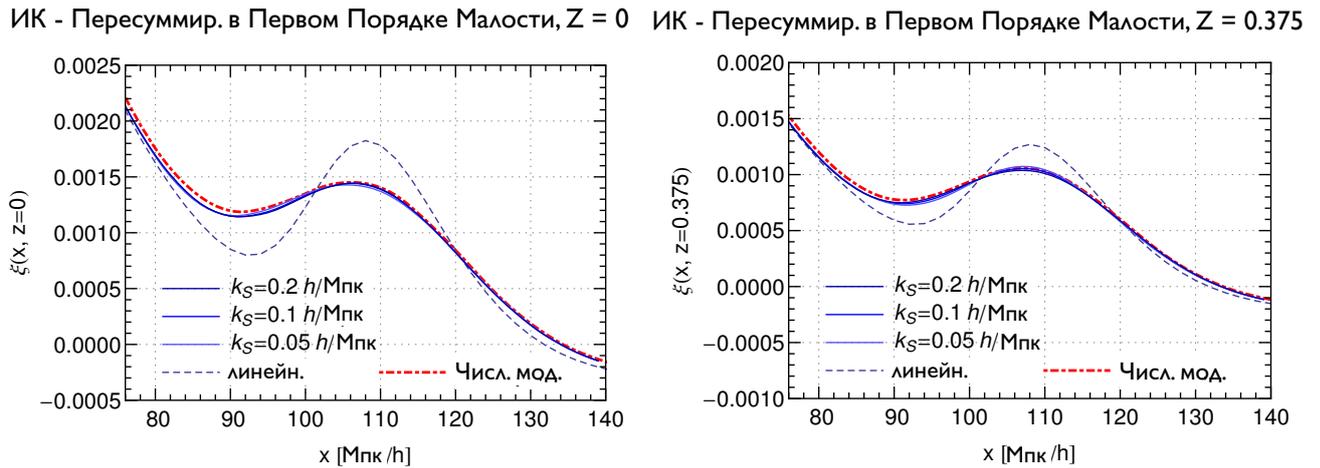


Рис. 7.6. То же самое, что на Рис. 7.5, но с ИК-пересуммированной корреляционной функцией полученной в первом порядке малости (синие кривые).

ленным моделированием на коротких масштабах. Эта разница может быть обусловлена рядом эффектов. Во-первых, систематическая ошибка из-за конечного размера области численного моделирования и конечного разрешения ведет к появлению неопределенности в несколько процентов⁹. В добавок к этому, возможны также дополнительные эффекты за счет маломасштабной динамики (напр. двухпетлевой вклад), которые не были учтены в теоретических вычислениях данной работы.

На Рис. 7.7 показано отношение корреляционной функции в ППМ к корреляционной функции в приближении Зельдовича¹⁰. На этом же графике показано отношение корреляционных функций из данных к корреляционной функции в приближении Зельдовича. Видно, что разница между ПЗ и нашим подходом— около 5% на масштабах СО, причем наш подход описывает данные слегка лучше, чем ПЗ в районе пика СО. Не стоит забывать, однако, об ошибке моделирования, которая не позволяет на данном этапе сделать количественное утверждение относительно разности в точности между двумя подходами. Отметим, что эта разница больше прогнозируемой точности глубоких обзоров недалекого будущего, в связи с чем важно подчеркнуть, что наш метод учитывает поправки от коротковолновой динамики,

⁹ В работе [151] не приведены ошибки измерения для данных моделирования. Оценивая статистический разброс («космологическую неопределенность») и эффекты конечного разрешения можно получить оценку порядка 1% на масштабах СО. Данная оценка также согласуется с разницей между данными для корреляционной функции из моделирования «Horizon Run 2» ($L = 7.2 \text{ Гпк}/h$, $N = 6000^3$) и «Horizon Run 3» ($L = 10.8 \text{ Гпк}/h$, $N = 7210^3$), см. [151].

¹⁰ Здесь имеется ввиду линейное приближение лагранжевой теории возмущений. Двухточечная корреляционная функция в приближении Зельдовича была вычислена с помощью кода открытого доступа ZelCa [155].

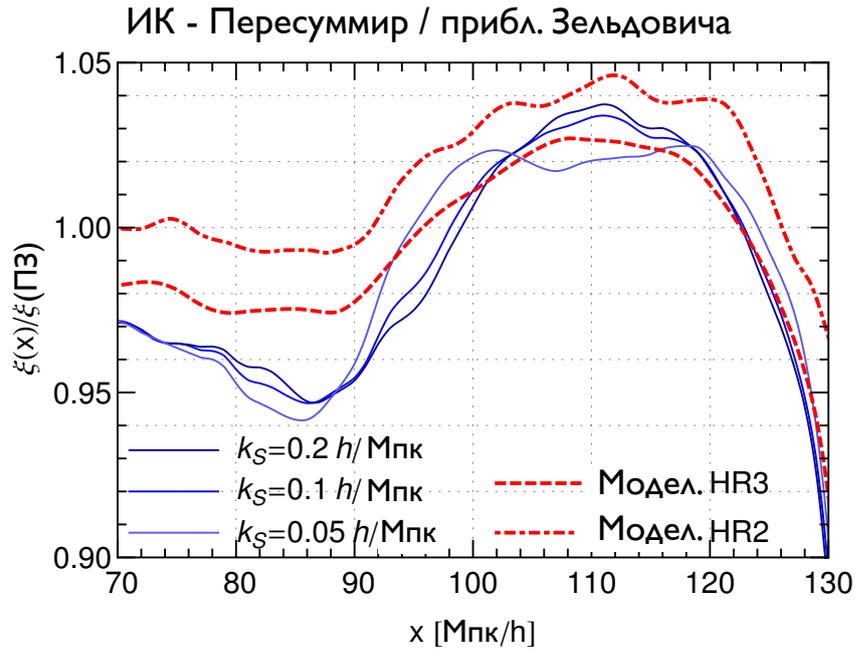


Рис. 7.7. Отношение корреляционной функции вычисленной в ТВВР в первом порядке малости к корреляционной функции в приближении Зельдовича (синие кривые). Также показаны данные для корреляционной функции данных моделирования «Horizon Run 2» и «Horizon Run 3» [151], поделенные на корреляционную функцию в приближении Зельдовича (красные кривые).

которые весьма плохо описываются приближением Зельдовича. Что более важно, метод пересуммирования основанный на ТВВР может быть использован для вычисления поправок старших порядков, учет которых важен на уровне точности будущих экспериментов.

В заключение заметим, что численный вклад операторов \mathcal{S}^a , \mathcal{S}^b в корреляционную функцию не превосходит 0.5% на красном смещении $z = 0$. Таким образом, для практических приложений в рамках точности $\sim 1\%$ обещанной будущими экспериментами, можно использовать упрощенный вариант формулы (7.75) без этих членов.

7.6.4. Сдвиг пика сахаровских осцилляций

Важным источником космологической информации является положение пика \mathcal{C}_0 , которое используется как «стандартная линейка». Обзоры будущего нацелены на измерение положения пика \mathcal{C}_0 с точностью промилле [156], поэтому важно понимание всех возможных источников систематики, которые могут изменить масштаб \mathcal{C}_0 по сравнению с линейной теорией.

Для конкретики, рассмотрим положение максимума пика \mathcal{C}_0 , который обозначим $x_{\mathcal{C}_0}$.

Есть два эффекта, которые приводят к сдвигу этого масштаба по сравнению с результатом линейной теории $x_{CO}^{\text{лин}}$. Во – первых, подавление осциллирующей компоненты спектра мощности, которое происходит в главном порядке пересуммирования, уже сдвигает положение максимума так как корреляционная функция $\xi(x)$ не симметрична в линейной теории¹¹. Во – вторых, взаимодействия, возникающие в первом порядке малости, сдвигают фазу СО, что приводит к смещению позиции пика в координатном пространстве. Обсудим эти эффекты.

Удобно разделить корреляционную функцию на гладкую и осциллирующую компоненты,

$$\xi(x) = \xi_{\text{мон}}(x) + \xi_{\text{осц}}(x), \quad (7.82)$$

что является простым Фурье – преобразованием соответствующего разложения для спектра мощности. Численно, в районе пика СО $\xi_{\text{осц}}$ в несколько раз больше $\xi_{\text{мон}}$. В линейном приближении условие максимума имеет вид

$$0 = \int dk k^2 P_{\text{осц}}(k) \cos(kx_{CO}^{\text{лин}}) - \frac{1}{x_{CO}^{\text{лин}}} \int dk k P_{\text{осц}}(k) \sin(kx_{CO}^{\text{лин}}) + \frac{x_{CO}^{\text{лин}}}{4\pi} \xi'_{\text{мон}}(x_{CO}^{\text{лин}}). \quad (7.83)$$

Чтобы получить аналитическую оценку, представим осциллирующий спектр мощности как произведение гармонической функции и гладкой модулирующей (см. (7.5)),

$$P_{\text{осц}}(k) = f_{\text{мод}}(k) \sin(k/k_{\text{осц}}). \quad (7.84)$$

Легко догадаться, что положение пика близко к $x_{CO}^{\text{лин}} \approx k_{\text{осц}}^{-1}$. Чтобы найти более точное выражение, запишем

$$x_{CO}^{\text{лин}} = k_{\text{осц}}^{-1} + \delta x^{\text{лин}}$$

и будем считать $k \delta x^{\text{лин}}$ малым параметром. Используя (7.83) имеем

$$\delta x^{\text{лин}} = -k_{\text{осц}} \frac{\int dk k f_{\text{мод}}(k) - (2\pi k_{\text{осц}}^2)^{-1} \xi'_{\text{мон}}(k_{\text{осц}}^{-1})}{\int dk k^3 f_{\text{мод}}(k)}, \quad (7.85)$$

где мы пренебрегли интегралам от быстро осциллирующих функций. В частности, мы воспользовались следующим приближением

$$\int dk k f_{\text{мод}} \sin^2(k/k_{\text{осц}}) = \int dk k f_{\text{мод}} \frac{1 - \cos(k/k_{\text{осц}})}{2} \approx \frac{1}{2} \int dk k f_{\text{мод}}(k).$$

¹¹ В этом легко убедиться, если вспомнить, что линейный спектр мощности – это сумма монотонной и осциллирующих частей, а Фурье образ от монотонной части убывает по степенному закону при больших x . В то же время вклад от осциллирующего спектра весьма близок к симметричной гауссиане, которая при наложении на монотонно убывающую функцию становится асимметричной.

Если вместо линейного спектра мощности мы рассмотрим спектр, пересуммированный в главном порядке (7.74), т.е. в котором осциллирующая часть экспоненциально подавлена, мы получим следующее выражение для позиции пика:

$$x_{CO}^{\Gamma\Pi} = k_{\text{осц}}^{-1} + \delta x^{\Gamma\Pi},$$

где $\delta x^{\Gamma\Pi}$ дана формулой (7.85), но $f_{\text{мод}}$ замененной на $f_{\text{мод}}(k)e^{-k^2 D(z)^2 \Sigma^2}$. Заключаем, что по сравнению с линейной теорией в главном порядке пересуммирования максимум пика СО сдвигается на

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x^{\Gamma\Pi}}{x_{CO}} \equiv \frac{\delta x^{\Gamma\Pi} - \delta x^{\text{лин}}}{x_{CO}} = & k_{\text{осц}}^2 \left[\frac{\int dk k f_{\text{мод}}(k)}{\int dk k^3 f_{\text{мод}}(k)} - \frac{\int dk k f_{\text{мод}}(k) e^{-k^2 D(z)^2 \Sigma^2}}{\int dk k^3 f_{\text{мод}}(k) e^{-k^2 D(z)^2 \Sigma^2}} \right] \\ & - \frac{\xi'_{\text{мон}}(k_{\text{осц}}^{-1})}{2\pi} \left[\frac{1}{\int dk k^3 f_{\text{мод}}(k)} - \frac{1}{\int dk k^3 f_{\text{мод}}(k) e^{-k^2 D(z)^2 \Sigma^2}} \right]. \end{aligned} \quad (7.86)$$

Оба члена в этой формуле порядка $(k_{\text{осц}}/k)^2$, где $k \sim 0.1h/\text{Мпк}$ – характерный масштаб волновых чисел вкладывающихся в СО. При $z = 0$ имеем численную оценку

$$\frac{\Delta x^{\Gamma\Pi}}{x_{CO}} \sim -1\%. \quad (7.87)$$

Видно, что сдвиг, возникающий в лидирующем порядке, достаточно существенен. Еще раз подчеркнем, что данный сдвиг происходит исключительно за счет подавления СО взаимодействием с крупномасштабными потоками. Это подавление одинаково в точной динамике и приближении Зельдовича, поэтому можно ожидать, что сдвиг на $\Delta x^{\Gamma\Pi}$ может быть ликвидирован стандартной процедурой реконструкции, которая использует приближение Зельдовича чтобы проэволюционировать поле плотности назад по времени. Чтобы понять, есть какое-либо остаточное смещение при использовании данной процедуры, необходимо рассмотреть первый порядок малости.

Записывая корреляционную функцию в виде $\xi = \xi^{\Gamma\Pi} + \xi^{\text{ППМ}}$, легко получить выражение для дополнительного сдвига, возникающего из-за нелинейных взаимодействия первого порядка,

$$\frac{\Delta x^{\text{ППМ}}}{x_{CO}} = - \left. \frac{(\xi^{\text{ППМ}})'}{x(\xi^{\Gamma\Pi})''} \right|_{x=x_{CO}}. \quad (7.88)$$

Можно проверить, что вклад от монотонной части корреляционной функции в это выражение пренебрежимо мало, в следствие чего заменяем $\xi \mapsto \xi_{\text{осц}}$.

Используя (7.74), (7.75), вычисляем численно вклады лидирующего и пост-лидирующего порядков в корреляционную функцию. Сдвиг пика СО можно получить либо напрямую сравнивая полную корреляционную функцию с пересуммированной в лидирующем приближении, либо используя (7.88). Результаты представлены в таблице 7.1 (первая и вторая

$k_S, h/\text{Мпк}$	$\Delta x^{\text{ППМ}}/x_{\text{СО}}$		
	Полн.	Ур-е (7.88)	Ур-е (7.93)
0.05	−0.38%	−0.43%	−0.46%
0.1	−0.41%	−0.45%	−0.40%
0.2	−0.45%	−0.50%	−0.32%

Таблица 7.1. Сдвиг положения пика СО для красного смещения $z = 0$ для трех значений разделительного масштаба k_S . Первая колонка: полный результат в первом порядке малости. Вторая колонка: вычисление, основанное на ур-ии (7.88). Третья колонка: аналитическая оценка (7.94).

колонки) для трех различных значений разделительных масштабов. По модулю некоторого разброса, вызванного зависимостью от k_S , сдвиг в первом порядке малости достигает 0.4%. Данное значение лежит в диапазоне оценок, полученных в других подходах [47, 157–160] и согласуется с результатами измерения «физического» сдвига [47, 157]¹² из данных численного моделирования [160–162].

Полезно получить аналитическую оценку для $\Delta x^{\text{ППМ}}$. Легко убедиться, что спектр мощности в первом порядке малости имеет следующий вид

$$P_{\text{осц}}^{\text{ИК-пер,ППМ}}(z, k) = D(z)^4 e^{-k^2 D(z)^2 \Sigma^2} \left(H(k) P_{\text{осц}}(k) + S(z, k) \frac{dP_{\text{осц}}(k)}{dk} \right). \quad (7.89)$$

Первый член в скобках получает поправки за счет как мягких, так и жестких мод, в то время как второй член обусловлен исключительно мягкими модами с волновыми числами $q \lesssim k_{\text{осц}}$. Он описывает сдвиг фазы осциллирующего спектра мощности. Что касается функции $H(k)$, то для нас важно лишь то, что она монотонная, точное выражение не имеет значения для вычисления положения пика СО. Для $S(z, k)$ имеем,

$$S(z, k) = s k + (\Sigma_{\text{Силк}}^2 + \varkappa D(z)^2 \Sigma_b^2) k^3, \quad (7.90)$$

где Σ_b^2 определена в (7.76с), а два других коэффициента связаны с дисперсией плотности на масштабе $k_{\text{осц}}$ (детали вычисления приведены в Приложении Б),

$$s \sim \sigma^2(k_{\text{осц}}) \equiv \int_0^{k_{\text{осц}}} dq q^2 P_{\text{мон}}(q), \quad \Sigma_{\text{Силк}}^2 \sim \sigma^2(k_{\text{осц}})/k_{\text{Силк}}^2, \quad (7.91)$$

где $k_{\text{Силк}} \sim 0.2 h/\text{Мпк}$ – масштаб силковского подавления. Заметим, что в этой формуле функция s различна для ТД и ПЗ, а также для корреляторов скорости и плотности. Отметим наличие коэффициента \varkappa в (7.90) который различен в ПЗ ($\varkappa = 0$) и ТД ($\varkappa = 1$).

¹² Сдвиг, выванный экспоненциальным подавлением монотонной части спектра мощности в этих работах именуется «нефизическим», или «геометрическим».

Подставляем (7.89) в (7.88), что приводит к

$$\frac{\Delta x^{\text{ППМ}}}{x_{CO}} = k_{\text{осц}} D(z)^2 \frac{\int dk k^2 \cos(k/k_{\text{осц}}) [H(k) P_{\text{осц}}(k) + S(z, k) \frac{dP_{\text{осц}}}{dk}] e^{-k^2 D(z)^2 \Sigma^2}}{\int dk k^3 \sin(k/k_{\text{осц}}) P_{\text{осц}}(k) e^{-k^2 D(z)^2 \Sigma^2}}. \quad (7.92)$$

Используя анзац (7.84) для $P_{\text{осц}}$ видим, что интеграл в первом члене в числителе содержит быстро осциллирующую функцию и поэтому вносит пренебрежимо малый вклад. Во втором члене числителя мы интегрируем по частям и используя (7.90), получаем

$$\frac{\Delta x^{\text{ППМ}}}{x_{CO}} = D(z)^2 s + D(z)^2 (\Sigma_{\text{Силк}}^2 + \varkappa D(z)^2 \Sigma_b^2) \frac{\int dk k^5 P_{\text{осц}} e^{-k^2 D(z)^2 \Sigma^2} \sin(k/k_{\text{осц}})}{\int dk k^3 P_{\text{осц}} e^{-k^2 D(z)^2 \Sigma^2} \sin(k/k_{\text{осц}})}. \quad (7.93)$$

Для реалистичного спектра мощности отношение интегралов во втором слагаемом равно $0.02 [h/\text{Мпк}]^2$ при $z = 0$. Стоит заметить, что численно второй член даёт лишь малую поправку, так что в лидирующем порядке можно записать

$$\frac{\Delta x^{\text{ППМ}}}{x_{CO}} \approx D(z)^2 s. \quad (7.94)$$

Несмотря на это, для численных оценок мы будем использовать точное выражение (7.93). Эти оценки приведены в таблице 7.1 и согласуются с результатами полного численного вычисления корреляционной функции.

Как отмечалось ранее, значения s и \varkappa различны в ПЗ и ТД. Сдвиг пика СО вычисленный в приближении Зельдовича оказывается несколько меньше предсказаний точной динамики,

$$(\Delta x^{\text{ППМ}}/x_{CO})^{\text{ПЗ}} \simeq -(0.28 \div 0.22)\%,$$

в зависимости от k_S . Таким образом, несмотря на то, что ПЗ даёт достаточно аккуратное описание разглаживания СО, оно недооценивает сдвиг фазы. Появление различия ожидаемо, так как сдвиг пика СО обусловлен недипольной частью вершин взаимодействия, которая различна в ПЗ и ТД. Заключаем, что реконструкция СО использующая лишь приближение Зельдовича должна оставлять остаточный сдвиг порядка 0.1%. Эта разница, скорее всего, слишком мала, чтобы на практике повлиять на определение положения пика СО.

В заключение, подчеркнем что результаты этого раздела носят лишь качественный характер. Несмотря на то, что аналитические и численные выражения для сдвига пика СО находятся в хорошем согласии с данными численного моделирования, конкретные числа из таблицы 7.1 должны быть рассмотрены лишь как оценки по порядку величины. Эти значения меньше 1%, который был принят нами как желаемый предел точности, что указывает на необходимость пересмотра некоторых приближений, которые были сделаны при выводе этих выражений. Также отметим, что реалистичное вычисление положения пика

СО должно включать эффекты статического смещения плотностей наблюдаемых объектов (напр. галактик) по сравнению с плотностью тёмной материи [158, 159, 163], которые не были рассмотрены в этой главе.

7.7. Заключение к главе

В данной главе был представлен систематический подход для описания нелинейной эволюции сахаровских (барионных акустических) осцилляций, которые присутствуют в распределении материи на больших масштабах. Был представлен метод пересуммирования нелинейных поправок, возникающих из-за взаимодействия с длинноволновыми возмущениями, которые значительно усиливаются для осциллирующих компонент космологических корреляционных функций.

Предложенный подход основан на формализме ТВВР, в котором отсутствуют нефизические инфракрасные расходимости, что особенно важно для изучения взаимодействия с мягкими модами. Помимо этого, ТВВР основан на эйлеровом гидродинамическом описании и поэтому не обладает недостатками, возникающими при рассмотрении мелкомасштабной динамики в лагранжевой теории возмущений.

Сперва было показано, что ИК эффекты важны только для осциллирующей части линейного спектра мощности, что мотивировало разделение пропагаторов и вершинных функций ТВВР на монотонную и осциллирующую компоненты. Затем были отождествлены и пересуммированы усиленные в инфракрасной области петлевые вклады. Примечательно, что процедура пересуммирования имеет простую диаграммную интерпретацию, в которой лидирующие вклады соответствуют диаграммам – *ромашкам*. В рамках разработанной техники подсчета степеней были выделены и пересуммированы вклады первого порядка малости по жестким и мягким петлям.

Был получен простой алгоритм для численного вычисления ИК – пересуммированных корреляционных функций. Во всех вычисляемых, по сути, необходимо заменить линейный спектр мощности на спектр мощности с экспоненциально подавленной осциллирующей частью. Итоговый результат для ИК – пересуммированного спектра мощности, который включает все поправки первого порядка малости, приведен в формуле (7.75). Было продемонстрировано, что он описывает нелинейную эволюцию сахаровских осцилляций с процентной точностью.

Заключение

В заключение, перечислим основные результаты, представленные в диссертации.

1. Были изучены производство и эволюция космологических возмущений в квадратичной гравитации, параметры которой удовлетворяют теоретическим ограничениям на частоту процессов нарушающих унитарность и экспериментам гравитации на малых масштабах. Номинально, предсказания данной модели не зависят от способа решения проблемы отсутствия унитарности. Было показано, что в таком рассмотрении с неизбежностью наступает фаза, при которой расширение Вселенной доминировано нарушающей унитарность степенью свободы (*духом*). Данная фаза несопоставима с наблюдаемой картиной Вселенной, что указывает на необходимость решения проблемы неунитарности квадратичной гравитации для построения самосогласованных феноменологических моделей.
2. Были поставлены ограничения на скорость распространения гравитационных волн в теориях гравитации с нарушенной Лоренцевой симметрией. Данные теории имеют в гравитационном действии новые операторы, которые описывают единичное времени-подобное векторное поле – *эфир*. Наличие этих операторов приводит к изменению дисперсионного соотношения для гравитационных волн, в частности, к отклонению скорости их распространения от скорости света. Это отклонение было ограничено из недавнего наблюдения гравитационных волн интерферометром LIGO.
3. Была предложена модель инфляции, основанная на теории гравитации с нарушенной Лоренцевой симметрией. Ускоренное расширение Вселенной происходит за счет взаимодействия эфира и инфлатона. Благодаря этому взаимодействию инфлатон приобретает постоянное вакуумное значение скорости, которое может быть весьма большим в отличие от известного сценария с быстрым скатыванием. На уровне длинноволновых возмущений предложенная модель оказывается аналогичной духовой инфляции, хотя и имеются важные различия между ними, в частности, в предсказаниях для космологических наблюдаемых. Таким образом, предложенная модель осуществляет ультрафиолетовое пополнение духовой инфляции и, в отличие от традиционного подхода в рамках эффективной теории инфляции, также описывает фоновую динамику инфлатона. В наиболее интересном с феноменологической точки зрения режиме, в котором ускоренное расширение Вселенной целиком обусловлено кинетической энергией ин-

флатона, модель предсказывает сравнительно высокое скалярно – тензорное отношение $r \sim 0.01 \div 0.1$ и негауссовость равностороннего типа с амплитудой $f_{NL} \sim -5 \div -40$. Данные предсказания могут быть проверены наблюдательно уже в ближайшем будущем.

4. Была изучена возможность того, что Лоренц – инвариантность (ЛИ) нарушена в секторе тёмной материи (ТМ). Было найдено, что эффекты взаимодействия ТМ с эфиром могут быть описаны всего одним параметром, Y . Был рассмотрен ньютоновский предел, в котором было показано, что Лоренц – нарушение (ЛН) ведет к нарушению принципа эквивалентности в тёмной материи на малых масштабах, тем временем как на бóльших расстояниях этот эффект экранирован. Было развито макроскопическое эффективно – полевое описание тёмной материи с нарушенной Лоренцевой симметрией и исследована космологическая динамика. Было показано, что однородная эволюция Вселенной в предложенной модели не отличается от стандартного случая Λ CDM. Однако, нетривиальная динамика Лоренц-нарушающей гравитации и тёмной материи проявляется на уровне космологических возмущений. Были выделены четыре основных эффекта: (1) усиление само-гравитации компонент материи, (2) новый вклад в анизотропное напряжение, (3) ускоренный рост гравитационных потенциалов тёмной материи вследствие нарушения принципа эквивалентности и (4) появление масштабно-зависимого барионного смещения. Первые два эффекта присущи любой теории с нарушением ЛИ в секторе гравитации, тем временем как последние два являются специфичными для нарушения ЛИ в тёмной материи. Данные эффекты и их влияние на крупномасштабную структуру Вселенной и анизотропию реликтового излучения были изучена аналитически и численно.
5. Используя наблюдательные данные спутника «Планк» и глубокого обзора «ВигглЗ», были получены ограничения на параметры нарушения ЛИ в гравитации и тёмной материи. Отклонения от ЛИ в секторе тёмной материи оказались ограничены на уровне 3%, тем временем как ЛН в гравитации было ограничено на уровне $0.1 \div 1\%$ в зависимости от модели. Показано, что для получения более точных ограничений необходимо изучение скучивания тёмной материи в нелинейном режиме.
6. Предложен новый аналитический подход для описания формирования крупномасштабной структуры Вселенной в нелинейном режиме, названный *теория возмущений на временных расслоениях* (ТВВР). Главным элементом данного метода является за-

висящая от времени функция распределения вероятности полей плотности и скорости, которая производит космологические корреляторы на фиксированных красных смещениях. Пертурбативное разложение функции вероятности возле гауссова веса приводит к диаграммному разложению, аналогичному трехмерной евклидовой квантовой теории поля, в которой время играет роль внешнего параметра. Было показано, что ни один элемент разложения не содержит инфракрасных расходимостей, что находится в согласии с соображениями симметрии (тождествами Уорда).

7. Подход ТВВР был использован для изучения инфракрасных эффектов, влияющих на нелинейную эволюцию сахаровских осцилляций в корреляционных функциях плотности материи. Была разработана техника систематического пересуммирования инфракрасно – усиленных диаграмм, которая позволила получить выражения для корреляторов в главном порядке и первом порядке малости. Было показано, что теоретические предсказания для инфракрасно—пересуммированной двухточечной корреляционной функции согласуются с данными численного моделирования с процентной точностью.

Благодарности

Автор хотел бы выразить искреннюю признательность Сергею Сибирякову за внимание к работе, его неиссякаемую энергетику, конструктивную критику и постоянную поддержку во всех научных и жизненных вопросах.

Помимо этого автор хотел бы поблагодарить своих коллег и соавторов А. Токареву, А. Шкерина, Г. Рубцова, М. Пширкова, А. Топоренского, Е. Букжалева, Д. Бласа, М. Гарни, Ж. Лезгурга, Б. Одрена, И. Савицки за плодотворную совместную работу.

Автор хотел бы выразить благодарность В. А. Рубакову за поддержку, а также его проникновенную научную и педагогическую работу. Автор благодарен Д. Горбунову, С. Демидову, Д. Левкову, М. Либанову, Э. Нугаеву, А. Панину, И. Ткачеву, С. Троицкому, М. Кузнецову, С. Миронову, П. Сатунину и всем остальным сотрудникам, аспирантам и студентам Отдела Теоретической Физики ИЯИ РАН за уникальную творческую атмосферу и доброжелательность.

Помимо этого, автор благодарен всем своим друзьям и коллегам, принимавших участие в важных обсуждениях повлиявших на содержание диссертации, в частности, В. Васильеву, А. Казанцеву, Т. Кешелаве, А. Козлову, Е. Кызынгашевой, П. Медведеву, Б. Низамову, Н. Порайко, К. Птицыной, А. Роевко, И. Тимирясову, П. Янчикову и многим другим. От-

дельная благодарность А. Миннеханову за ценные стилистические замечания и всестороннюю поддержку в процессе написания диссертации.

Автор посвящает диссертационную работу своей семье: Г. В. Ивановой, М. Н. Иванову, К. М. Ивановой и в особенности Лилии Ивановой.

Список сокращений

Λ CDM — стандартная космологическая модель (англ. Λ -Cold-Dark-Matter)

ГП — главный порядок

ИК — инфракрасный

КСВ — крупномасштабная структура Вселенной

КТП — квантовая теория поля

ЛИ — Лоренц-инвариантность

ЛН — Лоренц-нарушение

ЛНТМ — Лоренц-нарушающая тёмная материя

НПЭТП — нарушение принципа эквивалентности в тёмной материи

ОТО — общая теория относительности

ПЗ — приближение Зельдовича

ППМ — первый порядок малости

ППН — параметризованный постньютоновский формализм

ПТВ — перенормированная теория возмущений

СО — сахаровские осцилляции

СТВ — стандартная теория возмущений

ТВВР — теория возмущений на временных расслоениях

ТД — точная динамика

ТМ — тёмная материя

ТЭИ — тензор энергии-импульса

УФ — ультрафиолетовый

Приложение А

Полиномы для поправок первого порядка малости

Полиномиальные функции, возникающие в поправках первого порядка малости к осциллирующему спектру мощности (7.77) даны выражениями:

$$\begin{aligned}
h_1(x, y) &= \frac{1}{k_{\text{осц}}} \int \frac{d\Omega_q d\Omega_{q'}}{(4\pi)^2} \frac{c_{kq} c_{kq'} (qc_{kq} + q'c_{kq'}) s_{qq'}^2 qq'}{(q^2 + 2qq'c_{qq'} + q'^2)} \sin((qc_{kq} + q'c_{kq'})/k_{\text{осц}}) \Big|_{\substack{q=xk_{\text{осц}} \\ q'=yk_{\text{осц}}}} \\
&= -\frac{1}{60x^2y^2} (720 + x^4 - 12y^2 + y^4 - 2x^2(6 + y^2)) \cos[x] \cos[y] \\
&\quad - \frac{1}{240x^3y^3} (x^2 - y^2)^4 (\text{Ci}[|x - y|] - \text{Ci}[x + y]) \\
&\quad - \frac{1}{240x^3(x^2 - y^2)y^3} \left\{ -2y \left(x^8 - 2x^6(3 + 2y^2) + 2x^4(-300 + 5y^2 + 3y^4) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + y^2(-1440 + 24y^2 - 2y^4 + y^6) - 2x^2(-720 - 240y^2 + y^4 + 2y^6) \right) \cos[y] \sin[x] \right. \\
&\quad \left. + 2 \left(x(x^8 - 2x^6(1 + 2y^2) + x^4(24 - 2y^2 + 6y^4) + 2x^2(-720 + 240y^2 + 5y^4 - 2y^6) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + y^2(1440 - 600y^2 - 6y^4 + y^6) \right) \cos[x] + (x^2 - y^2) \left(1440 + x^6 - 600y^2 - 6y^4 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + y^6 - x^4(6 + y^2) - x^2(600 - 204y^2 + y^4) \right) \sin[x] \right) \sin[y] \Big\}, \tag{A.1}
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
h_2(x, y) &= -\frac{1}{k_{\text{осц}}} \int \frac{d\Omega_q d\Omega_{q'}}{(4\pi)^2} \frac{c_{kq} c_{kq'} (qc_{kq} + q'c_{kq'}) s_{qq'}^2 qq'}{(q^2 + 2qq'c_{qq'} + q'^2)} \sin(qc_{kq}/k_{\text{осц}}) \Big|_{q=xk_{\text{осц}}, q'=yk_{\text{осц}}} \\
&= -\frac{1}{192x^8y^3} \left\{ x \cos[x] \left(4xy \left(3x^8 + 27y^6 - 3x^2y^4(21 + y^2) + x^4y^2(-3 + 5y^2) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - x^6(9 + 5y^2) \right) + 3(x - y)^3(x + y)^3(x^4 - 9y^2 + x^2(-3 + y^2)) \log \left[\frac{(x - y)^2}{(x + y)^2} \right] \right) \\
&\quad + \left(4xy(9x^6 - 6x^8 + x^4(3 + 4x^2))y^2 + x^2(63 - 26x^2)y^4 + 3(-9 + 4x^2)y^6 \right. \\
&\quad \left. - 3(x - y)^3(x + y)^3(2x^4 - 9y^2 + x^2(-3 + 4y^2)) \log \left[\frac{(x - y)^2}{(x + y)^2} \right] \right) \sin[x] \Big\}, \tag{A.2}
\end{aligned}$$

где были использованы обозначения $c_{kq} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}/(kq)$, $c_{kq'} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}'/(kq')$, $c_{qq'} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}'/(qq')$, $s_{qq'}^2 = 1 - c_{qq'}^2$.

Приложение Б

Вычисление сдвига положения пика сахаровских осцилляций

В данном разделе мы выведем уравнение (7.89). Согласно уравнению (7.75) нам необходимо вычислить 1–петлевую поправку к спектру мощности, используя экспоненциально подавленный осциллирующий спектр мощности. В дальнейшем будет удобно работать в рамках стандартной теории возмущений,

$$P^{1\text{-петл}}(z, k) = D(z)^4 \left[6P(k) \int [dq] F_3(\mathbf{k}, \mathbf{q}, -\mathbf{q}) P(q) + 2 \int [dq] (F_2(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{q}))^2 P(q) P(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) \right], \quad (\text{Б.1})$$

где E_n – интегральные ядра СТВ F_n для поля плотности. Первый и второй член в скобках называются, соответственно P_{13} и P_{22} . Производя разделение на гладкую и осциллирующие части видим, что член P_{13} имеет только вклад, пропорциональный $P_{\text{осц}}(k)$, и не меняет фазы СО. Для члена P_{22} мы разделяем область интегрирования на мягкий и жесткий домены,

$$P_{\text{осц},22} [e^{-k^2 D(z)^2 \Sigma^2} P_{\text{осц}}] = 4D(z)^4 \left[\int_{q \leq k_S} [dq] + \int_{q \geq k_S} [dq] \right] (E_2(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{q}))^2 \times P_{\text{мон}}(q) P_{\text{осц}}(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) e^{-(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 D(z)^2 \Sigma^2}. \quad (\text{Б.2})$$

Интеграл по жестким модам исчезающе мал, так как он содержит быстро осциллирующую функцию. В мягкой части мы используем выражения ,

$$F_2(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{q}) = \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})}{2q^2} \left(1 + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{k^2} + \Upsilon \frac{q^2}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})} \sin^2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) + O(q^2/k^2) \right), \quad (\text{Б.3})$$

где коэффициент $\Upsilon = 3/7$ для спектра мощности плотности в ТД и $\Upsilon = 0$ в приближении Зельдовича. Используя представление (7.84) получаем,

$$P_{\text{осц}}(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|) = P_{\text{осц}}(k) \left[\cos \frac{(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q})}{k_{\text{осц}}} + \frac{d \log f_{\text{мод}}}{d \log k} \left(\frac{k_{\text{осц}}}{k} \sin \frac{(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q})}{k_{\text{осц}}} - \frac{(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q})}{k} \cos \frac{(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q})}{k_{\text{осц}}} \right) + \frac{q^2}{2kk_{\text{осц}}} \sin^2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \sin \frac{(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q})}{k_{\text{осц}}} \right] + k_{\text{осц}} \frac{dP_{\text{осц}}(k)}{dk} \left[- \sin \frac{(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q})}{k_{\text{осц}}} + \frac{d \log f_{\text{мод}}}{d \log k} \frac{(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q})}{k} \sin \frac{(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q})}{k_{\text{осц}}} + \frac{q^2}{2kk_{\text{осц}}} \sin^2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \cos \frac{(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{q})}{k_{\text{осц}}} \right]. \quad (\text{Б.4})$$

Раскладывая экспоненту в (Б.2) и интегрируя по углам, получаем

$$P_{\text{осц},22} [e^{-k^2 D(z)^2 \Sigma^2} P_{\text{осц}}] = D(z)^4 e^{-k^2 D(z)^2 \Sigma^2} \left[\tilde{H}(z, k) P_{\text{осц}}(k) + \tilde{S}(z, k) \frac{dP_{\text{осц}}(k)}{dk} \right], \quad (\text{Б.5})$$

где точный вид $\tilde{H}(z, k)$ не важен для наших целей. Второй член равен

$$\tilde{S}(z, k) = k \left(1 - \frac{1}{2} \frac{d \log f_{\text{мод}}}{d \log k} \right) s_1 + k(s_2 + s_3) - k^3 D(z)^2 \Sigma_a^2 \quad (\text{Б.6})$$

где

$$s_1 = -8\pi k_{\text{осц}} \int_0^{k_S} dq q P_{\text{мон}}(q) \int_0^1 d\mu \mu^3 \sin(q\mu/k_{\text{осц}}) \quad (\text{Б.7a})$$

$$s_2 = -8\pi \Upsilon k_{\text{осц}} \int_0^{k_S} dq q P_{\text{мон}}(q) \int_0^1 d\mu \mu(1 - \mu^2) \sin(\mu q/k_{\text{осц}}), \quad (\text{Б.7b})$$

$$s_3 = 2\pi \int_0^{k_S} dq q^2 P_{\text{мон}}(q) \int_0^1 d\mu \mu^2(1 - \mu^2) \cos(q\mu k_{\text{осц}}), \quad (\text{Б.7c})$$

и Σ_a^2 была определена в (7.76a). На масштабах СО модулирующая функция хорошо аппроксимируется выражением (см. также ур-е (7.5))

$$f_{\text{мод}}(k) \propto k^{-m} e^{-(k/k_{\text{Силк}})^2} \quad (\text{Б.8})$$

с $m \approx 3/2$. Комбинируя (Б.5) с вкладом от $P_{\text{осц},13}$ и последним членом из (7.75), получаем уравнения (7.89), (7.90) с

$$s = (1 + m/2)s_1 + s_2 + s_3, \quad \Sigma_{\text{Силк}}^2 = s_1/k_{\text{Силк}}^2. \quad (\text{Б.9})$$

Литература

1. Weinberg Steven. The Cosmological Constant Problem // *Rev. Mod. Phys.* 1989. Vol. 61. P. 1–23.
2. Linde Andrei D. Chaotic Inflation // *Phys. Lett.* 1983. Vol. B129. P. 177–181.
3. Ade P. A. R. et al. Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation // *Astron. Astrophys.* 2016. Vol. 594. P. A20. [arXiv:astro-ph.CO/1502.02114](https://arxiv.org/abs/1502.02114).
4. Weinberg Steven. Photons and gravitons in perturbation theory: Derivation of Maxwell’s and Einstein’s equations // *Phys. Rev.* 1965. Vol. 138. P. B988–B1002.
5. Donoghue John F., Ivanov Mikhail M., Shkerin Andrey. EPFL Lectures on General Relativity as a Quantum Field Theory. 2017. [arXiv:hep-th/1702.00319](https://arxiv.org/abs/1702.00319).
6. Polchinski Joseph. String Theory // Cambridge University Press, Cambridge U.K. 1998.
7. Stelle K. S. Classical Gravity with Higher Derivatives // *Gen. Rel. Grav.* 1978. Vol. 9. P. 353–371.
8. Stelle K. S. Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity // *Phys. Rev.* 1977. Vol. D16. P. 953–969.
9. Fradkin E. S., Tseytlin Arkady A. Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity // *Nucl. Phys.* 1982. Vol. B201. P. 469–491.
10. Fradkin E. S., Tseytlin Arkady A. Renormalizable Asymptotically Free Quantum Theory of Gravity // *Phys. Lett.* 1981. Vol. 104B. P. 377–381.
11. Avramidi I. G., Barvinsky A. O. Asymptotic freedom in higher derivative quantum gravity // *Phys. Lett.* 1985. Vol. B159. P. 269–274.
12. Salvio Alberto, Strumia Alessandro. Agravity // *JHEP.* 2014. Vol. 06. P. 080. [arXiv:hep-ph/1403.4226](https://arxiv.org/abs/1403.4226).
13. Einhorn Martin B., Jones D. R. Timothy. Naturalness and Dimensional Transmutation in Classically Scale-Invariant Gravity // *JHEP.* 2015. Vol. 03. P. 047. [arXiv:hep-th/1410.8513](https://arxiv.org/abs/1410.8513).
14. Feynman Richard P. Negative probability. 1984.
15. Maldacena Juan. Einstein Gravity from Conformal Gravity. 2011. [arXiv:hep-th/1105.5632](https://arxiv.org/abs/1105.5632).
16. Salvio Alberto, Strumia Alessandro. Quantum mechanics of 4-derivative theories // *Eur. Phys. J.* 2016. Vol. C76, no. 4. P. 227. [arXiv:hep-th/1512.01237](https://arxiv.org/abs/1512.01237).
17. Starobinsky Alexei A. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity // *Phys. Lett.* 1980. Vol. B91. P. 99–102.
18. Horava Petr. Quantum Gravity at a Lifshitz Point // *Phys. Rev.* 2009. Vol. D79. P. 084008.

- [arXiv:hep-th/0901.3775](https://arxiv.org/abs/hep-th/0901.3775).
19. Lifshitz E. M. // *Zh. Eksp. Teor. Phys.* 1941. Vol. 11. P. 255.
 20. Lifshitz E. M. // *Zh. Eksp. Teor. Phys.* 1941. Vol. 11. P. 269.
 21. Barvinsky Andrei O., Blas Diego, Herrero-Valea Mario et al. Renormalization of Hořava gravity // *Phys. Rev.* 2016. Vol. D93, no. 6. P. 064022. [arXiv:hep-th/1512.02250](https://arxiv.org/abs/hep-th/1512.02250).
 22. Barvinsky Andrei O., Blas Diego, Herrero-Valea Mario et al. Renormalization of gauge theories in the background-field approach. 2017. [arXiv:hep-th/1705.03480](https://arxiv.org/abs/hep-th/1705.03480).
 23. Blas D., Pujolas O., Sibiryakov S. Comment on ‘Strong coupling in extended Horava-Lifshitz gravity’ // *Phys. Lett.* 2010. Vol. B688. P. 350–355. [arXiv:hep-th/0912.0550](https://arxiv.org/abs/hep-th/0912.0550).
 24. Blas D., Pujolas O., Sibiryakov S. Consistent Extension of Horava Gravity // *Phys. Rev. Lett.* 2010. Vol. 104. P. 181302. [arXiv:hep-th/0909.3525](https://arxiv.org/abs/hep-th/0909.3525).
 25. Eling Christopher, Jacobson Ted, Mattingly David. Einstein-Aether theory // *Deserfest: A celebration of the life and works of Stanley Deser. Proceedings, Meeting, Ann Arbor, USA, April 3-5, 2004.* 2004. P. 163–179. [arXiv:gr-qc/0410001](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0410001).
 26. Jacobson Ted, Mattingly David. Gravity with a dynamical preferred frame // *Phys. Rev.* 2001. Vol. D64. P. 024028. [arXiv:gr-qc/0007031](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0007031).
 27. Jacobson Ted. Einstein-aether gravity: A Status report // *PoS.* 2007. Vol. QG-PH. P. 020. [arXiv:gr-qc/0801.1547](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0801.1547).
 28. Mattingly David. Modern tests of Lorentz invariance // *Living Rev. Rel.* 2005. Vol. 8. P. 5. [arXiv:gr-qc/0502097](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0502097).
 29. Groot Nibbelink Stefan, Pospelov Maxim. Lorentz violation in supersymmetric field theories // *Phys.Rev.Lett.* 2005. Vol. 94. P. 081601. [arXiv:hep-ph/0404271](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0404271).
 30. Pujolas Oriol, Sibiryakov Sergey. Supersymmetric Aether // *JHEP.* 2012. Vol. 1201. P. 062. [arXiv:hep-th/1109.4495](https://arxiv.org/abs/hep-th/1109.4495).
 31. Ade P. A. R. et al. Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results // *Astron. Astrophys.* 2014. Vol. 571. P. A1. [arXiv:astro-ph.CO/1303.5062](https://arxiv.org/abs/astro-ph.CO/1303.5062).
 32. Peebles Phillip James Edwin. *The Large-scale Structure of the Universe* // Princeton University Press. 1980.
 33. Pueblas Sebastian, Scoccimarro Roman. Generation of Vorticity and Velocity Dispersion by Orbit Crossing // *Phys. Rev.* 2009. Vol. D80. P. 043504. [arXiv:astro-ph/0809.4606](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0809.4606).
 34. Baumann Daniel, Nicolis Alberto, Senatore Leonardo, Zaldarriaga Matias. Cosmological Non-Linearities as an Effective Fluid // *JCAP.* 2012. Vol. 1207. P. 051. [arXiv:astro-ph.CO/1004.2488](https://arxiv.org/abs/astro-ph.CO/1004.2488).

35. Pietroni Massimo, Mangano Gianpiero, Saviano Ninetta, Viel Matteo. Coarse-Grained Cosmological Perturbation Theory // *JCAP*. 2012. Vol. 1201. P. 019. [arXiv:astro-ph.CO/1108.5203](#).
36. Carrasco John Joseph M., Hertzberg Mark P., Senatore Leonardo. The Effective Field Theory of Cosmological Large Scale Structures // *JHEP*. 2012. Vol. 09. P. 082. [arXiv:astro-ph.CO/1206.2926](#).
37. Gurevich, Aleksandr V. and Zybin, Kirill P. Large-scale structure of the Universe. Analytic theory. // *Physics-Uspekhi*. 1995. Vol. 38, no. 7. P. 687. URL: <http://stacks.iop.org/1063-7869/38/i=7/a=A02>.
38. Ade P. A. R. et al. Planck 2015 results. XVII. Constraints on primordial non-Gaussianity // *Astron. Astrophys.* 2016. Vol. 594. P. A17. [arXiv:astro-ph.CO/1502.01592](#).
39. Bernardeau F., Colombi S., Gaztanaga E., Scoccimarro R. Large scale structure of the universe and cosmological perturbation theory // *Phys. Rept.* 2002. Vol. 367. P. 1–248. [arXiv:astro-ph/astro-ph/0112551](#).
40. Bernardeau Francis. [The evolution of the large-scale structure of the universe: beyond the linear regime](#) // Proceedings, 100th Les Houches Summer School: Post-Planck Cosmology: Les Houches, France, July 8 - August 2, 2013. 2015. P. 17–79. [arXiv:astro-ph.CO/1311.2724](#). URL: <http://inspirehep.net/record/1264888/files/arXiv:1311.2724.pdf>.
41. Scoccimarro Roman, Frieman Joshua. Loop corrections in nonlinear cosmological perturbation theory // *Astrophys. J. Suppl.* 1996. Vol. 105. P. 37. [arXiv:astro-ph/astro-ph/9509047](#).
42. Baldauf Tobias, Mercolli Lorenzo, Zaldarriaga Matias. Effective field theory of large scale structure at two loops: The apparent scale dependence of the speed of sound // *Phys. Rev.* 2015. Vol. D92, no. 12. P. 123007. [arXiv:astro-ph.CO/1507.02256](#).
43. Foreman Simon, Perrier Hideki, Senatore Leonardo. Precision Comparison of the Power Spectrum in the EFTofLSS with Simulations // *JCAP*. 2016. Vol. 1605, no. 05. P. 027. [arXiv:astro-ph.CO/1507.05326](#).
44. Nishimichi Takahiro, Bernardeau Francis, Taruya Atsushi. Response function of the large-scale structure of the universe to the small scale inhomogeneities // *Phys. Lett.* 2016. Vol. B762. P. 247–252. [arXiv:astro-ph.CO/1411.2970](#).
45. Blas Diego, Garny Mathias, Konstandin Thomas. On the non-linear scale of cosmological perturbation theory // *JCAP*. 2013. Vol. 1309. P. 024. [arXiv:astro-ph.CO/1304.1546](#).
46. Eisenstein Daniel J., Seo Hee-jong, White Martin J. On the Robustness of the Acoustic Scale in the Low-Redshift Clustering of Matter // *Astrophys. J.* 2007. Vol. 664. P. 660–674.

- [arXiv:astro-ph/astro-ph/0604361](#).
47. Crocce Martin, Scoccimarro Roman. Nonlinear Evolution of Baryon Acoustic Oscillations // *Phys. Rev.* 2008. Vol. D77. P. 023533. [arXiv:astro-ph/0704.2783](#).
 48. Senatore Leonardo, Zaldarriaga Matias. The IR-resummed Effective Field Theory of Large Scale Structures // *JCAP*. 2015. Vol. 1502, no. 02. P. 013. [arXiv:astro-ph.CO/1404.5954](#).
 49. Baldauf Tobias, Mirbabayi Mehrdad, Simonovic Marko, Zaldarriaga Matias. Equivalence Principle and the Baryon Acoustic Peak // *Phys. Rev.* 2015. Vol. D92, no. 4. P. 043514. [arXiv:astro-ph.CO/1504.04366](#).
 50. Eisenstein Daniel J., Hu Wayne, Tegmark Max. Cosmic complementarity: $H(0)$ and $\Omega(m)$ from combining CMB experiments and redshift surveys // *Astrophys. J.* 1998. Vol. 504. P. L57–L61. [arXiv:astro-ph/astro-ph/9805239](#).
 51. Eisenstein Daniel J. et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies // *Astrophys. J.* 2005. Vol. 633. P. 560–574. [arXiv:astro-ph/astro-ph/0501171](#).
 52. Percival Will J. et al. Baryon Acoustic Oscillations in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 7 Galaxy Sample // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2010. Vol. 401. P. 2148–2168. [arXiv:astro-ph.CO/0907.1660](#).
 53. Anderson Lauren et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: baryon acoustic oscillations in the Data Releases 10 and 11 Galaxy samples // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2014. Vol. 441, no. 1. P. 24–62. [arXiv:astro-ph.CO/1312.4877](#).
 54. Delubac Timothee et al. Baryon acoustic oscillations in the Ly alpha forest of BOSS DR11 quasars // *Astron. Astrophys.* 2015. Vol. 574. P. A59. [arXiv:astro-ph.CO/1404.1801](#).
 55. Eisenstein Daniel J., Seo Hee-jong, Sirko Edwin, Spergel David. Improving Cosmological Distance Measurements by Reconstruction of the Baryon Acoustic Peak // *Astrophys. J.* 2007. Vol. 664. P. 675–679. [arXiv:astro-ph/astro-ph/0604362](#).
 56. Jain Bhuvnesh, Bertschinger Edmund. Selfsimilar evolution of cosmological density fluctuations // *Astrophys. J.* 1996. Vol. 456. P. 43. [arXiv:astro-ph/astro-ph/9503025](#).
 57. Peloso Marco, Pietroni Massimo. Galilean invariance and the consistency relation for the nonlinear squeezed bispectrum of large scale structure // *JCAP*. 2013. Vol. 1305. P. 031. [arXiv:astro-ph.CO/1302.0223](#).
 58. Sugiyama Naonori S., Spergel David N. How does non-linear dynamics affect the baryon acoustic oscillation? // *JCAP*. 2014. Vol. 1402. P. 042. [arXiv:astro-ph.CO/1306.6660](#).
 59. Noh Yookyung, White Martin, Padmanabhan Nikhil. Reconstructing baryon oscillations //

- Phys. Rev.* 2009. Vol. D80. P. 123501. [arXiv:astro-ph.CO/0909.1802](#).
60. Tassev Svetlin, Zaldarriaga Matias. Towards an Optimal Reconstruction of Baryon Oscillations // *JCAP*. 2012. Vol. 1210. P. 006. [arXiv:astro-ph.CO/1203.6066](#).
 61. Burden Angela, Percival Will J., Manera Marc et al. Efficient Reconstruction of Linear Baryon Acoustic Oscillations in Galaxy Surveys // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2014. Vol. 445, no. 3. P. 3152–3168. [arXiv:astro-ph.CO/1408.1348](#).
 62. Zeldovich Ya. B. Gravitational instability: An Approximate theory for large density perturbations // *Astron. Astrophys.* 1970. Vol. 5. P. 84–89.
 63. Matsubara Takahiko. Resumming Cosmological Perturbations via the Lagrangian Picture: One-loop Results in Real Space and in Redshift Space // *Phys. Rev.* 2008. Vol. D77. P. 063530. [arXiv:astro-ph/0711.2521](#).
 64. Tassev Svetlin. Lagrangian or Eulerian; Real or Fourier? Not All Approaches to Large-Scale Structure Are Created Equal // *JCAP*. 2014. Vol. 1406. P. 008. [arXiv:astro-ph.CO/1311.4884](#).
 65. Vlah Zvonimir, Seljak Uros, Baldauf Tobias. Lagrangian perturbation theory at one loop order: successes, failures, and improvements // *Phys. Rev.* 2015. Vol. D91. P. 023508. [arXiv:astro-ph.CO/1410.1617](#).
 66. Arkani-Hamed Nima, Creminelli Paolo, Mukohyama Shinji, Zaldarriaga Matias. Ghost inflation // *JCAP*. 2004. Vol. 0404. P. 001. [arXiv:hep-th/hep-th/0312100](#).
 67. Ivanov Mikhail M., Tokareva Anna A. Cosmology with a light ghost // *JCAP*. 2016. Vol. 1612, no. 12. P. 018. [arXiv:hep-th/1610.05330](#).
 68. Ivanov Mikhail M. Systematic treatment of non-linear effects in Baryon Acoustic Oscillations // *EPJ Web Conf.* 2016. Vol. 125. P. 03006. [arXiv:astro-ph.CO/1607.05329](#).
 69. Blas Diego, Garny Mathias, Ivanov Mikhail M., Sibiryakov Sergey. Time-Sliced Perturbation Theory II: Baryon Acoustic Oscillations and Infrared Resummation // *JCAP*. 2016. Vol. 1607, no. 07. P. 028. [arXiv:astro-ph.CO/1605.02149](#).
 70. Blas Diego, Garny Mathias, Ivanov Mikhail M., Sibiryakov Sergey. Time-Sliced Perturbation Theory for Large Scale Structure I: General Formalism // *JCAP*. 2016. Vol. 1607, no. 07. P. 052. [arXiv:astro-ph.CO/1512.05807](#).
 71. Blas Diego, Ivanov Mikhail M., Sawicki Ignacy, Sibiryakov Sergey. On constraining the speed of gravitational waves following GW150914 // *JETP Lett.* 2016. Vol. 103, no. 10. P. 624–626. [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*103,no.10,708(2016)]. [arXiv:gr-qc/1602.04188](#).
 72. Audren B., Blas D., Ivanov M. M. et al. Cosmological constraints on deviations from Lorentz

- invariance in gravity and dark matter // *JCAP*. 2015. Vol. 1503, no. 03. P. 016. [arXiv:astro-ph.CO/1410.6514](#).
73. Ivanov Mikhail M., Sibiryakov Sergey. UV-extending Ghost Inflation // *JCAP*. 2014. Vol. 1405. P. 045. [arXiv:astro-ph.CO/1402.4964](#).
74. Blas Diego, Ivanov Mikhail M., Sibiryakov Sergey. Testing Lorentz invariance of dark matter // *JCAP*. 2012. Vol. 1210. P. 057. [arXiv:astro-ph.CO/1209.0464](#).
75. Coughlan G. D., Fischler W., Kolb Edward W. et al. Cosmological Problems for the Polonyi Potential // *Phys. Lett.* 1983. Vol. B131. P. 59–64.
76. Ruzmaikina T., Ruzmaikin A. Quadratic Corrections to the Lagrangian Density of the Gravitational Field and the Singularity // *JETP Lett.* 1970. Vol. 30. P. 372.
77. Barrow John D., Hervik Sigbjorn. On the evolution of universes in quadratic theories of gravity // *Phys. Rev.* 2006. Vol. D74. P. 124017. [arXiv:gr-qc/gr-qc/0610013](#).
78. Ivanov Mikhail, Toporensky Alexey V. Stable super-inflating cosmological solutions in $f(R)$ -gravity // *Int. J. Mod. Phys.* 2012. Vol. D21. P. 1250051. [arXiv:gr-qc/1112.4194](#).
79. Magnano G., Ferraris M., Francaviglia M. Nonlinear gravitational Lagrangians // *Gen. Rel. Grav.* 1987. Vol. 19. P. 465.
80. Kannike Kristjan, Hutsi Gert, Pizza Liberato et al. Dynamically Induced Planck Scale and Inflation // *JHEP*. 2015. Vol. 05. P. 065. [arXiv:astro-ph.CO/1502.01334](#).
81. Grinstein Benjamin, O’Connell Donal, Wise Mark B. Causality as an emergent macroscopic phenomenon: The Lee-Wick $O(N)$ model // *Phys. Rev.* 2009. Vol. D79. P. 105019. [arXiv:hep-th/0805.2156](#).
82. Gorbunov D. S., Panin A. G. Scalaron the mighty: producing dark matter and baryon asymmetry at reheating // *Phys. Lett.* 2011. Vol. B700. P. 157–162. [arXiv:hep-ph/1009.2448](#).
83. Vilenkin Alexander. Classical and Quantum Cosmology of the Starobinsky Inflationary Model // *Phys. Rev.* 1985. Vol. D32. P. 2511.
84. Geraci Andrew A., Smullin Sylvia J., Weld David M. et al. Improved constraints on non-Newtonian forces at 10 microns // *Phys. Rev.* 2008. Vol. D78. P. 022002. [arXiv:hep-ex/0802.2350](#).
85. Tan Wen-Hai, Yang Shan-Qing, Shao Cheng-Gang et al. New Test of the Gravitational Inverse-Square Law at the Submillimeter Range with Dual Modulation and Compensation // *Phys. Rev. Lett.* 2016. Vol. 116, no. 13. P. 131101.
86. Starobinsky Alexei A. Evolution of Small Excitation of Isotropic Cosmological Models With One Loop Quantum Gravitation Corrections. (In Russian) // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 1981.

- Vol. 34. P. 460–463.
87. Bardeen James M., Steinhardt Paul J., Turner Michael S. Spontaneous Creation of Almost Scale - Free Density Perturbations in an Inflationary Universe // [Phys.Rev.](#) 1983. Vol. D28. P. 679.
 88. Salopek D.S., Bond J.R. Nonlinear evolution of long wavelength metric fluctuations in inflationary models // [Phys.Rev.](#) 1990. Vol. D42. P. 3936–3962.
 89. Starobinsky Alexei A., Tsujikawa Shinji, Yokoyama Jun'ichi. Cosmological perturbations from multifield inflation in generalized Einstein theories // [Nucl. Phys.](#) 2001. Vol. B610. P. 383–410. [arXiv:astro-ph/0107555](#).
 90. Starobinsky Alexei A. Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe // [JETP Lett.](#) 1979. Vol. 30. P. 682–685. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.30,719(1979)].
 91. Allen Bruce. The Stochastic Gravity Wave Background in Inflationary Universe Models // [Phys. Rev.](#) 1988. Vol. D37. P. 2078.
 92. Gorbunov D.S., Rubakov V.A. Introduction to the theory of the early universe: Cosmological perturbations and inflationary theory // World Scientific. 2011.
 93. Clunan Tim, Sasaki Misao. Tensor ghosts in the inflationary cosmology // [Class. Quant. Grav.](#) 2010. Vol. 27. P. 165014. [arXiv:hep-th/0907.3868](#).
 94. Myung Yun Soo, Moon Taeyoon. Primordial massive gravitational waves from Einstein-Chern-Simons-Weyl gravity // [JCAP.](#) 2014. Vol. 1408. P. 061. [arXiv:gr-qc/1406.4367](#).
 95. Myung Yun Soo, Moon Taeyoon. Scale-invariant tensor spectrum from conformal gravity // [Mod. Phys. Lett.](#) 2015. Vol. A30, no. 32. P. 1550172. [arXiv:gr-qc/1501.01749](#).
 96. Blas Diego, Pujolas Oriol, Sibiryakov Sergey. Models of non-relativistic quantum gravity: The Good, the bad and the healthy // [JHEP.](#) 2011. Vol. 04. P. 018. [arXiv:hep-th/1007.3503](#).
 97. Withers Benjamin. Einstein-aether as a quantum effective field theory // [Class.Quant.Grav.](#) 2009. Vol. 26. P. 225009. [arXiv:gr-qc/0905.2446](#).
 98. Elliott Joshua W., Moore Guy D., Stoica Horace. Constraining the new Aether: Gravitational Cerenkov radiation // [JHEP.](#) 2005. Vol. 0508. P. 066. [arXiv:hep-ph/hep-ph/0505211](#).
 99. Blas D., Sibiryakov S. Horava gravity versus thermodynamics: The Black hole case // [Phys. Rev.](#) 2011. Vol. D84. P. 124043. [arXiv:hep-th/1110.2195](#).
 100. Armendariz-Picon Cristian, Sierra Noela Farina, Garriga Jaume. Primordial Perturbations in Einstein-Aether and BPSH Theories // [JCAP.](#) 2010. Vol. 1007. P. 010. [arXiv:astro-ph.CO/1003.1283](#).
 101. Blas Diego, Sanctuary Hillary. Gravitational Radiation in Horava Gravity // [Phys.Rev.](#)

2011. Vol. D84. P. 064004. [arXiv:gr-qc/1105.5149](#).
102. Carroll Sean M., Lim Eugene A. Lorentz-violating vector fields slow the universe down // [Phys.Rev.](#) 2004. Vol. D70. P. 123525. [arXiv:hep-th/hep-th/0407149](#).
103. Will Clifford M. The Confrontation between general relativity and experiment // [Living Rev.Rel.](#) 2006. Vol. 9. P. 3. [arXiv:gr-qc/gr-qc/0510072](#).
104. Shao Lijing, Caballero R. Nicolas, Kramer Michael et al. A new limit on local Lorentz invariance violation of gravity from solitary pulsars // [Class.Quant.Grav.](#) 2013. Vol. 30. P. 165019. [arXiv:gr-qc/1307.2552](#).
105. Foster Brendan Z. Radiation damping in Einstein-aether theory // [Phys. Rev.](#) 2006. Vol. D73. P. 104012. [Erratum: [Phys. Rev.D75,129904\(2007\)](#)]. [arXiv:gr-qc/gr-qc/0602004](#).
106. Carroll Sean M., Lim Eugene A. Lorentz-violating vector fields slow the universe down // [Phys. Rev.](#) 2004. Vol. D70. P. 123525. [arXiv:hep-th/hep-th/0407149](#).
107. Yagi Kent, Blas Diego, Yunes Nicolás, Barausse Enrico. Strong Binary Pulsar Constraints on Lorentz Violation in Gravity // [Phys. Rev. Lett.](#) 2014. Vol. 112, no. 16. P. 161101. [arXiv:gr-qc/1307.6219](#).
108. Audren B., Blas D., Lesgourgues J., Sibiryakov S. Cosmological constraints on Lorentz violating dark energy // [JCAP.](#) 2013. Vol. 1308. P. 039. [arXiv:astro-ph.CO/1305.0009](#).
109. Abbott B. P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger // [Phys. Rev. Lett.](#) 2016. Vol. 116, no. 6. P. 061102. [arXiv:gr-qc/1602.03837](#).
110. Arkani-Hamed Nima, Cheng Hsin-Chia, Luty Markus A., Mukohyama Shinji. Ghost condensation and a consistent infrared modification of gravity // [JHEP.](#) 2004. Vol. 0405. P. 074. [arXiv:hep-th/hep-th/0312099](#).
111. Senatore Leonardo. Tilted ghost inflation // [Phys.Rev.](#) 2005. Vol. D71. P. 043512. [arXiv:astro-ph/astro-ph/0406187](#).
112. Cheung Clifford, Creminelli Paolo, Fitzpatrick A. Liam et al. The Effective Field Theory of Inflation // [JHEP.](#) 2008. Vol. 0803. P. 014. [arXiv:hep-th/0709.0293](#).
113. Blas D., Sibiryakov S. Technically natural dark energy from Lorentz breaking // [JCAP.](#) 2011. Vol. 1107. P. 026. [arXiv:hep-th/1104.3579](#).
114. Donnelly William, Jacobson Ted. Coupling the inflaton to an expanding aether // [Phys.Rev.](#) 2010. Vol. D82. P. 064032. [arXiv:gr-qc/1007.2594](#).
115. Solomon Adam R., Barrow John D. Inflationary Instabilities of Einstein-Aether Cosmology // [Phys. Rev.](#) 2014. Vol. D89, no. 2. P. 024001. [arXiv:astro-ph.CO/1309.4778](#).
116. Creminelli Paolo, Norena Jorge, Pena Manuel, Simonovic Marko. Khronon inflation //

- JCAP. 2012. Vol. 1211. P. 032. [arXiv:hep-th/1206.1083](#).
117. Maldacena Juan Martin. Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models // *JHEP*. 2003. Vol. 0305. P. 013. [arXiv:astro-ph/astro-ph/0210603](#).
118. Chen Xingang. Primordial Non-Gaussianities from Inflation Models // *Adv.Astron.* 2010. Vol. 2010. P. 638979. [arXiv:astro-ph.CO/1002.1416](#).
119. Ade P. A. R. et al. Planck 2013 Results. XXIV. Constraints on primordial non-Gaussianity // *Astron. Astrophys.* 2014. Vol. 571. P. A24. [arXiv:astro-ph.CO/1303.5084](#).
120. Afshordi Niayesh, Tolley Andrew J. Primordial non-gaussianity, statistics of collapsed objects, and the Integrated Sachs-Wolfe effect // *Phys.Rev.* 2008. Vol. D78. P. 123507. [arXiv:astro-ph/0806.1046](#).
121. Pajer Enrico, Zaldarriaga Matias. A New Window on Primordial non-Gaussianity // *Phys.Rev.Lett.* 2012. Vol. 109. P. 021302. [arXiv:astro-ph.CO/1201.5375](#).
122. Norena Jorge, Verde Licia, Barenboim Gabriela, Bosch Cristian. Prospects for constraining the shape of non-Gaussianity with the scale-dependent bias // *JCAP*. 2012. Vol. 1208. P. 019. [arXiv:astro-ph.CO/1204.6324](#).
123. Schmidt Fabian, Kamionkowski Marc. Halo Clustering with Non-Local Non-Gaussianity // *Phys.Rev.* 2010. Vol. D82. P. 103002. [arXiv:astro-ph.CO/1008.0638](#).
124. Desjacques Vincent, Jeong Donghui, Schmidt Fabian. Non-Gaussian Halo Bias Re-examined: Mass-dependent Amplitude from the Peak-Background Split and Thresholding // *Phys.Rev.* 2011. Vol. D84. P. 063512. [arXiv:astro-ph.CO/1105.3628](#).
125. Wagner Christian, Verde Licia. N-body simulations with generic non-Gaussian initial conditions II: Halo bias // *JCAP*. 2012. Vol. 1203. P. 002. [arXiv:astro-ph.CO/1102.3229](#).
126. Ade P. A. R. et al. Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation // *Astron. Astrophys.* 2016. Vol. 594. P. A20. [arXiv:astro-ph.CO/1502.02114](#).
127. Ade P. A. R. et al. Joint Analysis of BICEP2/*KeckArray* and *Planck* Data // *Phys. Rev. Lett.* 2015. Vol. 114. P. 101301. [arXiv:astro-ph.CO/1502.00612](#).
128. Baumann Daniel et al. CMBPol Mission Concept Study: Probing Inflation with CMB Polarization // *AIP Conf.Proc.* 2009. Vol. 1141. P. 10–120. [arXiv:astro-ph/0811.3919](#).
129. Amendola Luca et al. Cosmology and fundamental physics with the Euclid satellite // *Living Rev.Rel.* 2013. Vol. 16. P. 6. [arXiv:astro-ph.CO/1206.1225](#).
130. André Philippe et al. PRISM (Polarized Radiation Imaging and Spectroscopy Mission): An Extended White Paper // *JCAP*. 2014. Vol. 1402. P. 006. [arXiv:astro-ph.CO/1310.1554](#).
131. Khoury Justin, Weltman Amanda. Chameleon fields: Awaiting surprises for tests of gravity

- in space // [Phys.Rev.Lett.](#) 2004. Vol. 93. P. 171104. [arXiv:astro-ph/astro-ph/0309300](#).
132. Andersson N., Comer G. L. Relativistic fluid dynamics: Physics for many different scales // [Living Rev. Rel.](#) 2007. Vol. 10. P. 1. [arXiv:gr-qc/gr-qc/0605010](#).
133. Dubovsky S., Gregoire T., Nicolis A., Rattazzi R. Null energy condition and superluminal propagation // [JHEP.](#) 2006. Vol. 03. P. 025. [arXiv:hep-th/hep-th/0512260](#).
134. Kobayashi Tsutomu, Urakawa Yuko, Yamaguchi Masahide. Cosmological perturbations in a healthy extension of Horava gravity // [JCAP.](#) 2010. Vol. 1004. P. 025. [arXiv:hep-th/1002.3101](#).
135. Blas Diego, Lesgourgues Julien, Tram Thomas. The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) II: Approximation schemes // [JCAP.](#) 2011. Vol. 1107. P. 034. [arXiv:astro-ph.CO/1104.2933](#).
136. Lesgourgues Julien. [Cosmological Perturbations](#) // Proceedings, Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: Searching for New Physics at Small and Large Scales (TASI 2012): Boulder, Colorado, June 4-29, 2012. 2013. P. 29–97. [arXiv:astro-ph.CO/1302.4640](#). URL: <http://inspirehep.net/record/1220222/files/arXiv:1302.4640.pdf>.
137. Voruz Luc, Lesgourgues Julien, Tram Thomas. The effective gravitational decoupling between dark matter and the CMB // [JCAP.](#) 2014. Vol. 1403. P. 004. [arXiv:astro-ph.CO/1312.5301](#).
138. Audren Benjamin, Lesgourgues Julien, Benabed Karim, Prunet Simon. Conservative Constraints on Early Cosmology: an illustration of the Monte Python cosmological parameter inference code // [JCAP.](#) 2013. Vol. 1302. P. 001. [arXiv:astro-ph.CO/1210.7183](#).
139. Parkinson David, Riemer-Sorensen Signe, Blake Chris et al. The WiggleZ Dark Energy Survey: Final data release and cosmological results // [Phys.Rev.](#) 2012. Vol. D86. P. 103518. [arXiv:astro-ph.CO/1210.2130](#).
140. Bettoni Dario, Nusser Adi, Blas Diego, Sibiryakov Sergey. Testing Lorentz invariance of dark matter with satellite galaxies. 2017. [arXiv:astro-ph.CO/1702.07726](#).
141. Pietroni Massimo. Flowing with Time: a New Approach to Nonlinear Cosmological Perturbations // [JCAP.](#) 2008. Vol. 0810. P. 036. [arXiv:astro-ph/0806.0971](#).
142. Valageas P. A new approach to gravitational clustering: a path-integral formalism and large-n expansions // [Astron. Astrophys.](#) 2004. Vol. 421. P. 23–40. [arXiv:astro-ph/astro-ph/0307008](#).
143. Carroll Sean M., Leichenauer Stefan, Pollack Jason. Consistent effective theory of long-wave-

- length cosmological perturbations // *Phys. Rev.* 2014. Vol. D90, no. 2. P. 023518. [arXiv:hep-th/1310.2920](#).
144. Blas Diego, Floerchinger Stefan, Garny Mathias et al. Large scale structure from viscous dark matter // *JCAP*. 2015. Vol. 1511. P. 049. [arXiv:astro-ph.CO/1507.06665](#).
145. Tassev Svetlin, Zaldarriaga Matias. The Mildly Non-Linear Regime of Structure Formation // *JCAP*. 2012. Vol. 1204. P. 013. [arXiv:astro-ph.CO/1109.4939](#).
146. Creminelli Paolo, Norena Jorge, Simonovic Marko, Vernizzi Filippo. Single-Field Consistency Relations of Large Scale Structure // *JCAP*. 2013. Vol. 1312. P. 025. [arXiv:astro-ph.CO/1309.3557](#).
147. Kehagias A., Riotto A. Symmetries and Consistency Relations in the Large Scale Structure of the Universe // *Nucl. Phys.* 2013. Vol. B873. P. 514–529. [arXiv:astro-ph.CO/1302.0130](#).
148. Horn Bart, Hui Lam, Xiao Xiao. Soft-Pion Theorems for Large Scale Structure // *JCAP*. 2014. Vol. 1409, no. 09. P. 044. [arXiv:hep-th/1406.0842](#).
149. Slepian Zachary et al. The large-scale 3-point correlation function of the SDSS BOSS DR12 CMASS galaxies. 2015. [arXiv:astro-ph.CO/1512.02231](#).
150. Porto Rafael A., Senatore Leonardo, Zaldarriaga Matias. The Lagrangian-space Effective Field Theory of Large Scale Structures // *JCAP*. 2014. Vol. 1405. P. 022. [arXiv:astro-ph.CO/1311.2168](#).
151. Kim Juhan, Park Changbom, Rossi Graziano et al. The New Horizon Run Cosmological N-Body Simulations // *J. Korean Astron. Soc.* 2011. Vol. 44. P. 217–234. [arXiv:astro-ph.CO/1112.1754](#).
152. Seo Hee-Jong, Eisenstein Daniel J. Improved forecasts for the baryon acoustic oscillations and cosmological distance scale // *Astrophys. J.* 2007. Vol. 665. P. 14–24. [arXiv:astro-ph/astro-ph/0701079](#).
153. Goroff M. H., Grinstein Benjamin, Rey S. J., Wise Mark B. Coupling of Modes of Cosmological Mass Density Fluctuations // *Astrophys. J.* 1986. Vol. 311. P. 6–14.
154. Crocce Martin, Scoccimarro Roman. Renormalized cosmological perturbation theory // *Phys. Rev.* 2006. Vol. D73. P. 063519. [arXiv:astro-ph/astro-ph/0509418](#).
155. Tassev Svetlin. N-point Statistics of Large-Scale Structure in the Zel'dovich Approximation // *JCAP*. 2014. Vol. 1406. P. 012. [arXiv:astro-ph.CO/1311.6316](#).
156. Weinberg David H., Mortonson Michael J., Eisenstein Daniel J. et al. Observational Probes of Cosmic Acceleration // *Phys. Rept.* 2013. Vol. 530. P. 87–255. [arXiv:astro-ph.CO/1201.2434](#).

157. Smith Robert E., Scoccimarro Roman, Sheth Ravi K. Eppur Si Muove: On The Motion of the Acoustic Peak in the Correlation Function // *Phys. Rev.* 2008. Vol. D77. P. 043525. [arXiv:ASTRO-PH/astro-ph/0703620](#).
158. Padmanabhan Nikhil, White Martin. Calibrating the Baryon Oscillation Ruler for Matter and Halos // *Phys. Rev.* 2009. Vol. D80. P. 063508. [arXiv:astro-ph.CO/0906.1198](#).
159. Sherwin Blake D., Zaldarriaga Matias. The Shift of the Baryon Acoustic Oscillation Scale: A Simple Physical Picture // *Phys. Rev.* 2012. Vol. D85. P. 103523. [arXiv:astro-ph.CO/1202.3998](#).
160. Prada Francisco, Scoccola Claudia G., Chuang Chia-Hsun et al. Hunting down systematics in baryon acoustic oscillations after cosmic high noon // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2016. Vol. 458, no. 1. P. 613–623. [arXiv:astro-ph.CO/1410.4684](#).
161. Xu X., White M., Padmanabhan N. et al. A New Statistic for Analyzing Baryon Acoustic Oscillations // *Astrophys. J.* 2010. Vol. 718. P. 1224–1234. [arXiv:astro-ph.CO/1001.2324](#).
162. Seo Hee-Jong, Eckel Jonathan, Eisenstein Daniel J. et al. High-precision predictions for the acoustic scale in the non-linear regime // *Astrophys. J.* 2010. Vol. 720. P. 1650–1667. [arXiv:astro-ph.CO/0910.5005](#).
163. Matsubara Takahiko, Desjacques Vincent. Impacts of biasing schemes in the one-loop integrated perturbation theory // *Phys. Rev.* 2016. Vol. D93, no. 12. P. 123522. [arXiv:astro-ph.CO/1604.06579](#).